

Действительный анализ

*Основной источник : Смагин В.В.
Действительный анализ. Учебное пособие.
2014 год.*

(см. https://vk.com/fd_an)

Дополнительная литература

- 1. Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л. Интеграл, мера и производная, 1967 г.*
- 2. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу, 1979 г.*
- 3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, 1976 г.*

(см. https://vk.com/fd_an и https://vk.com/func_an)

Глава 1. Интеграл Лебега

(продолжение)

11. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

В данном разделе рассмотрим условия выполнения немонотонного предельного перехода под знаком интеграла.

ТЕОРЕМА (ЛЕБЕГА) 8. Пусть последовательность функций $\{x_n\} \subset L[a, b]$ такая, что $x_n(t) \xrightarrow{\text{п.в.}} x(t)$ при $n \rightarrow \infty$ и $(\exists x_0 \in L)(\forall n \in \mathbb{N})[|x_n(t)| \stackrel{\text{п.в.}}{\leq} x_0(t)]$. Тогда функция $x \in L$ и

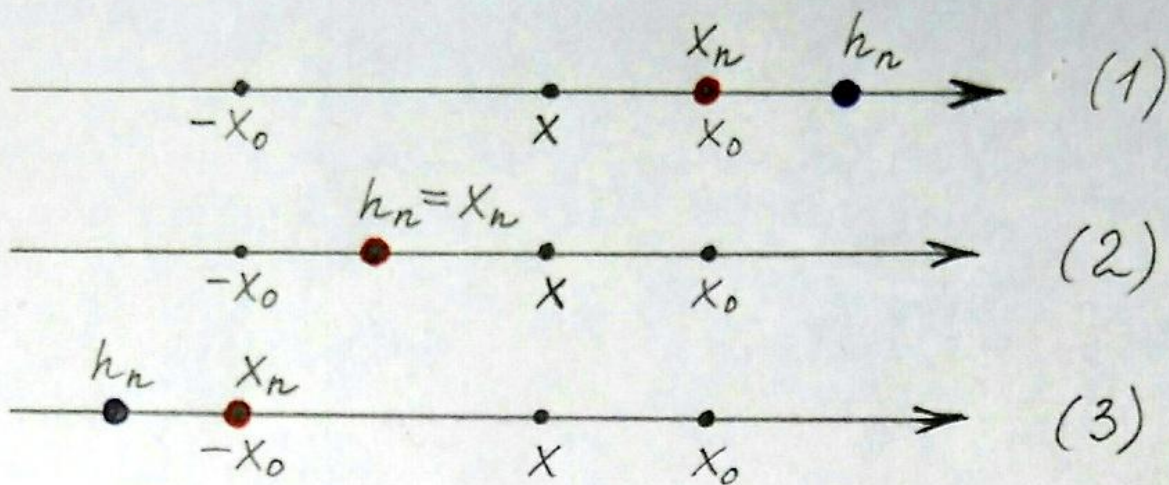
$$Ix = \lim_{n \rightarrow \infty} Ix_n.$$

(Без доказательства)

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть функция $x(t)$ измерима на $[a, b]$ и существует функция $x_0 \in L[a, b]$ такая, что $|x(t)| \leq x_0(t)$ п.в. на $[a, b]$. Тогда $x \in L[a, b]$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из следствия 1, в частности, вытекает, что всякая ограниченная измеримая функция является суммируемой.

Доказательство. Пусть $\{h_n(t)\}$ — последовательность ступенчатых функций, такая, что $h_n(t) \rightarrow x(t)$ при $n \rightarrow \infty$ п.в. на $[a, b]$. Построим новую последовательность $\{x_n(t)\}$, удовлетворяющую условиям теоремы Лебега. Определим функции $x_n(t) = \max\{-x_0(t), \min\{h_n(t), x_0(t)\}\}$.



$$x_n(t) = \begin{cases} x_0(t), & \text{если } h_n(t) > x_0(t), \\ h_n(t), & \text{если } |h_n(t)| \leq x_0(t), \\ -x_0(t), & \text{если } h_n(t) < -x_0(t). \end{cases}$$

н.в.

Итак, $|x_n(t)| \leq x_0(t) \Rightarrow$ 3-е условие
теоремы Лебега выполняется.

$$|x_n(t) - x(t)| \leq |h_n(t) - x(t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x(t)$ н.в. на $[a, b]$ (2-е условие)

Очевидно, что функции $x_n \in L$ (в силу свойств суммируемых функций) и п.в. на $[a, b]$ справедлива оценка $|x_n(t)| \leq x_0(t)$ (см. рисунок).

При $n \rightarrow \infty$ получим

$$x_n(t) \rightarrow \max\{-x_0(t), \min\{x(t), x_0(t)\}\} = x(t).$$

Итак, выполнены все три условия теоремы Лебега. Следовательно, $x \in L$.

Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\{x_n(t)\}$ — последовательность измеримых на $[a, b]$ функций, такая, что $x_n(t) \rightarrow x(t)$ при $n \rightarrow \infty$ п.в. на $[a, b]$ и функция $x(t)$ конечна п.в. на $[a, b]$. Тогда функция $x(t)$ измерима на $[a, b]$.

Доказательство. Определим функции

$$y_n(t) = \frac{x_n(t)}{1 + |x_n(t)|}.$$

Функция $y_n(t)$ измерима (как отношение двух измеримых функций) и ограничена: $|y_n(t)| < 1$. Тогда функции $y_n \in L$ (по следствию 1). При $n \rightarrow \infty$ получим:

$$y_n(t) \rightarrow \frac{x(t)}{1 + |x(t)|} = y(t).$$

Выполнены все три условия теоремы Лебега. Следовательно, $y \in L$, в частности, функция $y(t)$ измерима. Так как функция $x(t)$ конечна п.в. на $[a, b]$, то $|y(t)| < 1$ п.в. на $[a, b]$. Тогда п.в. на $[a, b]$ (с учетом того, что знаки x и y совпадают) функция

$$x(t) = \frac{y(t)}{1 - |y(t)|}$$

и, следовательно, $x(t)$ измерима (как отношение двух измеримых функций).

Следствие доказано.

ТЕОРЕМА (ФАТУ) 9. Пусть последовательность функций $\{x_n\} \subset L[a, b]$ такая, что все функции $x_n(t) \geq 0$ и $x_n(t) \rightarrow x(t)$ при $n \rightarrow \infty$ п.в. на $[a, b]$. Кроме того, $(\exists c)(\forall n \in \mathbb{N})[Ix_n \leq c]$. Тогда функция $x \in L[a, b]$ и $0 \leq Ix \leq c$.

(Без доказательства).