Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
“Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет” (ННГАСУ)

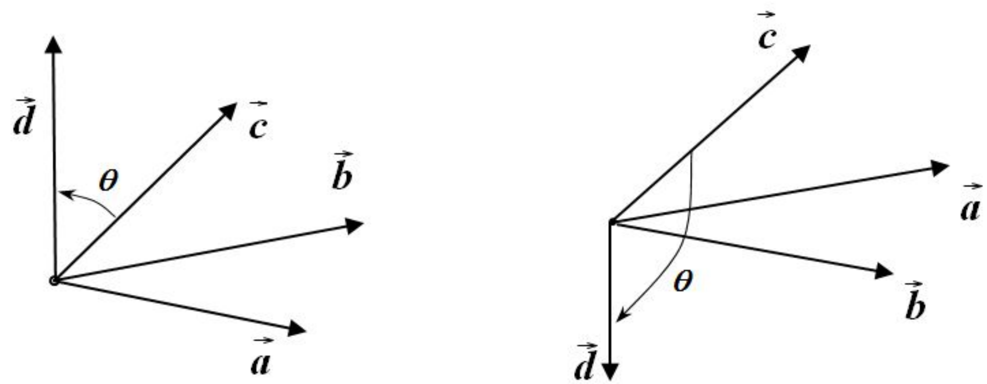
СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ
ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Лекция 3

Протасова Людмила Анатольевна
канд. физ.-мат. наук,
доцент кафедры математики ННГАСУ

Рассмотрим произведение трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, составленное следующим образом: $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$, то есть первые два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ умножаются векторно, далее полученный вектор умножается скалярно на третий вектор $\bar{c}$. В итоге получается <u>число</u>, которое называется **смешанным произведением векторов** и обозначается $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$, то есть $$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\overline{abc}.$$

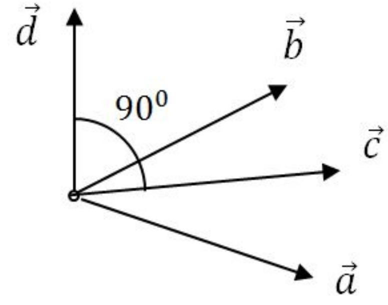
Знак смешанного произведения говорит о взаимной ориентации данных трех векторов (правую или левую тройку они образуют).



В случае правой тройки $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ вектор $\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}$ образует с вектором $\vec{c}$ острый угол θ, а в случае левой тройки – этот угол тупой. С учетом того, что $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\vec{d}\cdot\vec{c}=|\vec{d}|\cdot|\vec{c}|\cos\theta$, мы получим, что в первом случае знак смешанного произведения будет положительным, а во втором – отрицательным.

Смешанное произведение трёх векторов

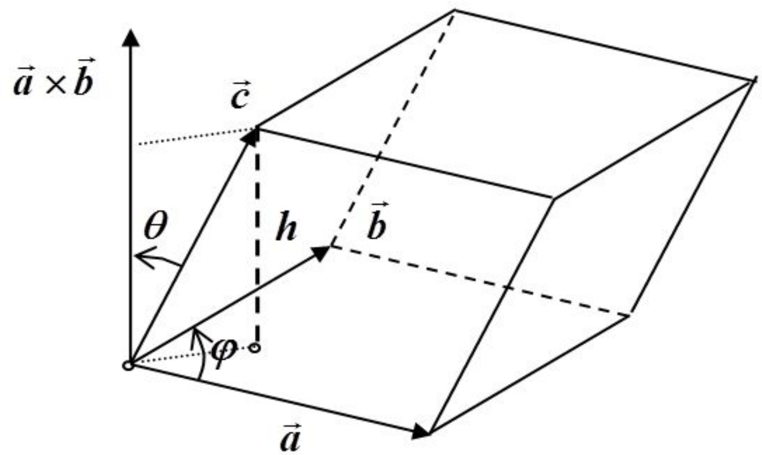
$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\theta=0$, т.е. $\theta=\pi/2$ и, следовательно, вектор $\vec{c}$ должен лежать в плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Итак, обращение в нуль смешанного произведения эквивалентно компланарности данной тройки векторов.



Три вектора компланарны $\Leftrightarrow \quad \vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$

Условие компланарности векторов

Смешанное произведение трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ представляет собой число, равное объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятое со знаком «плюс», если эти три вектора образуют правую тройку и со знаком «минус», если они образуют левую тройку векторов.



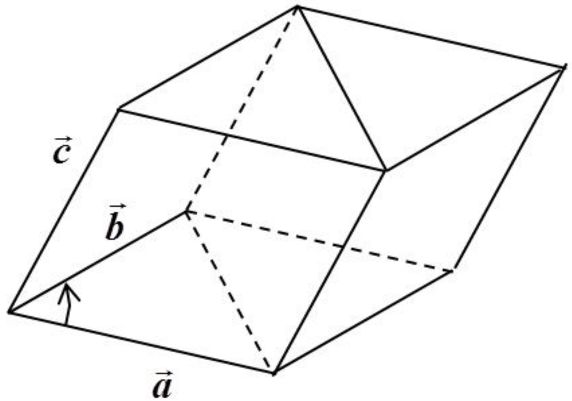
$$V = S_{пар}h = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\sin\varphi|\cdot h = |\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot|\cos\theta| = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$$

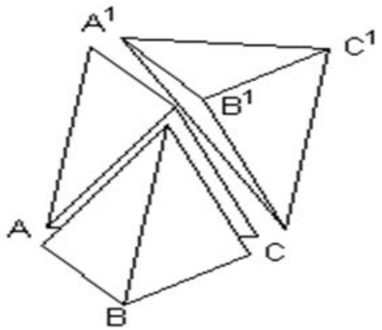
V – объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Итак, смешанное произведение некомпланарных векторов по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Объём параллелепипеда

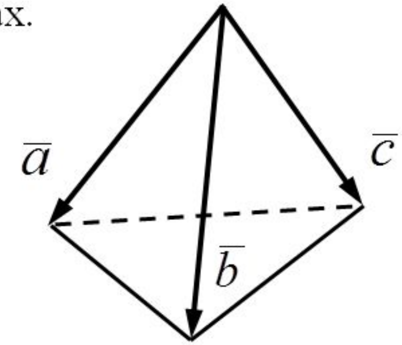
Задачу вычисления объема пирамиды сведем к вычислению объема параллелепипеда. Для этого разделим параллелепипед диагональным сечением на две равновеликих призмы. В свою очередь каждую из полученных призм можно разделить на три равновеликих пирамиды.





Таким образом, объем пирамиды равен 1/6 от объема параллелепипеда, построенного на этих же векторах.

$$V_{пир} = \frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$$



Объём пирамиды

$$\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\} \qquad \vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\} \qquad \vec{c} = \{x_3; y_3; z_3\}$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Вычисление смешанного произведения в координатах

Пример. Найти объем пирамиды, построенной на векторах $\bar{a} = \{1; 2; 3\}$, $\bar{b} = \{0; 1; -1\}$ и $\bar{c} = \{0; -1; 0\}$.

Решение.

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 - 0 - 0 - 1 - 0 = -1.$$

Тогда $V_{пир.} = \frac{1}{6} \left| \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} \right| = \frac{1}{6} \cdot |-1| = \frac{1}{6}$ (куб. ед.).

Ответ: $V_{пир.} = \frac{1}{6}$ (куб. ед.).

Пример

Так как линейное уравнение вида $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ означает, что скалярное произведение векторов $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $\vec{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ равно нулю, т.е. они ортогональны, то решить систему

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0 \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0 \end{cases}$$

- это значит найти такой вектор $\vec{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$, который был бы перпендикулярен к трём векторам $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, $\vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$.

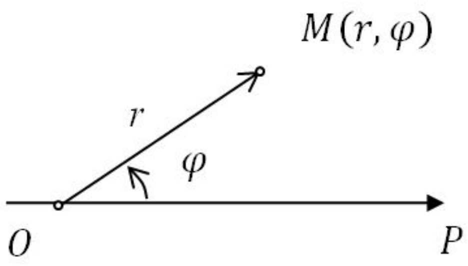
Очевидно, что такой ненулевой вектор $\vec{x}$ существует тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лежат в одной плоскости, то есть они **компланарны**. Условие компланарности этих векторов даёт равенство нулю определителя этой системы:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ - компланарны.}$$

Вывод. **Для существования <u>нетривиальных</u> решений однородной системы линейных уравнений необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю** (обосновали в трёхмерном случае).

Решение однородной системы линейных уравнений

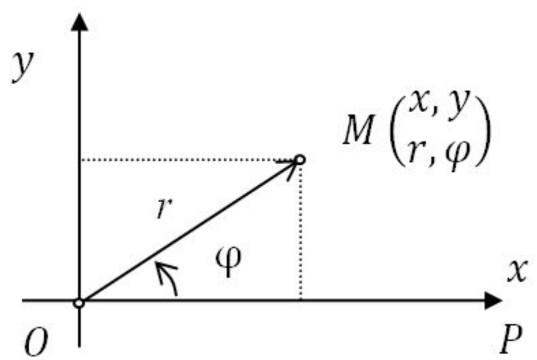
Пусть на плоскости зафиксирована точка $\boldsymbol{O}$ (полюс) и выбран луч (полярная ось $\overrightarrow{\boldsymbol{OP}}$) с началом в полюсе.



Тогда положение произвольной точки $\boldsymbol{M}$ на плоскости можно однозначно охарактеризовать двумя числами $(\boldsymbol{r},\varphi)$, где $\boldsymbol{r} = |\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}|$ – расстояние этой точки от полюса и φ – угол между полярной осью и вектором $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}$, отсчитываемый от полярной оси против часовой стрелки. Полярный радиус для любой точки определяется однозначно (всегда $\boldsymbol{r} \geq 0$), а полярный угол – с точностью до $2\pi n$, где n – целое число.

Полярная система координат

Выберем на плоскости две системы координат – декартову прямоугольную и полярную – так, что полюс находится в начале декартовой системы координат, а полярная ось направлена вдоль положительного направления оси абсцисс. Тогда любая точка $\boldsymbol{M}$ будет иметь декартовы координаты $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ и полярные $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\varphi})$.



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases},$$

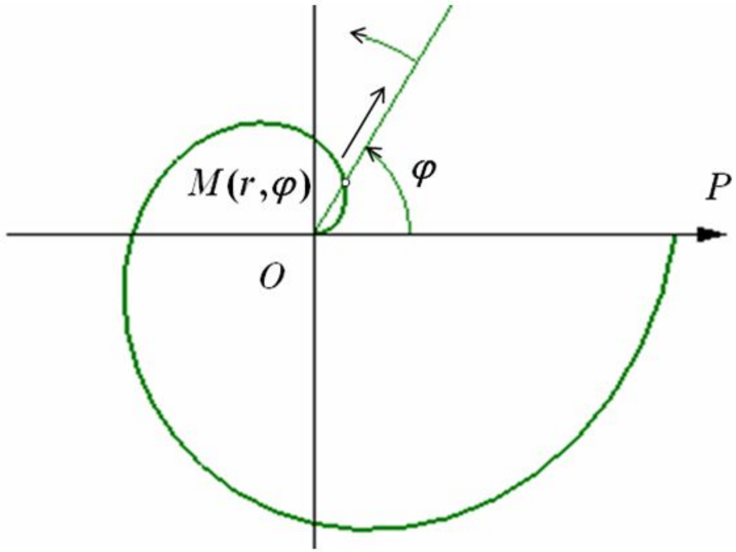
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\,\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}.$$

Получили соотношения между полярными и декартовыми координатами (предполагается, что линейный масштаб одинаковый в обеих системах координат).

Соотношения между полярными и декартовыми координатами

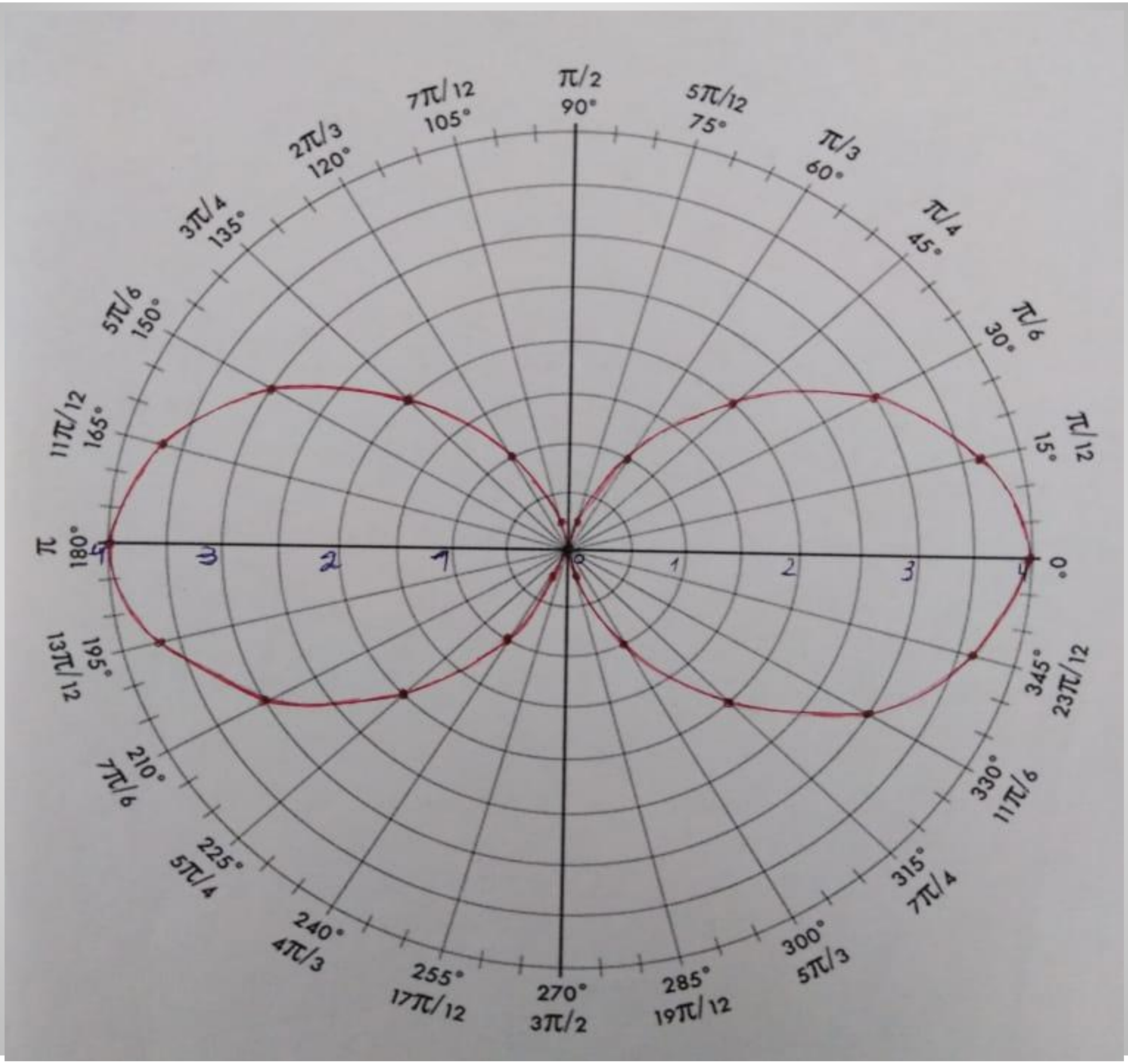
В полярной системе координат удобнее изображать кривую, расстояние точки которой от начала координат (полюса) определяется как функция направления (полярного угла). Например, так называемая «спираль Архимеда» определяется следующим образом: расстояние её точки до полюса пропорционально величине угла между полярной осью и радиус-вектором этой точки: $r = a \cdot \varphi, \quad a > 0.$

Спираль Архимеда можно рассматривать как траекторию движения точки, равномерно перемещающейся вдоль прямой, в то время как эта прямая



равномерно вращается против часовой стрелки относительно полюса. На рисунке приведена часть этой спирали, соответствующая изменению полярного угла в пределах одного оборота.

Спираль Архимеда



Координатная сетка

$\rho = 2 - \sin 3\varphi$

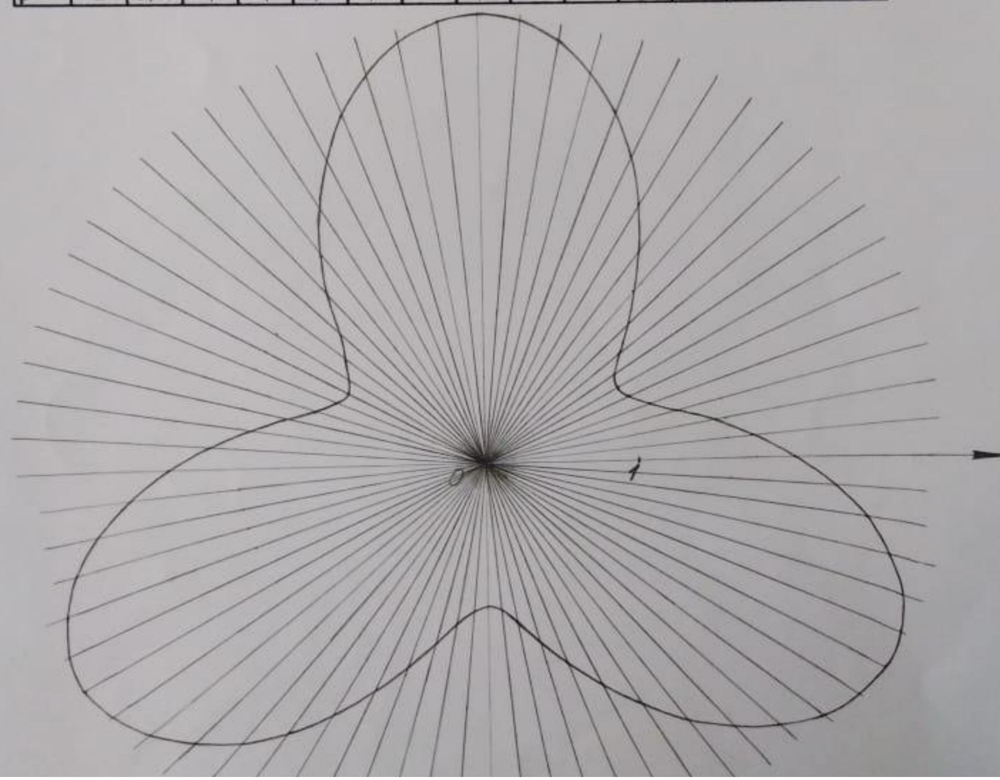
φ	0	$\frac{\pi}{36}$ 6°	$\frac{\pi}{18}$ 10°	$\frac{\pi}{12}$ 15°	$\frac{\pi}{9}$ 20°	$\frac{5\pi}{36}$ 25°	$\frac{\pi}{6}$ 30°	$\frac{7\pi}{36}$ 35°	$\frac{2\pi}{9}$ 40°	$\frac{\pi}{4}$ 45°	$\frac{5\pi}{18}$ 50°	$\frac{11\pi}{36}$ 55°	$\frac{\pi}{3}$ 60°	$\frac{13\pi}{36}$ 65°	$\frac{7\pi}{18}$ 70°
ρ	2	1,74	1,5	1,29	1,13	1,03	1	1,03	1,13	1,29	1,5	1,74	2	2,26	2,5

φ	$\frac{5\pi}{12}$ 75°	$\frac{4\pi}{9}$ 80°	$\frac{17\pi}{36}$ 85	$\frac{\pi}{2}$ 90°	$\frac{19\pi}{36}$ 95°	$\frac{5\pi}{9}$ 100°	$\frac{7\pi}{12}$ 105°	$\frac{11\pi}{18}$ 110°	$\frac{23\pi}{36}$ 115	$\frac{2\pi}{3}$ 120°	$\frac{25\pi}{36}$ 125°	$\frac{13\pi}{18}$ 130°	$\frac{3\pi}{4}$ 135°	$\frac{7\pi}{9}$ 140°	$\frac{29\pi}{36}$ 145°
ρ	2,7	2,87	2,97	3	2,97	2,87	2,7	2,5	2,26	2	1,74	1,5	1,29	1,13	1,03

φ	$\frac{5\pi}{6}$ 150°	$\frac{31\pi}{36}$ 155°	$\frac{8\pi}{9}$ 160°	$\frac{11\pi}{12}$ 165°	$\frac{17\pi}{18}$ 170°	$\frac{35\pi}{36}$ 175°	π 180°	$\frac{37\pi}{36}$ 185°	$\frac{19\pi}{18}$ 190°	$\frac{13\pi}{12}$ 195°	$\frac{10\pi}{9}$ 200°	$\frac{41\pi}{36}$ 205°	$\frac{7\pi}{6}$ 210°	$\frac{43\pi}{36}$ 215°	$\frac{11\pi}{12}$ 220°
ρ	1	1,03	1,13	1,29	1,5	1,74	2	2,26	2,5	2,7	2,87	2,97	3	2,97	2,87

φ	$\frac{5\pi}{4}$ 225°	$\frac{23\pi}{18}$ 230°	$\frac{47\pi}{36}$ 235°	$\frac{4\pi}{3}$ 240°	$\frac{49\pi}{36}$ 245°	$\frac{25\pi}{18}$ 250°	$\frac{17\pi}{12}$ 255	$\frac{13\pi}{9}$ 260°	$\frac{53\pi}{36}$ 265	$\frac{3\pi}{2}$ 270°	$\frac{55\pi}{36}$ 275	$\frac{14\pi}{9}$ 280°	$\frac{19\pi}{12}$ 285	$\frac{29\pi}{18}$ 290°	$\frac{59\pi}{36}$ 295
ρ	2,7	2,5	2,26	2	1,74	1,5	1,29	1,13	1,03	1	1,03	1,13	1,29	1,5	1,74

φ	$\frac{5\pi}{3}$ 300°	$\frac{61\pi}{36}$ 305°	$\frac{31\pi}{18}$ 310°	$\frac{7\pi}{4}$ 315°	$\frac{16\pi}{9}$ 320°	$\frac{65\pi}{36}$ 325°	$\frac{11\pi}{6}$ 330°	$\frac{67\pi}{36}$ 335	$\frac{17\pi}{18}$ 340°	$\frac{23\pi}{12}$ 345	$\frac{35\pi}{18}$ 350	$\frac{71\pi}{36}$ 355°	2π 360°		
ρ	2	2,26	2,5	2,7	2,87	2,97	3	2,97	2,87	2,7	2,5	2,26	2		



Пример

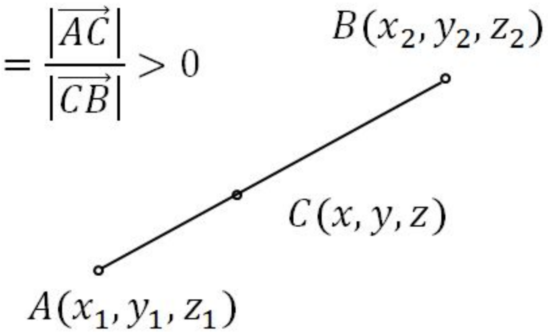
Построить кривые в полярной системе координат

01. $\rho = 4\sin 2\varphi$ 02. $\rho = 2(1+\sin\varphi)$ 03. $\rho = 3\cos 3\varphi$ 04. $\rho = 2\sin^2 2\varphi$ 05. $\rho = 3\cos^2 2\varphi$ 06. $\rho = 4\cos 2\varphi$ 07. $\rho = 3(1-\cos\varphi)$ 08. $\rho = 2(\cos\varphi + \sin\varphi)$ 09. $\rho = 6(\sin\varphi - \cos\varphi)$ 10. $\rho = 4\cos^2\varphi$ 11. $\rho = \dfrac{3}{\sin\varphi}$	12. $\rho = \dfrac{5}{\cos\varphi}$ 13. $\rho = 3(1-\sin\varphi)$ 14. $\rho = \dfrac{3}{8\cos 2\varphi}$ 15. $\rho = \dfrac{3}{5\sin 2\varphi}$ 16. $\rho = \dfrac{6}{1-\cos\varphi}$ 17. $\rho = \dfrac{5}{3-4\cos\varphi}$	18. $\rho = 4 - 2\sin 2\varphi$ 19. $\rho = 3 + \cos 2\varphi$ 20. $\rho = 2 + \cos\varphi$ 21. $\rho = 3 + 2\cos 2\varphi$ 22. $\rho = 4 - 2\sin 3\varphi$ 23. $\rho^2 = 4\cos 2\varphi$ 24. $\rho = 2(1+2\cos\varphi)$ 25. $\rho^2 \cdot \sin 2\varphi = 4$ 26. $\rho \cdot \cos\varphi = 2$ 27. $\rho = \dfrac{1}{2-2\cos\varphi}$

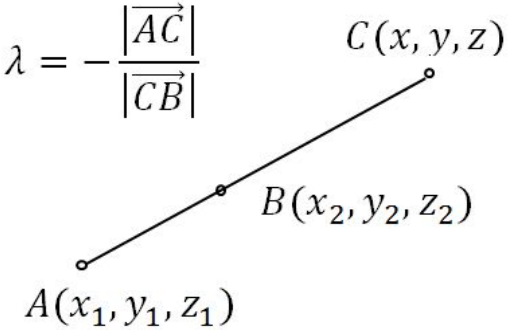
Домашнее задание

Найти координаты точки $C(x, y, z)$, которая делит отрезок, соединяющий точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ (внутренним или внешним образом), в отношении λ

$$\lambda = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|} > 0$$



$$\lambda = -\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|}$$



Векторы $\overrightarrow{AC} = \{x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1\}$ и $\overrightarrow{CB} = \{x_2 - x,\ y_2 - y,\ z_2 - z\}$ коллинеарны, то есть $\overrightarrow{AC} = \lambda\ \overrightarrow{CB}$. Запишем это векторное равенство в координатах: $x - x_1 = \lambda\ (x_2 - x)$, $y - y_1 = \lambda\ (y_2 - y)$, $z - z_1 = \lambda\ (z_2 - z)$, откуда найдем координаты точки C

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Деление отрезка в заданном отношении

Аналитическая геометрия изучает свойства геометрических образов (линий, фигур, тел, поверхностей и т.п.) с помощью метода координат. Любая точка на плоскости однозначно определяется упорядоченной парой чисел – ее декартовыми координатами. Также и вектор на плоскости задается парой своих декартовых координат. При этом в аналитической геометрии широко используется алгебра. Можно сказать, что это геометрия формул (без чертежей).

В основе применения в геометрии методов алгебры и математического анализа лежит единообразный способ задания линии – при помощи уравнения.

Пусть выбрана система координат (в плоскости или пространстве). Под **уравнением множества** S в этой системе координат мы будем понимать выражение определения S через координаты его точек, то есть высказывание, верное для координат точек, принадлежащих S, и неверное для координат точек, ему не принадлежащих.

Линия, определённая данным уравнением (в некоторой системе координат) есть геометрическое место всех точек плоскости (или пространства), координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Примеры: $x^2+y^2+1=0$ мнимая линия; $x^2+y^2=0$ точка;

$y^2-x^2=0$ пара пересекающихся прямых

Аналитическая геометрия

Положение прямой на плоскости определяется с помощью уравнения, то есть равенства, связывающего координаты точек прямой. Исследование уравнения прямой линии позволяет аналитически проводить изучение геометрических свойств прямой. Так, для того, чтобы установить, лежит ли точка $M_0(x_0;y_0)$ на прямой, достаточно проверить (не прибегая к геометрическим построениям), удовлетворяют ли координаты точки M_0 уравнению этой прямой.

Пример. Проверим, лежит ли точка $M_0(1;2)$ на прямой линии $\boldsymbol{L}$, заданной уравнением $\mathbf{3}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+\mathbf{1}=\mathbf{0}$.

Решение. Подставив в уравнение прямой $3x-y+1=0$ координаты точки M_0 вместо переменных x и y получаем: $3\cdot 1-2+1=3-1=2\neq 0$.

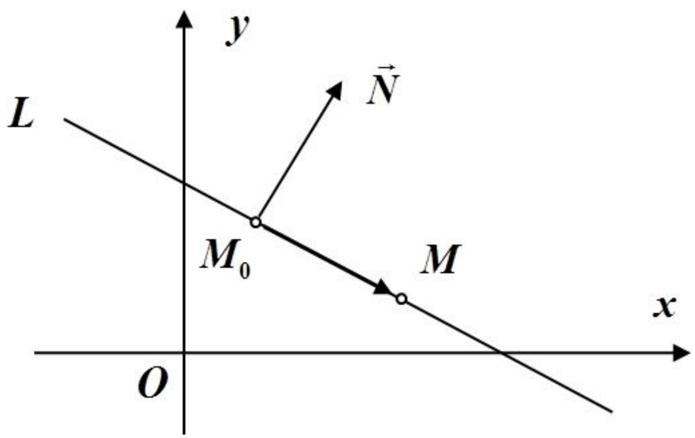
Это означает, что точка M_0 не лежит на данной прямой $\boldsymbol{L}$.

Пусть в прямоугольной декартовой системе координат на плоскости xOy задана точка $M_0(x_0;y_0)$ и вектор $\overline{N}\{A;B\}$. Требуется составить уравнение прямой $\boldsymbol{L}$, проходящей через точку M_0 и перпендикулярной вектору $\overline{N}$.

Прямая линия на плоскости

$M_0(x_0; y_0) \in L$

$\overline{N} = \{A; B\} \perp L$



Для произвольной точки $M(x, y) \in L$ векторы $\overline{M_0M} = \{\, x - x_0; y - y_0 \}$ и $\vec{N}$ перпендикулярны, т.е. их скалярное произведение обращается в ноль $\vec{N} \cdot \overline{M_0M} = 0$ или в координатах

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \qquad (1)$$

Получили **уравнение прямой** L, **проходящей через заданную точку** $M_0(x_0, y_0)$ **перпендикулярно заданному вектору** $\vec{N} = \{A, B\}$.

Раскрывая в (1) скобки, получим уравнение

$$Ax + By + C = 0, \qquad (2)$$

где для краткости обозначено $C = -Ax_0 - By_0$.

Уравнение (2) называют **общим уравнением прямой на плоскости**.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно заданному вектору

Уравнение (2) является уравнением первой степени относительно x и y.

Следовательно, мы обосновали теорему:

Теорема 1. **В декартовой системе координат любая прямая на плоскости определяется уравнением первой степени относительно переменных x и y.**

Перейдём к обратному утверждению. Рассмотрим уравнение $(\mathbf{2})$: $\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$ при условии $\boldsymbol{A^2 + B^2 \neq 0}$. Этому уравнению заведомо удовлетворяют координаты хотя бы одной точки $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$, то есть выполняется равенство $(\tilde{2})$: $\boldsymbol{Ax_0 + By_0 + C = 0}$.

Найдём разность $(\mathbf{2})$ - $(\tilde{2})$ и получим $\boldsymbol{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0}$. Это уравнение (1), определяющее прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную данному вектору.

Теорема 2. **Всякое уравнение первого порядка относительно переменных x и y вида (2) определяет в некоторой декартовой системе координат прямую линию.**

Теоремы об общем уравнении прямой

Всякий вектор, перпендикулярный прямой, называется **вектором нормали прямой**. Вектор $\overline{N}\{A;B\}$ является вектором нормали прямой $\boldsymbol{L}$.

Пример. Составить уравнение прямой линии $\boldsymbol{L}$, проходящей через точку $M_0(1;2)$ и перпендикулярной вектору $\overline{PQ}$, если $P(0;1)$ и $Q(-1;2)$.

Решение. Находим координаты вектора $\overline{PQ}$, являющегося вектором нормали прямой $\boldsymbol{L}$: $\overline{N}=\overline{PQ}=\{-1;1\}$.

Подставляя в уравнение (1) координаты точки $M_0(1;2)$ и координаты вектора $\overline{N}=\{-1;1\}$, находим искомое уравнение прямой $\boldsymbol{L}$:

$-1\cdot(x-1)+1\cdot(y-2)=0$ или $-x+y-1=0$

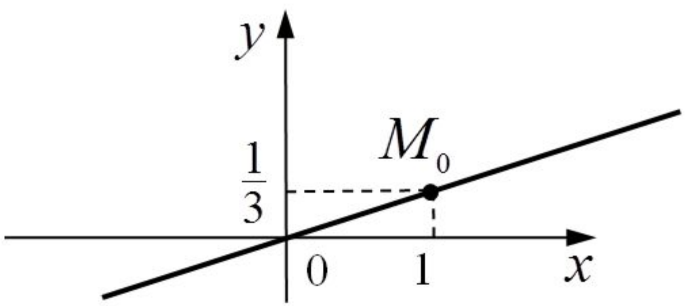
Ответ: $-x+y-1=0$.

Пример

Если $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C = 0$, то уравнение (2) примет вид $Ax + By = 0$. Это уравнение прямой, проходящей через начало координат – точку $O(0;0)$ и точку $M_0\left(1;-\frac{A}{B}\right)$.

Пример. Построить прямую $\mathbf{2x - 6y = 0}$.

Решение. Здесь $A = 2$, $B = -6$, $C = 0$. Уравнение заданной прямой является общим уравнением прямой на плоскости, проходящей через точку O и точку $M_0\left(1;\frac{1}{3}\right)$.

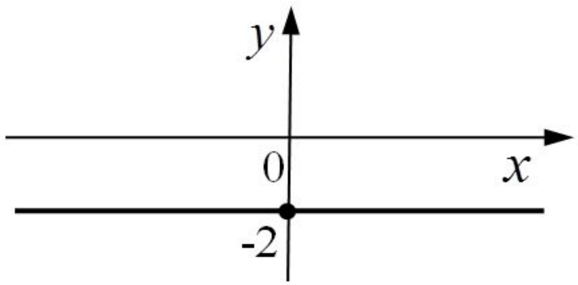


Уравнение прямой, проходящей через начало координат

Если $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, то уравнение (2) примет вид $By + C = 0$ или $y = -\dfrac{C}{B}$. Это уравнение прямой, расположенной на плоскости параллельно оси Ox и проходящей через точку $\left(0; -\dfrac{C}{B}\right)$.

Пример. Построить прямую $\mathbf{3y + 6 = 0}$.

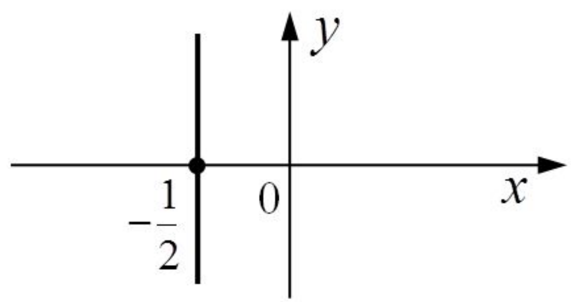
Решение. Здесь $A = 0$, $B = 3$, $C = 6$. Уравнение заданной прямой является общим уравнением прямой, расположенной на плоскости параллельно оси Ox и проходящей через точку $(0; -2)$.



Уравнение прямой, параллельной оси Ox

Если $A \neq 0$, $B = 0$, $C \neq 0$, то уравнение (2) примет вид $x = -\frac{C}{A}$. Это уравнение прямой, расположенной на плоскости параллельно оси Oy и проходящей через точку $\left(-\frac{C}{A}; 0\right)$.

Пример. Построить прямую $\mathbf{2x+1=0}$. **Решение.** Здесь $A = 2$, $B = 0$, $C = 1$. Прямая параллельна оси Oy и проходит через точку $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.



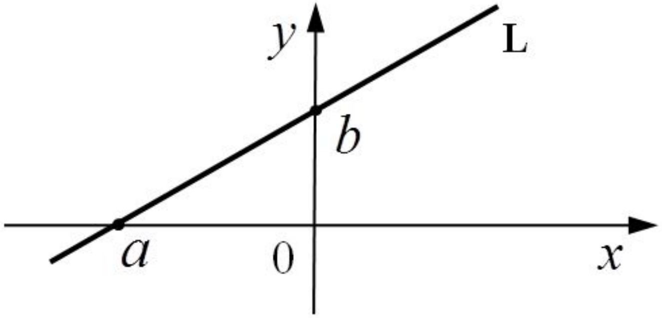
Если $A = 0$, $B \neq 0$, $C = 0$, то уравнение (2) примет вид $By = 0$ или $y = 0$. Это уравнение координатной оси Ox.
Если $A \neq 0$, $B = 0$, $C = 0$, то уравнение (2) примет вид $Ax = 0$ или $x = 0$. Это уравнение координатной оси Oy.

Уравнение прямой, параллельной оси Оу

Из (2) следует $Ax + By = -C$. Предполагая, что $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, разделим обе части этого уравнения на $-C$: $\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1$. Обозначив $a = -\frac{C}{A}$ и $b = -\frac{C}{B}$, получим **уравнение прямой линии в отрезках** вида

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (3)$$

Здесь $|a|$ и $|b|$ - величины отрезков, которые прямая «отрезает» от осей координат. Точки $(a,0)$ и $(0,b)$ – точки пересечения прямой L с осями абсцисс и ординат, соответственно.



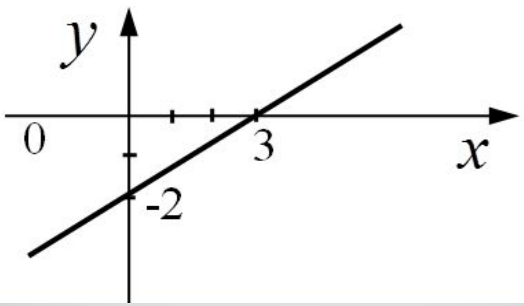
Уравнение прямой в отрезках

Пример. Составить уравнение прямой линии L, проходящей через точку $M_0(1;2)$ и отсекающей от осей координат равные отрезки.

Решение. Так как $a = b$ по условию, то уравнение (3) можно переписать в виде $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$ или $x + y = a$. Поскольку точка $M_0(1;2)$ лежит на прямой L, то, подставляя ее координаты в последнее уравнение, находим $a = 3$. Следовательно, $x + y = 3$ – уравнение искомой прямой. **Ответ:** $x + y = 3$.

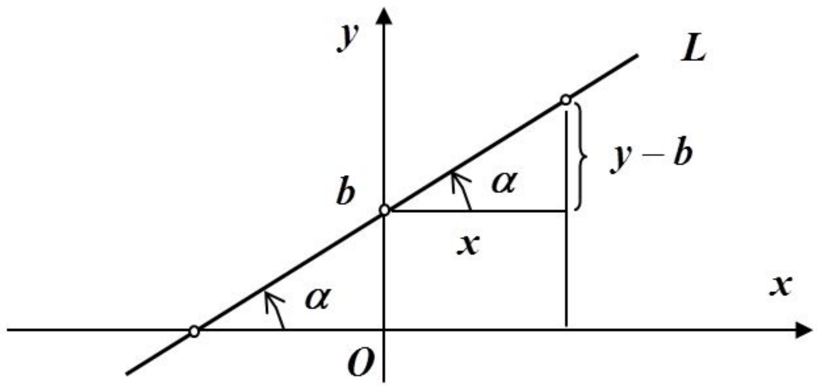
Пример. Построить прямую линию, заданную уравнением $2x - 3y - 6 = 0$.

Решение. Приведем уравнение к виду (3): $2x - 3y = 6$; $\frac{2x}{6} - \frac{3y}{6} = 1$; $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$. Отметим на оси Ox точку $x = 3$, а на оси Oy точку $y = -2$ и через эти точки проведем прямую. Это и будет искомая прямая.



Примеры

Пусть прямая L пересекает ось ординат в точке $(0,b)$ и образует с положительным направлением оси абсцисс угол α, тангенс которого обозначим через $k = tg\alpha$.



Для любой точки $M(x,y) \in L$ выполняется равенство

$$\frac{y-b}{x} = tg\alpha = k,$$

из которого следует **уравнение прямой с угловым коэффициентом**

$$y = kx + b. \qquad (4)$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1;2)$ и образующей с положительным направлением оси Ox угол 45°.

Решение. Рассмотрим уравнение прямой в виде (4): $\boldsymbol{y = kx + b}$. По условию $\alpha = 45^\circ$, значит $k = tg\alpha = tg45^\circ = 1$, следовательно $\boldsymbol{y = x + b}$. Поскольку точка $M_0(1;2)$ лежит на прямой, то подставляя в последнее уравнение ее координаты: $\boldsymbol{2 = 1 + b}$, находим $b = 1$.

Таким образом, искомое уравнение прямой имеет вид $y = x + 1$.

Ответ: $y = x + 1$.

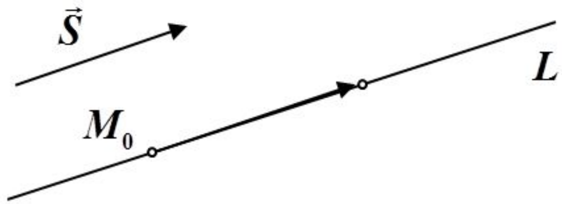
Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $\boldsymbol{L_1 : x - y + 2 = 0}$ и $\boldsymbol{L_2 : 2x + y - 5 = 0}$, и образующей с положительным направлением оси Ox угол 135°.

Решение. Координаты точки M_0 пересечения прямых и находим из системы уравнений $\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases}$. Получаем $M_0(1;3)$. По условию $\alpha = 135^\circ$, значит $k = tg135^\circ = -1$. Уравнение (4) при этом приобретает вид $\boldsymbol{y = -x + b}$. Подставляем в него $x_0 = 1$, $y_0 = 3$, находим $\boldsymbol{b = 4}$. Тем самым, искомое уравнение прямой $\boldsymbol{y = -x + 4}$.

Ответ: $x + y - 4 = 0$.

Примеры

Уравнение прямой L можно получить, задавая точку $M_0(x_0, y_0)$ и её **направляющий вектор** $\vec{S} = \{m, n\}$



Пусть $M(x, y) \in L$ – произвольная точка. Векторы $\vec{S}$ и $\overrightarrow{M_0M} = \{\, x - x_0; y - y_0\}$ коллинеарны, поэтому $\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{S}$. В координатах это равенство примет вид

$$\begin{cases} x = x_0 + m \cdot t \\ y = y_0 + n \cdot t \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty. \qquad (5)$$

Это так называемые **параметрические уравнения прямой**. Ясно, что при изменении значения параметра t в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ точка $M(x, y)$ «пробегает» всю прямую L. Очевидно, что точке $M_0(x_0, y_0)$ соответствует значение параметра $t = 0$.

Параметрические уравнения прямой

Исключая из уравнений (5) параметр t, получим **каноническое уравнение прямой на плоскости**

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}. \qquad (6)$$

В частности, если одна из координат направляющего вектора равна нулю, например, $\vec{S}=\{m,0\}$, то получаем уравнение прямой $y=y_0$.

В качестве следствия из уравнения (6) получим уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$. В этом случае вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1\}$ можно считать направляющим вектором данной прямой. Отсюда получим **уравнение прямой, проходящей через две заданные точки**

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (7)$$

Каноническое уравнение прямой

1. Что такое смешанное произведение векторов?
2. Сформулируйте и докажите теорему о связи смешанного произведения с объемом параллелепипеда
3. Запишите условие компланарности векторов
4. Выведите способ вычисления смешанного произведения в координатах
5. Докажите теоремы об общем уравнении прямой на плоскости
6. Проведите исследование общего уравнения прямой линии на плоскости
7. Выведите уравнение прямой линии на плоскости с угловым коэффициентом и уравнение прямой в отрезках на осях
8. Выведите каноническое уравнение прямой на плоскости, параметрические уравнения, уравнение прямой, проходящей через две заданные точки
9. Что называется уравнением множества?
10. Как вводятся полярные координаты на плоскости?
11. Как вычисляется объём пирамиды?
12. Каким соотношением связаны декартовы и полярные координаты точек плоскости?
13. Как находить координаты точки, которая делит отрезок в заданном отношении?

Теоретические вопросы