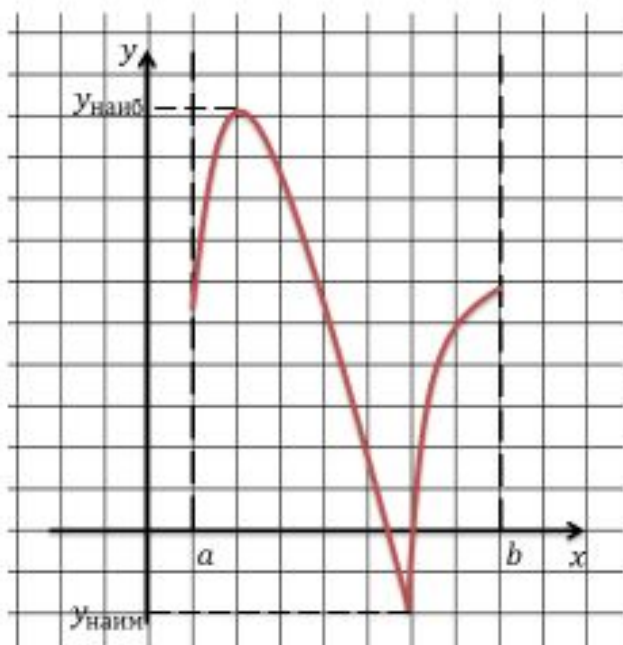


Наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции на промежутке

10 класс



Пусть у нас есть график некоторой функции $f(x)$ на промежутке $[a; b]$. По графику легко найти наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке. Иногда наибольшее и наименьшее значения можно отыскать и без построения графика.



$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

$$\sqrt{4 - x^2} \geq 0 \Rightarrow y_{\text{наим}} = y(-2) = y(2) = 0$$

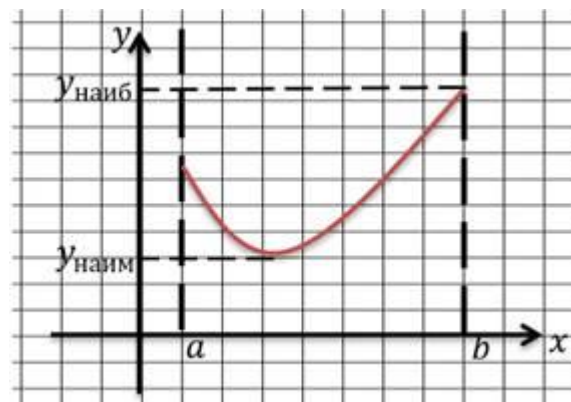
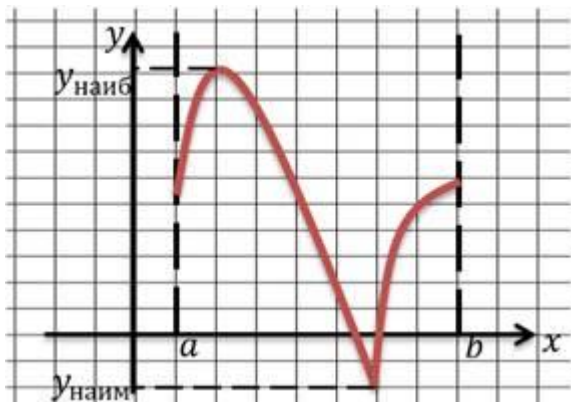
$$\sqrt{4 - x^2} \leq 4 \Rightarrow y_{\text{наиб}} = y(0) = 2$$



Для того, чтобы избежать построения графика функции воспользуемся следующими утверждениями.

- 1. Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на нем и своего наибольшего, и своего наименьшего значений.**
- 2. Наибольшего и наименьшего значений непрерывная функция может достигать как на концах отрезка, так и внутри него.**
- 3. Если наибольшее или наименьшее значение достигается внутри отрезка, то только в стационарной или критической точке.**

Это утверждение можно проиллюстрировать графиками функций.



Видно, что на первом графике наибольшее и наименьшее значения достигаются во внутренних точках. На втором графике наибольшее значение достигается в конце промежутка, а наименьшее значение достигается во внутренней точке.



Алгоритм нахождения наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти стационарные и критические точки функции, лежащие внутри отрезка $[a; b]$.
3. Вычислить значения функции $y = f(x)$ в найденных точках и в точках a и b ; выбрать среди этих значений наименьшее (это будет $y_{\text{наим}}$) и наибольшее (это будет $y_{\text{наиб}}$).

Пример

Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^2 - 8x + 19$ на отрезке $[-1; 5]$.

Решение:

$$f'(x) = 2x - 8$$

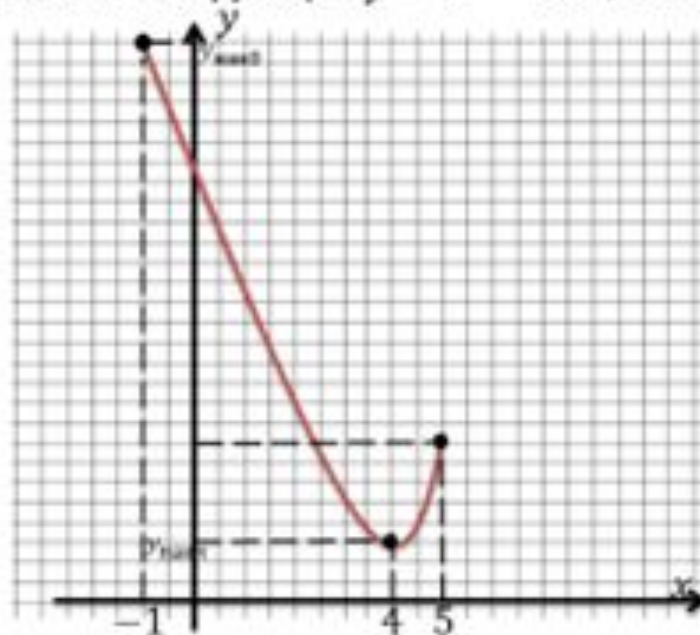
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

$$4 \in [-1; 5]$$

$$f(-1) = 28 = y_{\text{наиб}}$$

$$f(5) = 4$$

$$f(4) = 3 = y_{\text{наим}}$$





Надо найти наибольшее и наименьшее значения на незамкнутом интервале

Теорема.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри него единственную стационарную или критическую точку $x = x_0$. Тогда:

- а) если $x = x_0$ – точка максимума, то $y_{\text{наиб}} = f(x_0)$;
- б) если $x = x_0$ – точка минимума, то $y_{\text{наим}} = f(x_0)$.

Пример

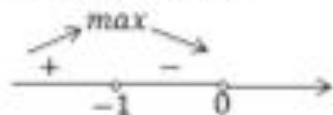
Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x + \frac{1}{x}$ на промежутке $(-\infty; 0)$.

Решение:

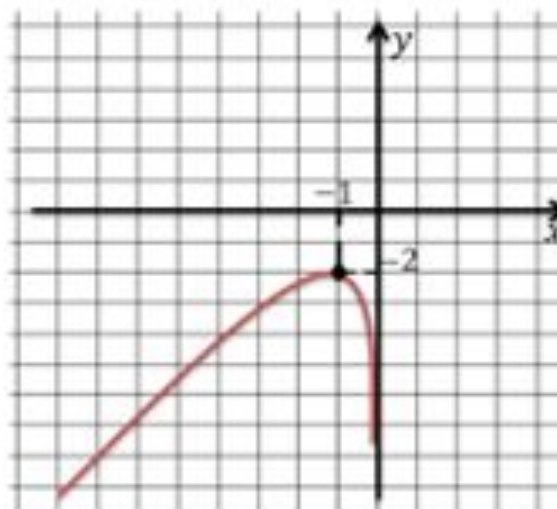
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$-1 \in (-\infty; 0)$$



$$f(-1) = -2 = y_{\text{наиб}}$$





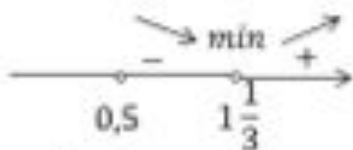
Пример

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 2x^2 + 1$ на $[0,5; +\infty)$.

Решение:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(3x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ или } x = 1\frac{1}{3}$$



$$f\left(1\frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{27} = y_{\text{наим}}$$



Задание

- № 22.2(а), 22.3(а)