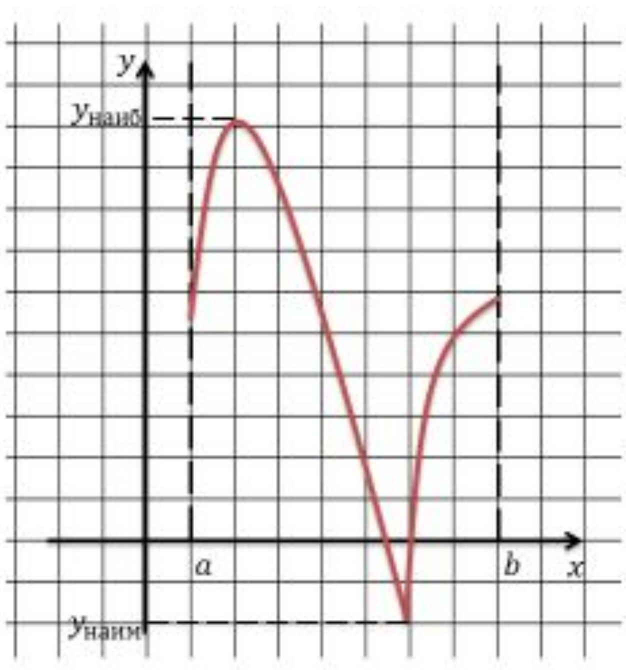
Наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции на промежутке

10 класс

Пусть у нас есть график некоторой функции *f(x)* на промежутке [*a*; *b*]. По графику легко найти наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке. Иногда наибольшее и наименьшее значения можно отыскать и без построения графика.



$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

$$\sqrt{4 - x^2} \ge 0 \Rightarrow y_{наим} = y(-2) = y(2) = 0$$

$$\sqrt{4 - x^2} \le 4 \Rightarrow y_{наиб} = y(0) = 2$$

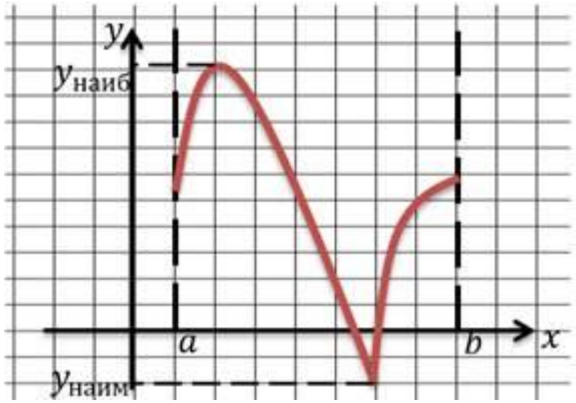
Для того, чтобы избежать построения графика функции воспользуемся следующими утверждениями.

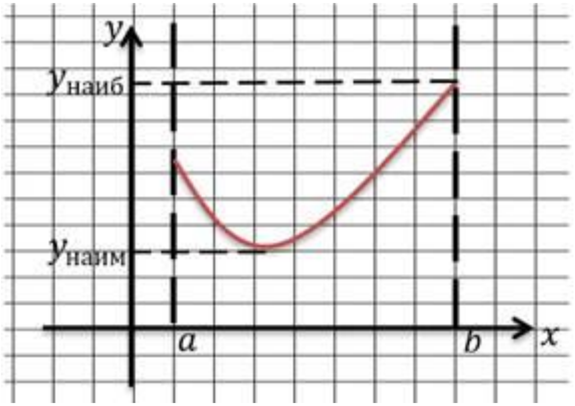
1. **Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на нем и своего наибольшего, и своего наименьшего значений.**

2. Наибольшего и наименьшего значений непрерывная функция может достигать как на концах отрезка, так и внутри него.

3. Если наибольшее или наименьшее значение достигается внутри отрезка, то только в стационарной или критической точке.

Это утверждение можно проиллюстрировать графиками функций.





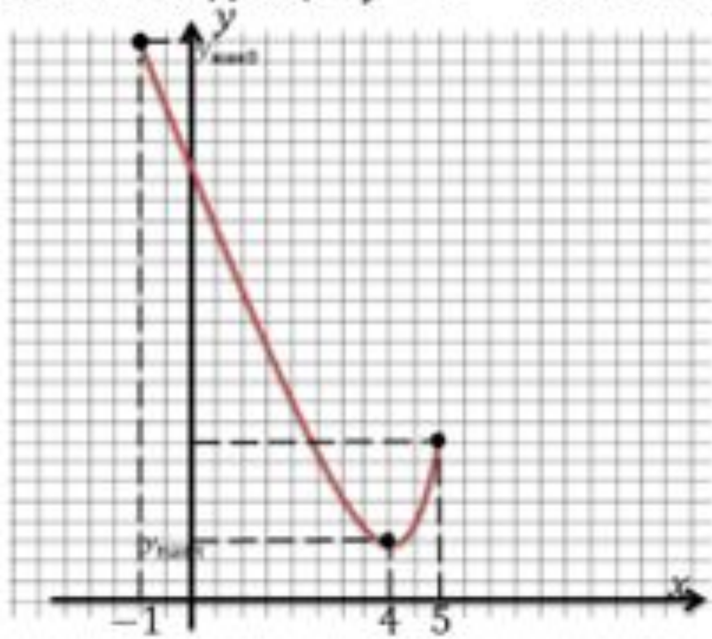
Видно, что на первом графике наибольшее и наименьшее значения достигаются во внутренних точках. На втором графике наибольшее значение достигается в конце промежутка, а наименьшее значение достигается во внутренней точке.

Алгоритм нахождения наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции y = *f(x)* на отрезке [*a*; *b*].

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти стационарные и критические точки функции, лежащие внутри отрезка $[a; b]$.
3. Вычислить значения функции $y = f(x)$ в найденных точках и в точках a и b; выбрать среди этих значений наименьшее (это будет $y_{\text{наим}}$) и наибольшее (это будет $y_{\text{наиб}}$).

Пример

Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^2 - 8x + 19$ на отрезке $[-1; 5]$.



Решение:

$f'(x) = 2x - 8$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$

$4 \in [-1; 5]$

$f(-1) = 28 = y_{наиб}$

$f(5) = 4$

$f(4) = 3 = y_{наим}$

Надо найти наибольшее и наименьшее значения на незамкнутом интервале

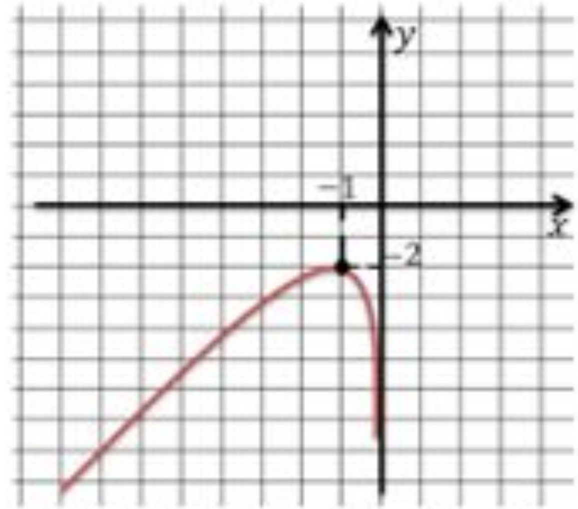
Теорема.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри него единственную стационарную или критическую точку $x = x_0$. Тогда:

- а) если $x = x_0$ – точка максимума, то $y_{наиб} = f(x_0)$;
- б) если $x = x_0$ – точка минимума, то $y_{наим} = f(x_0)$.

Пример

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x + \frac{1}{x}$ на промежутке $(-\infty; 0)$.

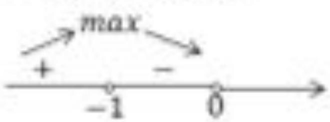


Решение:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$-1 \in (-\infty; 0)$$



$$f(-1) = -2 = y_{\text{наиб}}$$

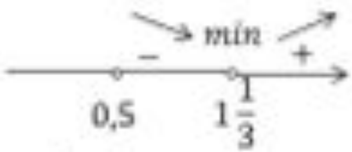
Пример

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 2x^2 + 1$ на $[0{,}5;\ +\infty)$.

Решение:

$f'(x) = 3x^2 - 4x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(3x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ или $x = 1\frac{1}{3}$



$$f\left(1\frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{27} = y_{\text{наим}}$$

Задание

- № 22.2(а), 22.3(а)