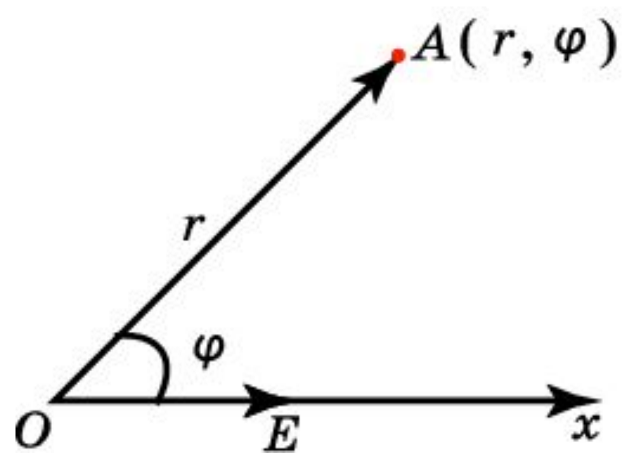
Полярные координаты

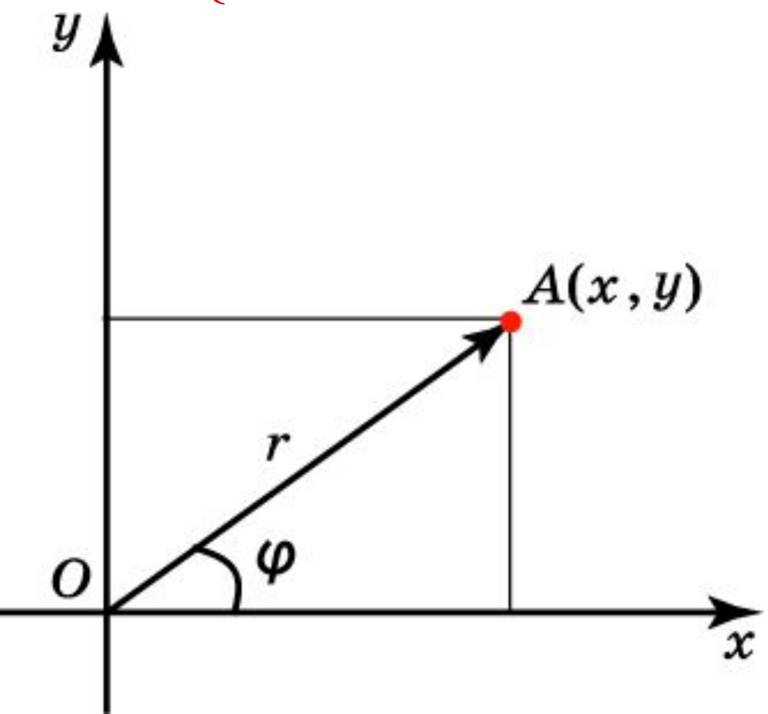
Пусть на плоскости задана координатная прямая с началом координат *O* и направляющим вектором. Эта прямая в данном случае будет называться полярной осью. Полярными координатами точки *A* на плоскости с заданной полярной осью называется пара (r, φ), где r - расстояние от точки *A* до точки *O*, φ - угол между полярной осью и вектором , отсчитываемый в направлении против часовой стрелки. При этом первая координата r называется полярным радиусом, а вторая φ - полярным углом. Полярный угол φ можно задавать в градусах или радианах.



Полярные координаты

Если на плоскости задана декартова система координат, то обычно за полярную ось принимается ось Ox. В этом случае каждой точке плоскости с декартовыми координатами (x,y) можно сопоставить полярные координаты (r,φ). При этом декартовы координаты выражаются через полярные по формулам

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$



И, наоборот, полярные координаты выражаются через декартовы по формулам

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Спираль Архимеда

Построим кривую $\rho = \varphi$. Область определения определим из неравенства

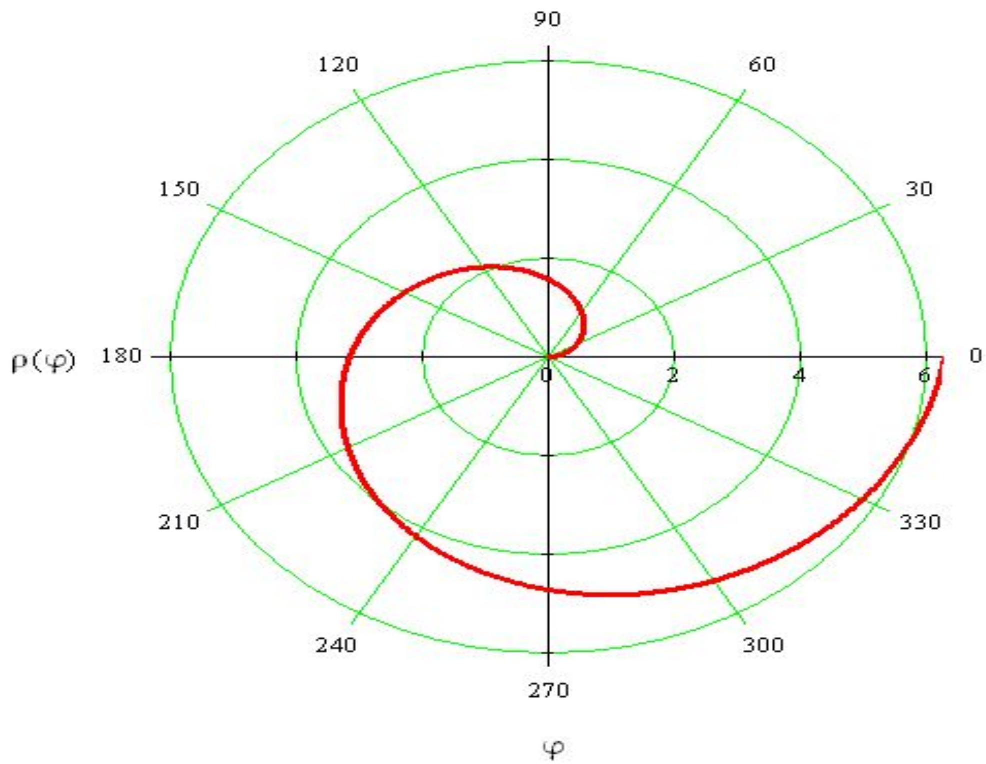
$$\rho \geq 0 \;\Rightarrow\; \varphi \geq 0.$$

Значения углов φ будем откладывать в положительном направлении, против часовой стрелки. Значения занесем в таблицу:

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
ρ	0	0,52	1,05	1,57	2,09	2,62	3,14	3,66	4,19	4,71	5,23	5,76	6,28

Функция $\rho = \varphi$ монотонно возрастает, с ростом угла точка удаляется от полюса.

Откладывая на лучах, выходящих из полюса под углом φ, соответствующие значения ρ, построим кривую.



Полученная кривая называтся спиралью Архимеда

Окружность

Построим кривую, определяемую уравнением $\rho = \cos\varphi$.

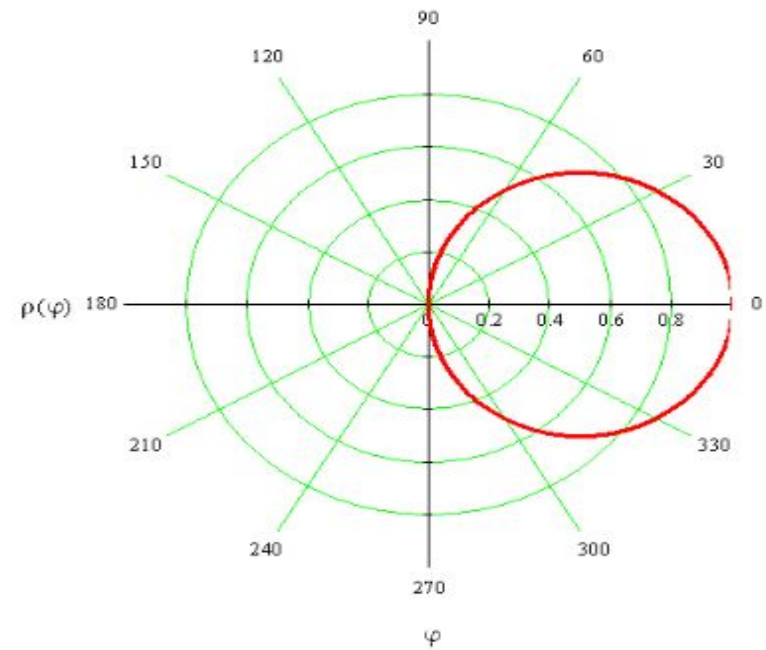
Область определения найдем из неравенства $\rho \geq 0$:

$$\cos\varphi \geq 0 \;\Rightarrow\; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\; k \in \mathbf{Z}.$$

Составим таблицу значений.

φ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
ρ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Построим кривую:



Полученная кривая является окружностью радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в точке $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Действительно, перейдем от полярных координат к декартовым в уравнении $\rho = \cos\varphi$.

Из соотношений $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$ выразим $\cos\varphi = \frac{x}{\rho}$, и подставим в уравнение вместе с $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Умножим обе части уравнения на $\sqrt{x^2 + y^2}$ и преобразуем полученное равенство:

$$x^2 + y^2 = x \;\Rightarrow\; x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 = \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Последнее уравнение и есть уравнение окружности радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в точке $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Кардиоида

Построим кривую, определяемую уравнением $\rho = 1 - \cos\varphi$.

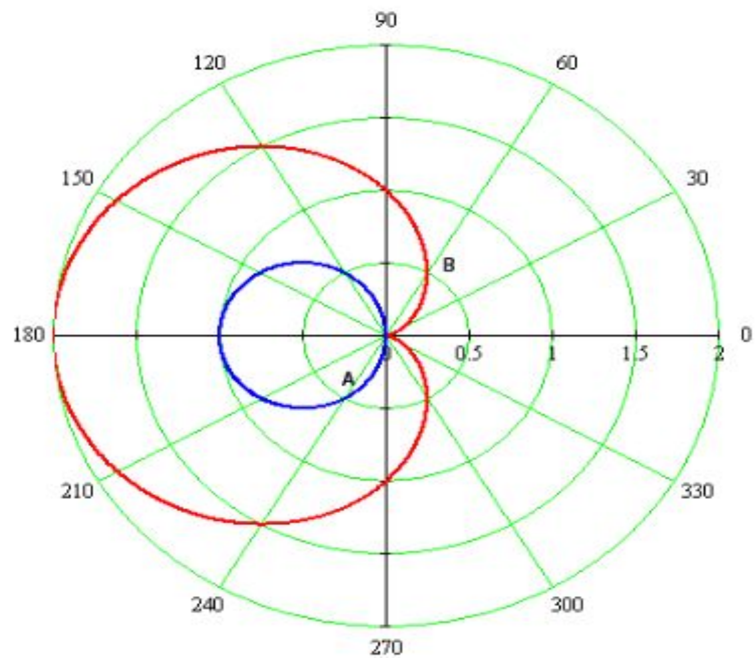
Область определения найдем из неравенства $\rho \geq 0$:

$$1 - \cos\varphi \geq 0 \ \forall\varphi .$$

Составим таблицу значений.

φ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{4\pi}{3}$	2π
ρ	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0

Построим кривую (красный контур)



Кардиоида получается из окружности $\rho = -\cos\varphi$ (синий контур), если на каждом луче выходящем из полюса, увеличить радиус на 1 в направлении луча. При этом в промежутке от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ т.е. в правой полуплоскости, где функция $\rho = -\cos\varphi$ принимает отрицательные значения, увеличивать радиус нужно от точки окружности, лежащей на продолжении луча в противоположном направлении. Так на луче, выходящем под углом 60º строим точку B, добавляя 1 к точке A в направлении луча 60º. Точка A соответствует радиусу $\rho\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$, отрицательное значение которого отложили в направлении противоположном лучу 60º.

Упражнение 1

Постройте кривую, определяемую уравнением $r = \sin 3\varphi$ по 16 точкам.

Упражнение 2

Постройте кривую, определяемую уравнением $r = 4 - \sin 5\varphi$ по 16 точкам.

Упражнение 3

Постройте кривую, определяемую уравнением $r = \varphi^2 - 1.$

по 16 точкам.

Упражнение 4

Нарисуйте кривую, задаваемую уравнением $r = \cos(3\varphi) + \sin^2(3\varphi)$.