Комбинаторика

Виленкин Н.Я. Комбинаторика.

Виленкин Н.Я. Популярная комбинаторика.

Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики.

Липский В. Комбинаторика для программистов.

Андерсон Джеймс А. Дискретная математика и комбинаторика.

Задачи комбинаторики – пересчет и перечисление элементов в конечных множествах.

Задача пересчета – сколько элементов, принадлежащих заданному конечному множеству, обладают заданным свойством.

Задача перечисления – выделение из конечного множества всех элементов, удовлетворяющих заданному свойству.

Пусть $|X| = n$. Тогда объект x может быть выбран из множества X n способами.

Правило суммы. Если объект x может быть выбран m способами, а объект y – другими n способами, то выбор «либо x, либо y» можно сделать $m+n$ способами.

Следствие. Пусть X_1, X_2, …, X_k – попарно непересекающиеся множества, тогда $\left|\bigcup_{i=1}^{k} X_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |X_i|$.

Правило произведения. Если объект x может быть выбран m способами и после каждого из таких выборов объект y в свою очередь может быть выбран n способами, то выбор упорядоченной пары $\langle x, y \rangle$, можно сделать mn способами.

Правило произведения. Если объект x может быть выбран m способами и после каждого из таких выборов объект y в свою очередь может быть выбран n способами, то выбор упорядоченной пары $\langle x, y\rangle$, можно сделать mn способами.

Пусть объект x выбирается из множества $X=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Обозначим через X_i – множество пар $\langle x, y\rangle$ при $x=a_i$. Тогда множества X_i попарно не пересекаются и $|X_i|=n \ \forall i=\overline{1,m}$. Следовательно,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{m} X_i\right|=\sum_{i=1}^{m}|X_i|=\sum_{i=1}^{m} n=mn.$$

Следствие. Если объект x_1 может быть выбран n_1 способами, после чего объект x_2 в свою очередь может быть выбран n_2 способами и $\forall i=\overline{2,m-1}$, после выбора объектов $x_1, x_2, \ldots, x_i$ объект x_{i+1} может быть выбран n_{i+1} способами, то выбор упорядоченной последовательности из m объектов $\langle x_1, x_2, \ldots, x_m\rangle$ можно сделать $n_1 n_2 \ldots n_m$ способами.

Формула включений и исключений.

Пусть X_i – конечные множества, $i=1,2,...,n$, $n \geq 2$. Тогда $\left|X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n\right| =$

$$= \left(\left|X_1\right| + \left|X_2\right| + ... + \left|X_n\right|\right) - \left(\left|X_1 \cap X_2\right| + \left|X_1 \cap X_3\right| + ... + \left|X_1 \cap X_n\right| + ... + \left|X_{n-1} \cap X_n\right|\right) +$$
$$+ \left(\left|X_1 \cap X_2 \cap X_3\right| + \left|X_1 \cap X_2 \cap X_4\right| + ... + \left|X_{n-2} \cap X_{n-1} \cap X_n\right|\right) - ... + (-1)^{n+1}\left|X_1 \cap X_2 \cap ... \cap X_n\right|.$$

◄ Докажем методом математической индукции.

1. $n=2$. Если $X_1 \cap X_2 = \varnothing$, то $\left|X_1 \cup X_2\right| = \left|X_1\right| + \left|X_2\right|$. Если $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$, то в сумме $\left|X_1\right| + \left|X_2\right|$ каждый элемент множества $X_1 \cap X_2$ посчитан 2 раза, а значит,

$$\left|X_1 \cup X_2\right| = \left|X_1\right| + \left|X_2\right| - \left|X_1 \cap X_2\right|.$$

Пусть формула справедлива для n множеств. Тогда

$$\left|X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n \cup X_{n+1}\right| = \left|\left(X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n\right) \cup X_{n+1}\right| =$$

$$= \left|X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n\right| + \left|X_{n+1}\right| - \left|\left(X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n\right) \cap X_{n+1}\right| =$$

$$= \left|X_1\right| + \left|X_2\right| + \ldots + \left|X_n\right| - \left(\left|X_1 \cap X_2\right| + \left|X_1 \cap X_3\right| + \ldots + \left|X_1 \cap X_n\right| + \ldots + \left|X_{n-1} \cap X_n\right|\right) +$$
$$+ \left(\left|X_1 \cap X_2 \cap X_3\right| + \left|X_1 \cap X_2 \cap X_4\right| + \ldots + \left|X_{n-2} \cap X_{n-1} \cap X_n\right|\right) -$$
$$+ \ldots + (-1)^{n+1}\left|X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n\right| +$$
$$+ \left|X_{n+1}\right| - \left|\left(X_1 \cap X_{n+1}\right) \cup \left(X_2 \cap X_{n+1}\right) \cup \ldots \cup \left(X_n \cap X_{n+1}\right)\right| =$$

$$= \left|X_1\right| + \left|X_2\right| + \ldots + \left|X_n\right| - \left(\left|X_1 \cap X_2\right| + \left|X_1 \cap X_3\right| + \ldots + \left|X_1 \cap X_n\right| + \ldots + \left|X_{n-1} \cap X_n\right|\right) +$$
$$+ \left(\left|X_1 \cap X_2 \cap X_3\right| + \left|X_1 \cap X_2 \cap X_4\right| + \ldots + \left|X_{n-2} \cap X_{n-1} \cap X_n\right|\right) -$$
$$+ \ldots + (-1)^{n+1}\left|X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n\right| +$$
$$+ \left|X_{n+1}\right| - \left|X_1 \cap X_{n+1}\right| - \left|X_2 \cap X_{n+1}\right| - \ldots \left|X_n \cap X_{n+1}\right| +$$
$$+ \left(\left|X_1 \cap X_2 \cap X_{n+1}\right| + \left|X_1 \cap X_3 \cap X_{n+1}\right| + \ldots + \left|X_{n-1} \cap X_n \cap X_{n+1}\right|\right) +$$
$$+ \ldots + (-1)^{n+1}\left(\left|X_2 \cap X_3 \cap \ldots \cap X_{n+1}\right| + \left|X_1 \cap X_3 \cap \ldots \cap X_{n+1}\right| + \left|X_1 \cap X_2 \ldots \cap X_{n-1} \cap X_{n+1}\right|\right) +$$
$$+ (-1)^{n+2}\left|X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n \cap X_{n+1}\right|$$

Пример

В НИИ работает несколько человек, причем все они знают хотя бы по одному языку:

англ. – 6,	англ. и нем. – 4,	все три языка – 1.
франц. – 7,	англ. и франц. – 2,	
нем. – 6,	нем. и франц. – 3,	

1) Сколько человек в НИИ? $6 + 7 + 6 - (4 + 2 + 3) + 1 = 11$

2) Сколько человек знают только английский? $6 - (4 + 2) + 1 = 1$

3) Сколько человек знают только французский? $7 - (2 + 3) + 1 = 3$

1. Из города A в город B ведут пять дорог, а из города B в город C – три. Сколько путей, проходящих через B, ведут из города A в город C? $5 \cdot 3$

2. На вершину горы ведут 5 дорог.
 1) Сколькими способами турист может подняться на гору и потом спуститься? $5 \cdot 5$
 2) Сколькими способами турист может подняться на гору и потом спуститься, если подъем и спуск происходят по разным дорогам? $5 \cdot 4$

3. В одном классе 25 учеников, а в другом 24. Сколькими способами можно выбрать:
 1) одного ученика на конференцию, $25 + 24 = 49$
 2) двух учеников на олимпиаду, $\dfrac{49 \cdot 48}{2}$
 3) по одному человеку из каждого класса? $25 \cdot 24$

4. Сколькими способами можно указать на шахматной доске 2 квадрата:
 1) белый и черный, $32 \cdot 32$
 2) произвольного цвета? $\dfrac{64 \cdot 63}{2}$

Набор элементов $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$ из множества $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ называется ***выборкой*** объема m из n элементов.

Выборка называется ***упорядоченной***, если порядок следования элементов в ней задан. Если порядок следования элементов в выборке не является существенным, то выборка называется ***неупорядоченной.***

В выборках могут допускаться или не допускаться повторения элементов.

Перестановкой называется упорядоченная выборка без повтора объема n из n элементов.

	Упорядоченная выборка	Неупорядоченная выборка
Без повторения элементов	Размещения без повтора $A_n^m = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-m)!}, & m \le n \\ 0, & m > n \end{cases}$ Перестановки $P_n = A_n^n = n!$	Сочетания без повтора $C_n^m = \begin{cases} \dfrac{n!}{m!(n-m)!}, & m \le n \\ 0, & m > n \end{cases}$,
С повторением элементов	Размещения с повтором $\overline{A}_n^m = n^m$	Сочетания с повтором $\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = C_{n+m-1}^{n-1}$

Замечание: В случае нулевой выборки принято, что $A_n^0 = C_n^0 = \overline{A}_n^0 = \overline{C}_n^0 = 1$.

1. На вершину горы ведут 5 дорог.

1) Сколькими способами турист может подняться на гору и потом спуститься? $\overline{A}_5^2 = 5 \cdot 5$

2) Сколькими способами турист может подняться на гору и потом спуститься, если подъем и спуск происходят по разным дорогам? $A_5^2 = \dfrac{5!}{(5-2)!} = 5 \cdot 4$

3. В одном классе 25 учеников, а в другом 24. Сколькими способами можно выбрать:

1) двух учеников на олимпиаду, $C_{49}^2 = \dfrac{49!}{2!47!} = \dfrac{49 \cdot 48}{2}$

2) 6 человек для участия в математическом бою (один из них – капитан), $49 \cdot C_{48}^5$

3) по три человека из каждого класса для дежурства в столовой? $C_{25}^3 \cdot C_{24}^3$

5. Трое ребят собрали с яблони 40 яблок. Сколькими способами они могут разделить яблоки между собой, если

1) все яблоки одинаковые, $\overline{C}_3^{40} = C_{42}^{40} = \dfrac{42!}{2!40!} = 21 \cdot 41$

2) все яблоки разные? $\overline{A}_3^{40} = 3^{40}$

6. Из колоды, состоящей из 52 карт, выбрали 10 карт.

Определить в скольких случаях среди них окажутся:

1) пиковая дама, $1\cdot C_{52-1}^{10-1} = C_{51}^{9}$

2) все четыре дамы, $C_{52-4}^{10-4} = C_{48}^{6}$

3) все карты одного цвета, $C_{26}^{10} + C_{26}^{10}$ или $2\cdot C_{26}^{10}$

4) все карты одной масти, $4\cdot C_{13}^{10}$

5) ни одного туза, C_{48}^{10}

6) ровно один туз, $4\cdot C_{48}^{10-1} = 4\cdot C_{48}^{9}$

7) ровно два туза, $C_4^2\cdot C_{48}^{10-2} = 6\cdot C_{48}^{8}$

8) хотя бы один туз, $C_{52}^{10} - C_{48}^{10}$

9) не менее двух тузов? $C_{52}^{10} - C_{48}^{10} - 4\cdot C_{48}^{9}$ или $C_4^2 C_{48}^8 + C_4^3 C_{48}^7 + C_4^4 C_{48}^6$

7. Найти все решения в целых неотрицательных числах уравнения

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n.$$

$n = 5, \quad k = 3$

1 1 0 1 1 0 1	$x_1 = 2, \; x_2 = 2, \; x_3 = 1$
0 0 1 1 1 1 1	$x_1 = 0, \; x_2 = 0, \; x_3 = 5$
1 1 0 0 1 1 1	$x_1 = 2, \; x_2 = 0, \; x_3 = 3$

$$C_{n+k-1}^{k-1} = C_{n+k-1}^{n}$$

8. Сколько можно сделать перестановок из n элементов, в которых

1) два данные элемента a и b стоят рядом,

$$(n-1)!\cdot A_2^2 = 2(n-1)!$$

2) два данные элемента a и b **не** стоят рядом,

$$n! - A_2^2 (n-1)! = n! - 2(n-1)!$$

3) данные три элемента a, b и c не стоят рядом,

$$n! - A_3^3 (n-2)! = n! - 6(n-2)!$$

4) никакие два элемента из элементов a, b и c не стоят рядом,

$$n! - \left(A_3^2 (n-1)! - A_3^3 (n-2)!\right) = n! - 6(n-1)! + 6(n-2)!$$

5) никакие два элемента из элементов a, b, c и d не стоят рядом,

$$n! - \left(A_4^2 (n-1)! - A_4^3 (n-2)! + A_4^4 (n-3)!\right) =$$

$$= n! - 12(n-1)! + 24(n-2)! - 24(n-3)!$$

Разбиения

Совокупность множеств $X_1, X_2, \ldots, X_k$ $(k \geq 1)$ называется разбиением множества X, если 1) $\bigcup_{i=1}^{k} X_i = X$, 2) $\forall i \neq j \; X_i \cap X_j = \varnothing$.

Разбиения могут быть упорядочены и неупорядочены.

Пример. Пусть $X = \{1,2,3,4,5\}$.

1) $X_1 = \{1,2\}$, $X_2 = \{3,4\}$, $X_3 = \{5\}$,

2) $X_1 = \{3,4\}$, $X_2 = \{1,2\}$, $X_3 = \{5\}$,

3) $X_1 = \{2,1\}$, $X_2 = \{5\}$, $X_3 = \{3,4\}$,

4) $X_1 = \{1,2\}$, $X_2 = \{4,5\}$, $X_3 = \{3\}$.

Если рассматриваются неупорядоченные разбиения, то 1,2 и 3 совпадают.

Упорядоченные разбиения

Множество X, $|X| = n$ разбивается на подмножества $X_1, X_2, \ldots, X_k$ такие, что $|X_i| = n_i$, $i = \overline{1,k}$. Количество таких разбиений можно вычислить по формуле:

$$C_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}.$$

Неупорядоченные разбиения

Множество X, $|X| = n$ разбивается на подмножества, среди которых m_i подмножеств с i элементами, причем $\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot i = n$. Количество таких разбиений можно вычислить по формуле.

$$\frac{C_n^{\overbrace{1,1,\ldots,1}^{m_1},\overbrace{2,2,\ldots,2}^{m_2},\overbrace{3,3,\ldots,3}^{m_3},\ldots,\overbrace{n}^{m_n}}}{m_1!\, m_2!\, m_3! \ldots m_n!} = \frac{n!}{m_1!\,(2!)^{m_2}\, m_2!\,(3!)^{m_3}\, m_3! \ldots (n!)^{m_n}\, m_n!}.$$

9. Квадрат 3х3. Сколько разных раскрасок четырьмя цветами таких, что

1-й цвет – 3 клетки,

2-й цвет – 2 клетки,

3-й цвет – 3 клетки,

4-й цвет – 1 клетка.

$$C_9^{3,2,3,1}$$

10. При игре в домино 4 игрока делят поровну 28 костей. Сколькими способами они могут это сделать?

$$C_{28}^{7,7,7,7}$$

10.Из 80 человек набирается несколько туристических группы:

1) Франция – 20, Англия – 30, Германия – 30, $C_{80}^{20,30,30}$

2) Франция – 20, Англия – 2 группы по 30 человек, $\dfrac{C_{80}^{20,30,30}}{2}$

3) Франция – 4 группы по 20 человек, $\dfrac{C_{80}^{20,20,20,20}}{4!}$

4) Франция – 5 групп по 8 человек,
Англия – 4 группы по 10 человек, $\dfrac{C_{80}^{8,8,8,8,8,10,10,10,10}}{5!\,4!}$

5) Франция – 20, Англия – 3 группы по 10 человек,
Германия – 3 группы по 10 человек, $\dfrac{C_{80}^{20,10,10,10,10,10,10}}{3!\,3!}$

Сколькими способами это можно сделать?

Перестановки с повторениями

Сколько существует размещений с повторениями $P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ из n элементов, таких, что в выборке ровно

n_1 элементов 1-го типа,

n_2 элементов 2-го типа,

…

n_k элементов k -го типа.

Каждой выборке поставим в соответствие разложение n элементов (номеров позиций) по k ящикам (типам элементов):

в 1-й ящик – элементы 1-го типа,

во 2-й ящик – элементы 2-го типа,

…

в k ящик – элементы k типа.

Получим разбиение n–элементного множества на k подмножеств с мощностями $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Следовательно, количество таких перестановок

$$C_n^{n_1, n_1, \ldots, n_k}.$$

12.

1) У мамы 2 яблока и 3 груши. Сколькими способами она может выдавать по одному фрукту в течение 5 дней?

$$C_5^{2,3}$$

2) У мамы 2 яблока, 3 груши и 4 апельсина. Сколькими способами она может выдавать по одному фрукту в течение 9 дней?

$$C_9^{2,3,4}$$

3) У мамы 2 яблока, 3 груши и 4 апельсина. Сколькими способами она может выдавать не более чем по одному фрукту в течение 12 дней?

$$C_{12}^{9}C_9^{2,3,4}$$

13. Сколько различных слов (без смысла) можно получить, переставляя буквы слова «математика».

$$C_{10}^{2,3,2,1,1,1}$$

Полиномиальная формула

$$(x_1+x_2+\dots+x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\dots+n_k=n} C_n^{n_1,n_2,\dots,n_k}\, x_1^{n_1}x_2^{n_2}\dots x_k^{n_k}.$$

$$(x_1+x_2+\dots+x_k)^n = \underbrace{(x_1+x_2+\dots+x_k)}_{1}\underbrace{(x_1+x_2+\dots+x_k)}_{2}\dots\underbrace{(x_1+x_2+\dots+x_k)}_{n}$$

Пусть $A=\{1,2,3,\dots,n\}$ – множество номеров скобок.

Каждому многочлену $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\dots x_k^{n_k}$ поставим в соответствие разбиение множества A на подмножества $A_1,A_2,\dots,A_k$, где A_i множество номеров скобок из которых брали слагаемое x_i.

Тогда количество одинаковых слагаемых $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\dots x_k^{n_k}$ будет $C_n^{n_1,n_2,\dots,n_k}$.

Круглый стол

Сколькими способами n человек могут сесть за круглый стол.

	комплексный обед в столовой на перемене	новогодний вечер в дорогом ресторане
без ограничений	$\frac{n!}{2n}=\frac{(n-1)!}{2}$	$n!$
a и b должны сидеть рядом	$2\frac{(n-2)!}{2}=(n-2)!$	$2\cdot n\cdot(n-2)!$
соседями c должны быть a и b	$2\frac{(n-3)!}{2}=(n-3)!$	$2\cdot n\cdot(n-3)!$

Круглый стол

Сколькими способами n человек могут сесть за круглый стол.

	комплексный обед в столовой на перемене	новогодний вечер в дорогом ресторане
без ограничений	$\frac{n!}{2n}=\frac{(n-1)!}{2}$	$n!$
a и b должны сидеть рядом	$\frac{2n(n-2)!}{2n}=(n-2)!$	$2\cdot n\cdot(n-2)!$
соседями c должны быть a и b	$\frac{2n(n-3)!}{2n}=(n-3)!$	$2\cdot n\cdot(n-3)!$

Свойства сочетаний

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$

2. $C_n^k = C_n^{n-k}$

3. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$

4. $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$

5. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$

6. $\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n$

7. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(C_n^k\right)^2 = \begin{cases} (-1)^m C_{2m}^m, & n = 2m, \\ 0, & n = 2m+1. \end{cases}$

8. $\sum_{k=0}^{m} C_{n+k}^k = \sum_{k=0}^{m} C_{n+k}^n = \overline{C}_{n+2}^m$

9. $\sum_{k=o}^{m} (-1)^k C_n^k = (-1)^m C_{n-1}^m, \ m < n$

10. $\sum_{k=0}^{s} C_m^k C_n^{s-k} = C_{m+n}^s, \ s \le m + n$

11. $\sum_{k=1}^{n} C_{2n}^{2k} = \sum_{k=1}^{n} C_{2n}^{2k-1} = 2^{n-1}$

12. $\sum_{k=1}^{n} k C_n^k x^{k-1} = n \cdot (1+x)^{n-1}$

13. $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k x^{k+1}}{k+1} = \frac{(x+1)^{n+1} - 1}{n+1}$

Комбинаторные доказательства

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$

C_n^0 – выбрать 0 элементов, C_n^n – выбрать все элементы.

2. $C_n^k = C_n^{n-k}$

C_n^k, – выбрать k элементов, C_n^k, – выбрать $n-k$ элементов.

3. $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$

C_{n+1}^k, – из $n+1$ элемента выбрать k элементов,

C_n^k – из $n+1$ элемента выбрать k элементов так, чтобы среди них не было элемента a,

C_n^{k-1} – из $n+1$ элемента выбрать k элементов так, чтобы среди них был элемент a.

8. $\sum_{k=0}^{m} C_{n+k}^{k} = \sum_{k=0}^{m} C_{n+k}^{n} = \overline{C}_{n+2}^{m}$

Рассмотрим m–сочетания с повторениями, составленные из элементов $n+2$ типов. Количество таких сочетаний равно

$$\overline{C}_{n+2}^{m} = C_{n+m+1}^{m}.$$

Разобьем все эти сочетания на классы, отнеся к i–му классу сочетания, которые содержат ровно i элементов первого типа. Количество сочетаний для i-го класса определяется формулой $\overline{C}_{(n+2)-1}^{m-i} = \overline{C}_{n+1}^{m-i}$. Тогда общее количество m–сочетаний с повторением из элементов $n+2$ типов можно вычислить следующим образом:

$$\overline{C}_{n+2}^{m} = \sum_{i=0}^{m} \overline{C}_{n+1}^{m-i} = \sum_{i=0}^{m} C_{(n+1)+(m-i)-1}^{m-i} = \sum_{i=0}^{m} C_{n+m-i}^{m-i} = [k := m-i] = \sum_{k=0}^{m} C_{n+k}^{k}. \ \square$$

Аналитические доказательства

1. $C_n^0 = \dfrac{n!}{0!(n-0)!} = 1, \quad C_n^n = \dfrac{n!}{n!(n-n)!} = 1$

2. $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}, \quad C_n^{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} \quad \Rightarrow \quad C_n^k = C_n^{n-k}$

3. $C_n^k + C_n^{k-1} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} + \dfrac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} =$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{(n-k+1)}\right) = \frac{(n+1)!}{(k-1)!(n-k+1)!} = C_{n+1}^k$$

4. $2^n = (1+1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k$

5. $0^n = (-1+1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot (-1)^k \cdot 1^{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$

6. $\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n$

Рассмотрим тождество $(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$. Коэффициенты при x^n в левой и правой части тождества должны совпадать.

$$(1+x)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}C_{2n}^k x^k=\ldots+C_{2n}^n x^n+\ldots$$

$$\left((1+x)^n\right)^2=\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k\right)^2=\left(C_n^0x^0+C_n^1x^1+C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n\right)^2=$$

$$=\left(C_n^0x^0+C_n^1x^1+C_n^2x^2+\ldots+C_n^{n-2}x^{n-2}+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n\right)\times$$
$$\times\left(C_n^0x^0+C_n^1x^1+C_n^2x^2+\ldots+C_n^{n-2}x^{n-2}+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n\right)=$$

$$=\ldots+\left(C_n^0C_n^n+C_n^1C_n^{n-1}+C_n^2C_n^{n-2}+\ldots C_n^{n-2}C_n^2+C_n^{n-1}C_n^1+C_n^nC_n^0\right)x^n+\ldots=$$

$$=\left[C_n^k=C_n^{n-k}\right]=\ldots+\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2x^n+\ldots$$

7. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(C_n^k\right)^2=\begin{cases}(-1)^m C_{2m}^m, & n=2m,\\ 0, & n=2m+1.\end{cases}$

 Рассмотрим тождество $(1-x)^n(1+x)^n=\left(1-x^2\right)^n$. Коэффициенты при x^n в левой и правой части тождества должны совпадать.

$$(1-x)^n(1+x)^n=$$

$$=\left(C_n^0x^0-C_n^1x^1+C_n^2x^2-\ldots+(-1)^n C_n^n x^n\right)\times\left(C_n^0x^0+C_n^1x^1+C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n\right)=$$

$$=\ldots+\left(C_n^0C_n^n-C_n^1C_n^{n-1}+C_n^2C_n^{n-2}-\ldots+(-1)^n C_n^nC_n^0\right)x^n+\ldots=\left[C_n^k=C_n^{n-k}\right]=$$

$$=\ldots+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(C_n^k\right)^2x^n+\ldots$$

1. $n=2m-1$. Разложение $\left(1-x^2\right)^n$ не содержит нечетных степеней, поэтому коэффициент при x^n должен быть равен 0.

2. $n=2m$: $\quad\left(1-x^2\right)^n=\ldots+(-1)^m C_{2m}^m x^{2m}+\ldots$

10. $\sum_{k=0}^{s} C_n^k C_m^{s-k} = C_{m+n}^{s},\ s \le n+m$

▯ Рассмотрим тождество

$$(1+x)^m (1+x)^n = (1+x)^{m+n}.$$

Коэффициенты при x^s в левой и правой части тождества должны совпадать.

$$(1+x)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n} C_{m+n}^k x^k = \ldots + C_{m+n}^s x^s + \ldots$$

$$(1+x)^m (1+x)^n = \left(\sum_{k=0}^{m} C_m^k x^k \right)\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \right) =$$

$$= \left(C_m^0 x^0 + C_m^1 x^1 + C_m^2 x^2 + \ldots + C_m^m x^m \right) \times \left(C_n^0 x^0 + C_n^1 x^1 + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n \right) =$$

$$= \ldots + \left(C_m^0 C_n^s + C_m^1 C_n^{s-1} + C_m^2 C_n^{s-2} + \ldots + C_m^s C_n^0 \right) x^s + \ldots = \ldots + \sum_{k=0}^{s} C_n^k C_m^{s-k} x^s + \ldots$$ ▯

12. $\sum_{k=1}^{n} k\,C_n^k x^{k-1} = n\cdot(1+x)^{n-1}$

▯ $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$, $\quad \left((1+x)^n\right)' = n(1+x)^{n-1}$, $\quad \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\right)' = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k x^{k-1}$.▯

13. $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k x^{k+1}}{k+1} = \frac{(x+1)^{n+1}-1}{n+1}$

▯ $\frac{C_n^k}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)k!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)(k+1)!(n-k)!} = \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k x^{k+1}}{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1} x^{k+1} = [l := k+1] =$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{l=1}^{n+1} C_{n+1}^{l} x^{l} = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{l=0}^{n+1} C_{n+1}^{l} x^{l} - C_{n+1}^{0} x^{0}\right) = \frac{(1+x)^{n+1}-1}{n+1}$$ ▯