Действительный анализ

Основной источник : *Смагин В.В. Действительный анализ. Учебное пособие. 2014 год.*

(см. https://vk.com/fd_an)

Дополнительная литература

1. *Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л. Интеграл, мера и производная, 1967 г.*
2. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу, 1979 г.*
3. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, 1976 г.*

(см. https://vk.com/fd_an и https://vk.com/func_an)

Глава 1.
Интеграл Лебега

(продолжение)

11. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

В данном разделе рассмотрим условия выполнения немонотонного предельного перехода под знаком интеграла.

Теорема (Лебега) 8. *Пусть последовательность функций* $\{x_n\} \subset L[a,b]$ *такая, что* $x_n(t) \overset{\text{п.в.}}{\to} x(t)$ *при* $n \to \infty$ *и* $(\exists x_0 \in L)(\forall n \in \mathbb{N})[\,|x_n(t)| \overset{\text{п.в.}}{\leq} x_0(t)]$. *Тогда функция* $x \in L$ *и*

$$Ix = \lim_{n \to \infty} Ix_n.$$

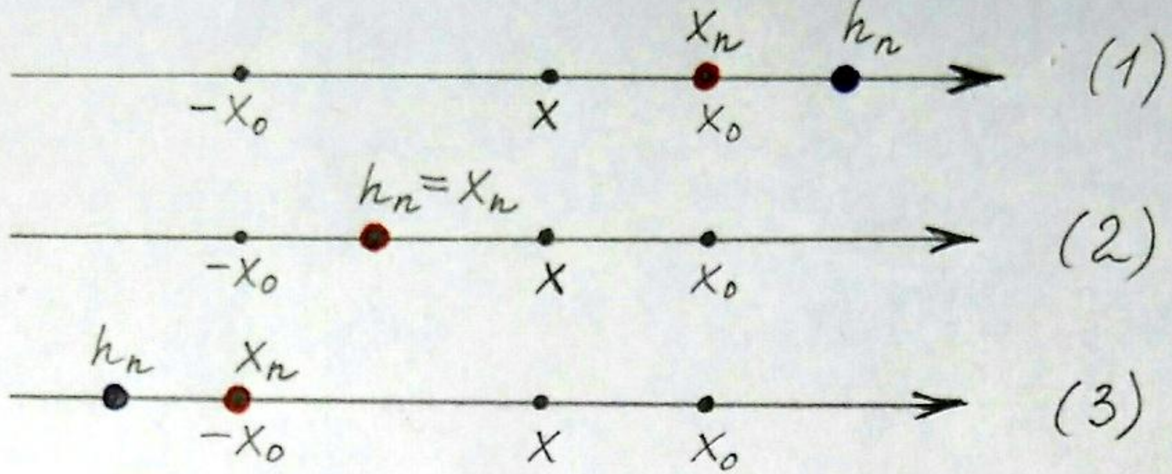
(Без доказательства)

Следствие 1. *Пусть функция $x(t)$ измерима на $[a, b]$ и существует функция $x_0 \in L[a, b]$ такая, что $|x(t)| \le x_0(t)$ п.в. на $[a, b]$. Тогда $x \in L[a, b]$.*

Замечание. Из следствия 1, в частности, вытекает, что всякая ограниченная измеримая функция является суммируемой.

Доказательство. Пусть $\{h_n(t)\}$ – последовательность ступенчатых функций, такая, что $h_n(t) \to x(t)$ при $n \to \infty$ п.в. на $[a, b]$. Построим новую последовательность $\{x_n(t)\}$, удовлетворяющую условиям теоремы Лебега. Определим функции

$x_n(t) = \max\{-x_0(t), \min\{h_n(t), x_0(t)\}\}$.



$$x_n(t)=\begin{cases} x_0(t), & \text{если } h_n(t)>x_0(t),\\ h_n(t), & \text{если } |h_n(t)|\le x_0(t),\\ -x_0(t), & \text{если } h_n(t)<-x_0(t).\end{cases}$$

Итак, $|x_n(t)| \overset{\text{п.в.}}{\le} x_0(t) \Rightarrow$ 3-е условие теоремы Лебега выполнено.

$|x_n(t)-x(t)| \le |h_n(t)-x(t)| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n(t) \xrightarrow{n\to\infty} x(t)$ п.в. на $[a,b]$ (2-е условие)

Очевидно, что функции $x_n \in L$ (в силу свойств суммируемых функций) и п.в. на $[a, b]$ справедлива оценка $|x_n(t)| \le x_0(t)$ (см. рисунок).

При $n \to \infty$ получим
$x_n(t) \to \max\{-x_0(t), \min\{x(t), x_0(t)\}\} = x(t)$.

Итак, выполнены все три условия теоремы Лебега. Следовательно, $x \in L$.

Следствие доказано.

Следствие 2. *Пусть* $\{x_n(t)\}$ – *последовательность измеримых на* $[a,b]$ *функций, такая, что* $x_n(t) \to x(t)$ *при* $n \to \infty$ *п.в. на* $[a,b]$ *и функция* $x(t)$ *конечна п.в. на* $[a,b]$. *Тогда функция* $x(t)$ *измерима на* $[a,b]$.

Доказательство. Определим функции

$$y_n(t) = \frac{x_n(t)}{1 + |x_n(t)|}.$$

Функция $y_n(t)$ измерима (как отношение двух измеримых функций) и ограничена: $|y_n(t)| < 1$. Тогда функции $y_n \in L$ (по следствию 1). При $n \to \infty$ получим:

$$y_n(t) \to \frac{x(t)}{1 + |x(t)|} = y(t).$$

Выполнены все три условия теоремы Лебега. Следовательно, $y \in L$, в частности, функция $y(t)$ измерима. Так как функция $x(t)$ конечна п.в. на $[a, b]$, то $|y(t)| < 1$ п.в. на $[a, b]$. Тогда п.в. на $[a, b]$ (с учетом того, что знаки x и y совпадают) функция

$$x(t) = \frac{y(t)}{1 - |y(t)|}$$

и, следовательно, $x(t)$ измерима (как отношение двух измеримых функций).

Следствие доказано.

Теорема (Фату) 9. *Пусть последовательность функций* $\{x_n\} \subset L[a,b]$ *такая, что все функции* $x_n(t) \geq 0$ *и* $x_n(t) \to x(t)$ *при* $n \to \infty$ *п.в. на* $[a,b]$. *Кроме того,* $(\exists\, c)(\forall\, n \in \mathbb{N})[\, Ix_n \leq c\,]$. *Тогда функция* $x \in L[a,b]$ *и* $0 \leq Ix \leq c$.

(Без доказательства).