

# Действительный анализ

*Основной источник : Смагин В.В.  
Действительный анализ. Учебное пособие.  
2014 год.*

( см. [https://vk.com/fd\\_an](https://vk.com/fd_an) )

## *Дополнительная литература*

- 1. Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л. Интеграл, мера и производная, 1967 г.*
- 2. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу, 1979 г.*
- 3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, 1976 г.*

*( см. [https://vk.com/fd\\_an](https://vk.com/fd_an) и [https://vk.com/func\\_an](https://vk.com/func_an) )*

# Глава 1. Интеграл Лебега

*(продолжение)*

# **11. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла**

В данном разделе рассмотрим условия выполнения немонотонного предельного перехода под знаком интеграла.

ТЕОРЕМА (ЛЕБЕГА) 8. Пусть последовательность функций  $\{x_n\} \subset L[a, b]$  такая, что  $x_n(t) \xrightarrow{\text{п.в.}} x(t)$  при  $n \rightarrow \infty$  и  $(\exists x_0 \in L)(\forall n \in \mathbb{N})[|x_n(t)| \stackrel{\text{п.в.}}{\leq} x_0(t)]$ . Тогда функция  $x \in L$  и

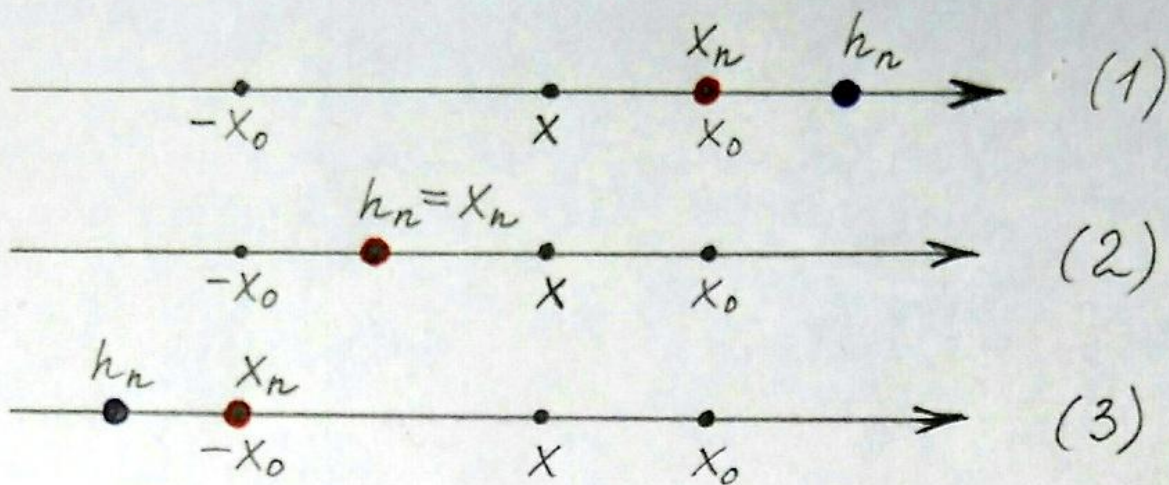
$$Ix = \lim_{n \rightarrow \infty} Ix_n.$$

(Без доказательства)

**СЛЕДСТВИЕ 1.** Пусть функция  $x(t)$  измерима на  $[a, b]$  и существует функция  $x_0 \in L[a, b]$  такая, что  $|x(t)| \leq x_0(t)$  п.в. на  $[a, b]$ . Тогда  $x \in L[a, b]$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Из следствия 1, в частности, вытекает, что всякая ограниченная измеримая функция является суммируемой.

*Доказательство.* Пусть  $\{h_n(t)\}$  — последовательность ступенчатых функций, такая, что  $h_n(t) \rightarrow x(t)$  при  $n \rightarrow \infty$  п.в. на  $[a, b]$ . Построим новую последовательность  $\{x_n(t)\}$ , удовлетворяющую условиям теоремы Лебега. Определим функции 
$$x_n(t) = \max\{-x_0(t), \min\{h_n(t), x_0(t)\}\}.$$



$$x_n(t) = \begin{cases} x_0(t), & \text{если } h_n(t) > x_0(t), \\ h_n(t), & \text{если } |h_n(t)| \leq x_0(t), \\ -x_0(t), & \text{если } h_n(t) < -x_0(t). \end{cases}$$

н.в.

Итак,  $|x_n(t)| \leq x_0(t) \Rightarrow$  3-е условие  
теоремы Лебега выполняется.

$$|x_n(t) - x(t)| \leq |h_n(t) - x(t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x(t)$  н.в. на  $[a, b]$  (2-е условие)

Очевидно, что функции  $x_n \in L$  (в силу свойств суммируемых функций) и п.в. на  $[a, b]$  справедлива оценка  $|x_n(t)| \leq x_0(t)$  (см. рисунок).

При  $n \rightarrow \infty$  получим  
$$x_n(t) \rightarrow \max\{-x_0(t), \min\{x(t), x_0(t)\}\} = x(t).$$

Итак, выполнены все три условия теоремы Лебега. Следовательно,  $x \in L$ .

Следствие доказано.



СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть  $\{x_n(t)\}$  — последовательность измеримых на  $[a, b]$  функций, такая, что  $x_n(t) \rightarrow x(t)$  при  $n \rightarrow \infty$  п.в. на  $[a, b]$  и функция  $x(t)$  конечна п.в. на  $[a, b]$ . Тогда функция  $x(t)$  измерима на  $[a, b]$ .

*Доказательство.* Определим функции

$$y_n(t) = \frac{x_n(t)}{1 + |x_n(t)|}.$$

Функция  $y_n(t)$  измерима (как отношение двух измеримых функций) и ограничена:  $|y_n(t)| < 1$ . Тогда функции  $y_n \in L$  (по следствию 1). При  $n \rightarrow \infty$  получим:

$$y_n(t) \rightarrow \frac{x(t)}{1 + |x(t)|} = y(t).$$

Выполнены все три условия теоремы Лебега. Следовательно,  $y \in L$ , в частности, функция  $y(t)$  измерима. Так как функция  $x(t)$  конечна п.в. на  $[a, b]$ , то  $|y(t)| < 1$  п.в. на  $[a, b]$ . Тогда п.в. на  $[a, b]$  (с учетом того, что знаки  $x$  и  $y$  совпадают) функция

$$x(t) = \frac{y(t)}{1 - |y(t)|}$$

и, следовательно,  $x(t)$  измерима (как отношение двух измеримых функций).

Следствие доказано.

ТЕОРЕМА (ФАТУ) 9. Пусть последовательность функций  $\{x_n\} \subset L[a, b]$  такая, что все функции  $x_n(t) \geq 0$  и  $x_n(t) \rightarrow x(t)$  при  $n \rightarrow \infty$  п.в. на  $[a, b]$ . Кроме того,  $(\exists c)(\forall n \in \mathbb{N})[Ix_n \leq c]$ . Тогда функция  $x \in L[a, b]$  и  $0 \leq Ix \leq c$ .

(Без доказательства).