Понятие матрица

Определение. Таблица, составленная из m×n чисел называется матрицей размерности m×n,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = A = \left\| a_{ij} \right\|$$

m – число строк, n – число столбцов.
m x n – размер матрицы.

Числа a_{ij} называются **элементами матрицы**, *i*- номер строки, *j* – номер столбца, на пересечении которых стоит элемент.

Виды матриц

Опр: Две матрицы, имеющие одинаковую размерность m×n, называются ***матрицами одного типа***

1. Если m≠n, то матрица называется ***прямоугольной***.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Если m=n, то матрица называется ***квадратной*** n-го порядка.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

А). Квадратная матрица называется ***диагональной***, если все ее элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Б) Квадратная матрица называется ***единичной***, если элементы диагональной матрицы, стоящие на главной диагонали равны единице.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В) Квадратная матрица называется ***треугольной***, если все элементы матриц, расположенные выше или ниже главной диагонали равны нулю.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

3. Матрица называется ***матрицей - строкой***, если m=1

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Матрица называется ***матрицей - столбцом***, если n=1

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

5. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется ***нулевой матрицей***.

- **Равенство матриц.** Две матрицы $A_{m\times n}$ и $B_{m\times n}$ одинаковой размерности равны, если равны соответствующие элементы этих матриц.
  $A_{m\times n} = B_{m\times n} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$

Линейные операции над матрицами

Линейные операции – это сложение, вычитание, умножение на число.

- **Сложение и вычитание матриц.**

Складывать и вычитать можно только матрицы одинакового размера.

Чтобы сложить (или вычесть) две матрицы надо сложить (вычесть) попарно их соответствующие элементы.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kn} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A}\pm\mathrm{B}=\begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & \ldots & a_{1n}\pm b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1}\pm b_{k1} & \ldots & a_{kn}\pm b_{kn} \end{pmatrix}$$

:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Задание: Сложите и вычтите матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Умножение матрицы на число. Для того чтобы умножить матрицу на число , надо каждый элемент матрицы умножить на это число.

$$\alpha\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & \dots & b_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha b_{11} & \dots & \alpha b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha b_{k1} & \dots & \alpha b_{kn} \end{pmatrix}$$

$$3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot(-1) \\ 3\cdot 5 & 3\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 15 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad 4\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & -24 & 16 \\ 0 & 12 & -8 \end{pmatrix}$$

Линейные операции над матрицами обладают свойствами, схожими со свойствами арифметических операций над действительными числами:

СВОЙСТВА

$$A+B=B+A$$

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

$$\alpha\left(A+B\right)=\alpha A+\alpha B$$

$$\left(\alpha+\beta\right)A=\alpha A+\beta A$$

$$\left(\alpha\beta\right)A=\alpha\left(\beta A\right)$$

свойства выполнимы для любых матриц A, B, C и любых действительных чисел α, β

Транспонирование матриц.

Операция транспонирования меняет местами строки и столбцы, превращая матрицы размера (kxn) в матрицы (nxk).

Обозначается символом $A^т$.

Замечание: $(A^т)^т = A$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Умножение двух матриц.

Чтобы умножить две матрицы, нужно все элементы *i*-ой строки левой матрицы попарно перемножить с соответствующими элементами j-го столбца правой матрицы, все произведения сложить и полученную сумму записать в новую матрицу на место элемента, стоящего на пересечении i-ой строки и j-го столбца.

По правилу «Строка на столбец».

Замечание 1. Из этого определения следует, что умножать можно матрицы, у которых число столбцов левой матрицы [m×s] равно числу строк правой матрицы [s ×n]. В результате получается матрица размерности m×n.

Замечание 2. Не для всех матриц выполняется свойство, в основном $AB \neq BA$. Матрицы, для которых выполняется свойство $AB=BA$ называются коммутативными.

Пример. Вычислить A·B,

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 1 & 3\\ 2 & -1 & -2 & 4\end{pmatrix}\cdot\cdot C=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34}\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4 & 1 & 3\\ 2 & -1 & -2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 2 & -3 & 11\\ 14 & 4 & -6 & 22\\ 11 & 11 & 1 & 13\end{pmatrix}$$

$C_{11}=1\cdot3+2\cdot2=7$; $C_{12}=1\cdot4+2\cdot(-1)=2$ $C_{13}=1\cdot1+2\cdot(-2)=-3$ $C_{14}=1\cdot3+2\cdot4=11$

$C_{21}=2\cdot3+4\cdot2=14$; $C_{22}=2\cdot4+4\cdot(-1)=4$ $C_{23}=2\cdot1+4\cdot(-2)=-6$ $C_{24}=2\cdot3+4\cdot4=22$

$C_{31}=3\cdot3+1\cdot2=11$ $C_{32}=3\cdot4+1\cdot(-1)=11$ $C_{33}=3\cdot1+1\cdot(-2)=1$ $C_{34}=3\cdot3+1\cdot4=13$

Пример. Найти произведения двух матриц А·В и В·А.Сравните эти произведения, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Самостоятельно!