

# Понятие матрица

**Определение.** Таблица, составленная из  $m \times n$  чисел называется матрицей размерности  $m \times n$ ,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = A = \left\| a_{ij} \right\|$$

$m$  – число строк,  $n$  – число столбцов.

$m \times n$  – размер матрицы.

Числа  $a_{ij}$  называются **элементами матрицы**,  $i$  – номер строки,  $j$  – номер столбца, на пересечении которых стоит элемент.

# Виды матриц

**Опр:** Две матрицы, имеющие одинаковую размерность  $m \times n$ , называются **матрицами одного типа**

1. Если  $m \neq n$ , то матрица называется

**прямоугольной**.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Если  $m = n$ , то матрица называется **квадратной**  $n$ -го порядка.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

А). Квадратная матрица называется **диагональной**, если все ее элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Б) Квадратная матрица называется **единичной**, если элементы диагональной матрицы, стоящие на главной диагонали равны единице.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**В)** Квадратная матрица называется **треугольной**, если все элементы матриц, расположенные выше или ниже главной диагонали равны нулю.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

3. Матрица называется **матрицей - строкой**, если  $m=1$

$$D = (-1 \quad 0 \quad 2 \quad 5)$$

4. Матрица называется **матрицей - столбцом**, если  $n=1$

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

5. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой матрицей**.

- **Равенство матриц.** Две матрицы  $A_{m \times n}$  и  $B_{m \times n}$  одинаковой размерности равны, если равны соответствующие элементы этих матриц.

$$A_{m \times n} = B_{m \times n} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$$

# Линейные операции над

## матрицами

Линейные операции – это сложение, вычитание, умножение на число.

- **Сложение и вычитание матриц.**

Складывать и вычитать можно только матрицы одинакового размера.

Чтобы сложить (или вычесть) две матрицы надо сложить (вычесть) попарно их соответствующие элементы.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & \dots & b_{kn} \end{pmatrix} \quad A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} \pm b_{k1} & \dots & a_{kn} \pm b_{kn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

**Задание: Сложите и вычтите матрицы**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

**Умножение матрицы на число.** Для того чтобы умножить матрицу на число , надо каждый элемент матрицы умножить на это число.

$$\alpha \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & \dots & b_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha b_{11} & \dots & \alpha b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha b_{k1} & \dots & \alpha b_{kn} \end{pmatrix}$$

$$3 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 5 & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 15 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad 4A = \begin{pmatrix} 4 & -24 & 16 \\ 0 & 12 & -8 \end{pmatrix}$$

Линейные операции над матрицами обладают свойствами, схожими со свойствами арифметических операций над действительными числами:

### **СВОЙСТВА**

$$A+B = B+A$$

$$(A+B) + C = A + (B+C)$$

$$\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$$

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$$

свойства выполнимы для любых матриц  $A, B, C$  и любых действительных чисел  $\alpha, \beta$

# Транспонирование матриц.

Операция транспонирования меняет местами строки и столбцы, превращая матрицы размера  $(k \times n)$  в матрицы  $(n \times k)$ .

Обозначается символом  $A^T$ .

**Замечание:**  $(A^T)^T = A$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(1 \ 2 \ 3)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

## Умножение двух матриц.

Чтобы умножить две матрицы, нужно все элементы  $i$ -ой строки левой матрицы попарно перемножить с соответствующими элементами  $j$ -го столбца правой матрицы, все произведения сложить и полученную сумму записать в новую матрицу на место элемента, стоящего на пересечении  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца.

По правилу «Строка на столбец».

**Замечание 1.** Из этого определения следует, что умножать можно матрицы, у которых число столбцов левой матрицы  $[m \times s]$  равно числу строк правой матрицы  $[s \times n]$ . В результате получается матрица размерности  $m \times n$ .

**Замечание 2.** Не для всех матриц выполняется свойство, в основном  $AB \neq BA$ . Матрицы, для которых выполняется свойство  $AB=BA$  называются коммутативными.

**Пример.** Вычислить  $A \cdot B$ , ¶

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{pmatrix} ¶$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -3 & 11 \\ 14 & 4 & -6 & 22 \\ 11 & 11 & 1 & 13 \end{pmatrix} ¶$$

$$C_{11} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 7; \quad C_{12} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) = 2 \quad C_{13} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) = -3 \quad C_{14} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11$$

$$C_{21} = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 14; \quad C_{22} = 2 \cdot 4 + 4 \cdot (-1) = 4 \quad C_{23} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) = -6 \quad C_{24} = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 22$$

$$C_{31} = 3 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 11 \quad C_{32} = 3 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) = 11 \quad C_{33} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 1 \quad C_{34} = 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 13$$

**Пример.** Найти произведения двух матриц  $A \cdot B$  и  $B \cdot A$ . Сравните эти произведения, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Самостоятельно!