Несобственные интегралы. Геометрические приложения определенного интеграла

Основные понятия и определения

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале $[a,+\infty)$. Тогда она будет непрерывна на любом интервале $[a,b]$, где $b>a$ и существует интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Определение. *Несобственным интегралом 1-го рода* называется интеграл, определяемый равенством $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$.

Если соответствующий предел существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл 1-го рода *сходится*, иначе несобственный интеграл называют *расходящимся*.

Аналогично, если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке интегрирования, то интегралы вида $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}}\int_a^b f(x)dx$ также являются *несобственными интегралами 1-го рода*.

Или $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$, причем интеграл в левой части равенства сходится, если одновременно сходятся оба интеграла в правой части равенства.

Если же на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ имеет точку разрыва 2-го рода, то возникает понятие несобственного интеграла 2-го рода. Рассмотрим 3 случая.

а) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале $[a,b)$ и неограниченна вблизи точки $x=b$. Тогда функция будет непрерывна на любом отрезке $[a, b_1]$, где $a \le b_1 < b$, и существует определенный интеграл $\int_a^{b_1} f(x)dx$.

Определение. *Несобственным интегралом 2-го рода* называется интеграл, определяемый равенством $\int_a^{\boxed{b}} f(x)dx = \lim_{b_1 \to b-0} \int_a^{b_1} f(x)dx$, точка b в этом случае называется особой точкой 2-го рода.

б) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(a,b]$ и неограниченна вблизи точки $x=a$. Тогда функция будет непрерывна на любом отрезке $[a_1,\ b]$, где $a < a_1 \le b$, и существует определенный интеграл $\int_{a_1}^{b} f(x)dx$.

Определение. *Несобственным интегралом 2-го рода* называется интеграл, определяемый равенством $\int_{\boxed{a}}^{b} f(x)dx = \lim_{a_1 \to a+0} \int_{a_1}^{b} f(x)dx$,

в этом случае точка a называется особой точкой 2-го рода.

Несобственные интегралы 2-го рода сходятся, если соответствующие пределы существуют и конечны.

в) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале $[a,b]$ всюду за исключением точки $c \in (a,b)$ и неограниченна вблизи точки $x = c$. Тогда $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\boxed{c}} f(x)dx + \int_{\boxed{c}}^b f(x)dx$ также является несобственным интегралом 2-го рода, причем интеграл в левой части сходится, если сходятся оба интеграла в правой части.

Свойства несобственных интегралов

Сформулируем свойства для несобственных интегралов 1-го рода, аналогичные свойства будут справедливы и для несобственных интегралов 2-го рода.

1. Свойство линейности. Пусть сходятся (или являются определенными интегралами) любые два из трех интегралов $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$, $\int\limits_a^{+\infty} (\lambda f(x)+\mu g(x))dx$. Тогда сходится и третий из этих интегралов, причем справедливо равенство:

$$\int\limits_a^{+\infty} (\lambda f(x)+\mu g(x))dx=\lambda\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx+\mu\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx.$$

2. Критерий Коши. Несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда $\forall\varepsilon>0\ \exists a_0>a, \forall a', b': a_0<a'<b'$, справедливо неравенство $\left|\int\limits_{a'}^{b'} f(x)dx\right|<\varepsilon$.

Теорема (обобщенная формула Ньютона — Лейбница). Пусть несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится и $F(x)$ — некоторая первообразная функции $f(x)$ на промежутке $[a,+\infty)$. Тогда справедлива следующая формула:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{x\to+\infty}(F(x)-F(a)).$$

Аналогично, $\int\limits_a^{\boxed{b}} f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=\lim\limits_{x\to b-0}F(x)-F(a)$.

Замечание. При вычислении несобственных интегралов используют те же методы, что и при вычислении определенных интегралов.

Пример 1. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

а) $\int\limits_{\sqrt{e}}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$; б) $\int\limits_{0}^{+\infty}(x+1)e^x dx$; в) $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^3}dx$; г) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}$.

Решение

а) Функция $f(x)=\frac{1}{x\ln^2 x}$ непрерывна на интервале $\left[\sqrt{e},+\infty\right)$, т.е. имеем несобственный интеграл 1-го рода.

Для вычисления интеграла воспользуемся методом занесения под знак дифференциала:

$$\int\limits_{\sqrt{e}}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\int\limits_{\sqrt{e}}^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln^2 x}=-\frac{1}{\ln x}\Bigg|_{\sqrt{e}}^{+\infty}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}+2=2.$$

Интеграл равен конечному числу, т.е. несобственный интеграл сходится.

б) Подынтегральная функция непрерывна на всей числовой прямой. Для вычисления несобственного интеграла воспользуемся методом интегрирования по частям: $u=x+1$, $dv=e^x dx\Rightarrow du=dx, v=e^x$.

$$\int\limits_{0}^{+\infty}(x+1)e^x dx=(x+1)e^x\Big|_0^{+\infty}-\int\limits_{0}^{+\infty}e^x dx=xe^x\Big|_0^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}xe^x-0=+\infty.$$

Несобственный интеграл расходится.

в) Функция $f(x)=\frac{x^2+1}{x^3}$ непрерывна на интервале $[1,+\infty)$.

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^3}dx=\int\limits_{1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)dx=$$

$$=\left(\ln x-\frac{1}{2x^2}\right)\Bigg|_1^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln x-\frac{1}{2x^2}\right)+\frac{1}{2}=+\infty.$$

Несобственный интеграл расходится.

г) Подынтегральная функция непрерывна на всей числовой прямой. Так как функция $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ является четной, а пределы интегрирования симметричны, то воспользуемся следующим свойством интегралов: $\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx=2\int\limits_{0}^{a}f(x)dx$.

Тогда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}=2\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}=2\operatorname{arctg}x\Big|_0^{+\infty}=2\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\pi.$

Таким образом, исходный интеграл сходится.

Пример 2. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+x^4}$; б) $\int\limits_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$; в) $\int\limits_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$;

г) $\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \frac{1}{x^3}\cos\frac{1}{x^2}\,dx$; д) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{(x-2)^2}$.

Решение

а) Функция $f(x)=\frac{1}{x^2+x^4}$ имеет точку разрыва $x=0$, причем функция $f(x)$ неограниченна вблизи этой точки: $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1}{x^2+x^4}=+\infty$.

Таким образом, имеем несобственный интеграл 2-го рода.

Для вычисления интеграла представим подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей: $\frac{1}{x^2+x^4}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}$.

$$\int\limits_{\boxed{0}}^1 \frac{dx}{x^2+x^4}=\int\limits_{\boxed{0}}^1\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\left(-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}x\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=-1-\frac{\pi}{4}+\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{1}{x}+\operatorname{arctg}x\right)=+\infty.$$

Несобственный интеграл расходится.

б) Подынтегральная функция непрерывна на промежутке $\left(1,\sqrt{e}\right]$ и неограниченна вблизи точки $x=1$.

$$\int\limits_{\boxed{1}}^{\sqrt{e}}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\int\limits_{\boxed{1}}^{\sqrt{e}}\frac{d(\ln x)}{\ln^2 x}=-\frac{1}{\ln x}\Bigg|_{\boxed{1}}^{\sqrt{e}}=2+\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{\ln x}=+\infty.$$

Несобственный интеграл расходится.

в) Функция $f(x)=\frac{1}{\sqrt{6x-x^2-8}}$ непрерывна на промежутке $(2,\ 4)$ и неограниченна вблизи точек $x=2$ и $x=4$.

$$\int\limits_{\boxed{2}}^{\boxed{4}}\frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}=\int\limits_{\boxed{2}}^{\boxed{4}}\frac{dx}{\sqrt{1-(x-3)^2}}=\arcsin(x-3)\Big|_2^4=\pi.$$

г) Функция $f(x)=\frac{1}{x^3}\cos\frac{1}{x^2}$ непрерывна на промежутке $\left(0,\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right]$ и неограниченна вблизи точки $x=0$.

$$\int\limits_{\boxed{0}}^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}\frac{1}{x^3}\cos\frac{1}{x^2}\,dx=-\frac{1}{2}\int\limits_{\boxed{0}}^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}\cos\frac{1}{x^2}\,d\left(\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x^2}\Bigg|_0^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}=$$

$$=-\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0+0}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{1}{x^2}\right),$$

предел не существует, поэтому несобственный интеграл расходится.

д) Функция $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$ на отрезке $[0,\ 4]$ имеет точку разрыва второго рода $x=2$.

Поэтому

$$\int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^2}=\int_0^{\boxed{2}} \frac{dx}{(x-2)^2}+\int_{\boxed{2}}^4 \frac{dx}{(x-2)^2},$$

$$\int_0^{\boxed{2}} \frac{dx}{(x-2)^2}=-\frac{1}{x-2}\bigg|_0^2=-\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{x-2}-\frac{1}{2}=+\infty,$$

т. е. один из интегралов в правой части равенства расходится, а значит, исходный интеграл расходится.

Упражнения для самостоятельной подготовки

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x\, dx}{x^2+1}$; б) $\int\limits_0^1 x \ln^2 x\, dx$; в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$; г) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Сходимость несобственных интегралов

В некоторых случаях вычисление несобственных интегралов бывает довольно затруднительно, поэтому для исследования сходимости несобственных интегралов применяют различные признаки сходимости. Сформулируем соответствующие теоремы для несобственных интегралов 1-го рода.

Теорема (признак сравнения). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на интервале $[a,+\infty)$ и $0 \le f(x) \le g(x)$ для всех $x \in [a,+\infty)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ также сходится;

2) если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится.

Теорема (признак сравнения в предельной форме). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на любом отрезке из интервала $[a,+\infty)$ и для всех $x \in [a,+\infty)$ выполнены неравенства $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$. Если существует предел $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k$, то справедливы следующие утверждения:

1) если $k = 0$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится;

2) если $k = +\infty$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ расходится, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится;

3) если $k \in (0,+\infty)$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Теорема (о сходимости интеграла от произведения функций). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале $[a,+\infty)$, а $g(x)$ монотонна и имеет непрерывную производную для всех $x\in[a,+\infty)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если функция $F(A)=\int\limits_a^A f(x)dx$ ограничена на интервале $[a,+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится;

2) если сходится несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, а функция $g(x)$ ограничена на интервале $[a,+\infty)$, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

Замечание 1. Аналогичные теоремы можно сформулировать для несобственных интегралов 2-го рода.

Замечание 2. Чтобы использовать указанные теоремы, необходимо иметь набор эталонных несобственных интегралов 1-го и 2-го рода. В качестве таких несобственных интегралов можно взять интегралы следующих видов:

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} - \begin{cases} \text{сходится при } p>1, \\ \text{расходится при } p \le 1. \end{cases}$$

$$\int_a^{b} \frac{dx}{(x-a)^p} - \begin{cases} \text{сходится при } p \le 1, \\ \text{расходится при } p>1. \end{cases}$$

$$\int_a^{b} \frac{dx}{(b-x)^p} - \begin{cases} \text{сходится при } p \le 1, \\ \text{расходится при } p>1. \end{cases}$$

Определение. Если функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке из интервала $[a, +\infty)$ и несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)| dx$ сходится, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x) dx$ называют *абсолютно сходящимся*.

Теорема. Если $\int\limits_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится абсолютно, то он сходится.

Замечание. Из сходимости несобственного интеграла не следует абсолютная сходимость.

Определение. Если $\int\limits_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится, а несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)| dx$ расходится, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x) dx$ называют *условно сходящимся*.

Пример 1. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

а) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{4+2x^2+7x^5}$; б) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x+1}}{4x^3+2x+1}dx$; в) $\int\limits_0^1\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}dx$;

г) $\int\limits_0^1\frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}{e^x-1}dx$; д) $\int\limits_1^2\frac{dx}{\ln x}$.

Решение

а) Воспользуемся признаком сравнения. Для этого оценим подынтегральную функцию сверху: $0<\frac{1}{4+2x^2+7x^5}\le\frac{1}{7x^5}\le\frac{1}{x^5}$.

$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^5}$ — сходится (по замечанию 2), поэтому по признаку сравнения сходится несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{4+2x^2+7x^5}$.

б) В данном примере воспользуемся признаком сравнения в предельной форме.

При $x\to+\infty$ больший вклад в значение функции в числителе и знаменателе вносят старшие степени переменной x, поэтому $f(x)=\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x+1}}{4x^3+2x+1}\sim\frac{\sqrt{x^3}}{4x^3}=\frac{1}{4\sqrt{x^3}}=g(x)$ при $x\to+\infty$, т. е. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, и несобственные интегралы от этих функций ведут себя одинаково.

По замечанию 2: $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{4\sqrt{x^3}}$ — сходится, поэтому и интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x+1}}{4x^3+2x+1}dx$ сходится.

в) Воспользуемся признаком сравнения. На отрезке $[0,1]$ справедливо неравенство: $0<\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}\le\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

Несобственный интеграл $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ сходится, поэтому $\int\limits_0^1\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}dx$ также сходится.

г) Для функции $f(x)=\frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}{e^x-1}$ особой точкой второго рода является точка $x=0$. Воспользуемся признаком сравнения в предельной форме. По свойствам эквивалентных бесконечно малых функций имеем:

$$f(x)=\frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}{e^x-1}\sim\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=g(x)\text{ при }x\to 0.$$

Несобственный интеграл $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ сходится по замечанию 2, поэтому $\int\limits_0^1\frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}{e^x-1}dx$ сходится.

д) Для функции $f(x)=\frac{1}{\ln x}$ особой точкой второго рода является точка $x=1$.

По свойствам эквивалентных бесконечно малых функций:

$$\ln x=\ln\left(1+(x-1)\right)\sim(x-1)\text{ при }x\to 1,$$

поэтому $f(x)=\frac{1}{\ln x}\sim\frac{1}{(x-1)}=g(x)$ при $x\to1$.

Воспользуемся признаком сравнения в предельной форме: $\lim\limits_{x\to1+0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, поэтому несобственные интегралы ведут себя одинаково.

Несобственный интеграл $\int\limits_1^2\frac{dx}{(x-1)}$ расходится по замечанию 2, поэтому $\int\limits_1^2\frac{dx}{\ln x}$ расходится.

Пример 2. Исследовать на абсолютную сходимость несобственный интеграл:

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin 3x^2 dx}{(x-1)^{10}}.$$

Решение

Функция $f(x)=\dfrac{\sin 3x^2 dx}{(x-1)^{10}}$ непрерывна при $x \geq 2$. Так как подынтегральная функция может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то признаки сравнения пока не применимы.

Исследуем на сходимость интеграл $\displaystyle\int_2^{+\infty} \left|\frac{\sin 3x^2}{(x-1)^{10}}\right| dx$.

Воспользуемся признаком сравнения. Для этого оценим подынтегральную функцию сверху: $\left|\dfrac{\sin 3x^2}{(x-1)^{10}}\right| \leq \dfrac{1}{(x-1)^{10}}$.

$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^{10}}$ сходится, поэтому по признаку сравнения $\displaystyle\int_2^{+\infty} \left|\frac{\sin 3x^2}{(x-1)^{10}}\right| dx$ сходится, а значит, $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sin 3x^2 dx}{(x-1)^{10}}$ сходится абсолютно.

Упражнения для самостоятельной подготовки

Исследовать сходимость следующих несобственных интегралов:

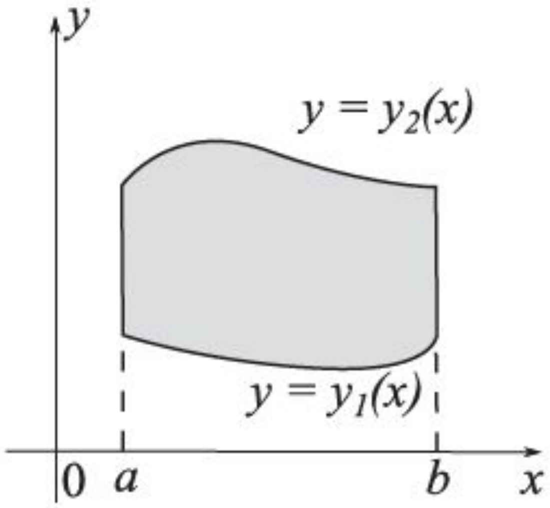
а) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+2x^2+x^6}}$; б) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x^2+1}}{x^2+3x+1}dx$;

в) $\int\limits_{1}^{+\infty} \left(1-\cos\left(\frac{2}{x}\right)\right)dx$; г) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}$.

Геометрические приложения определенного интеграла

Площадь плоской фигуры

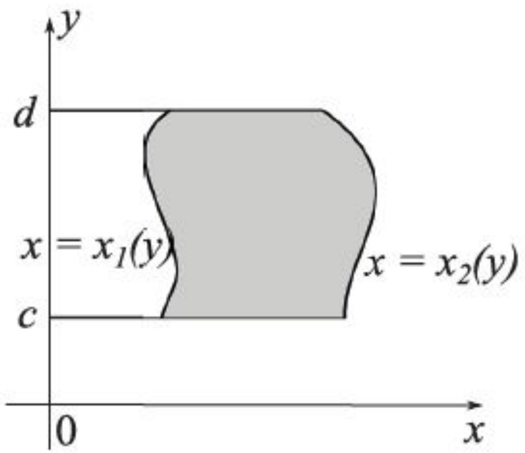
Пусть фигура в плоскости Oxy ограничена прямыми $x=a$, $x=b$ и кривыми $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$, причем $y_1(x)\le y_2(x)$ на отрезке $[a,b]$ (рис.).



Площадь S такой фигуры может быть найдена по формуле

$$S=\int_a^b \left(y_2(x)-y_1(x)\right)dx.$$

Пусть фигура в плоскости Oxy ограничена прямыми $y=c$, $y=d$ и кривыми $x=x_1(y)$, $x=x_2(y)$, причем $x_1(y)\le x_2(y)$ на отрезке $[c,d]$.



Площадь S такой фигуры может быть найдена по формуле

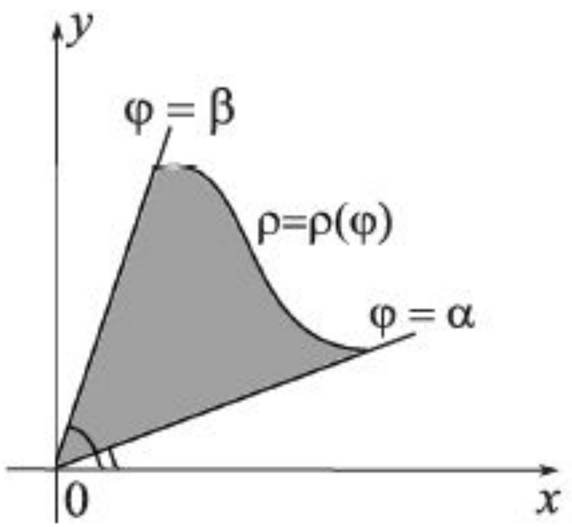
$$S=\int_c^d \left(x_2(y)-x_1(y)\right)dy.$$

Если кривая в плоскости Oxy задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[t_1,t_2]$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой и прямыми $x=a$, $x=b$, $y=0$ $\left(a=x(t_1),\ b=x(t_2)\right)$, может быть найдена по формуле

$$S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt.$$

Если кривая задана в полярной системе координат уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, то площадь криволинейного сектора, ограниченного этой кривой и двумя полярными лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, $\alpha < \beta$ находится по формуле

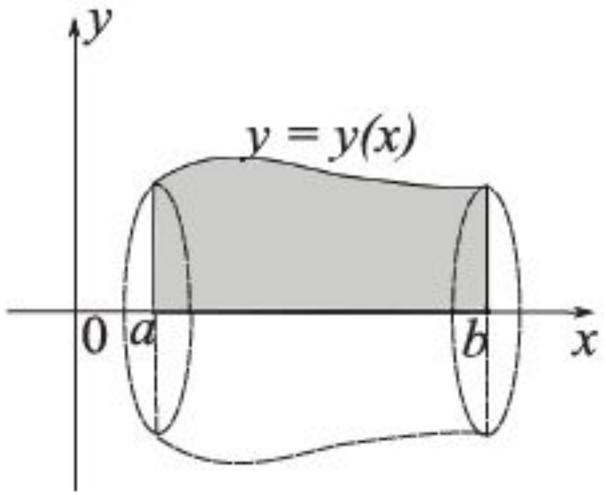
$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\, d\varphi.$$



Объем тела вращения

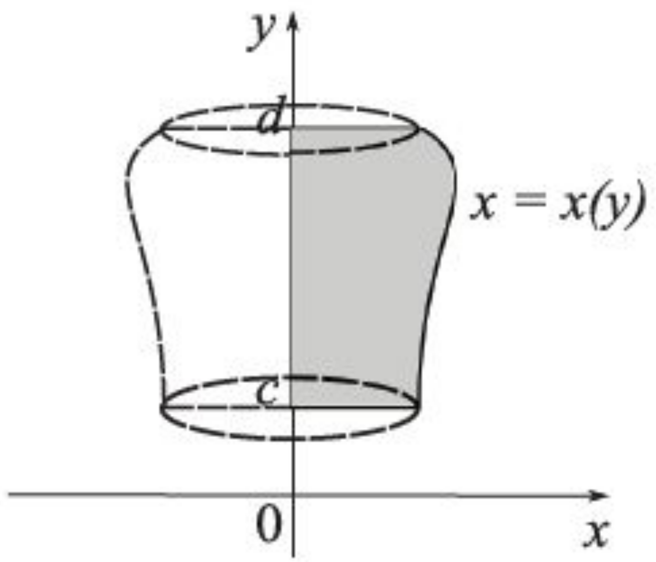
Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = y(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$, вращается вокруг оси Ox, то объем тела вращения может быть вычислен по формуле

$$V_{Ox} = \pi\int_a^b y^2(x)\,dx.$$



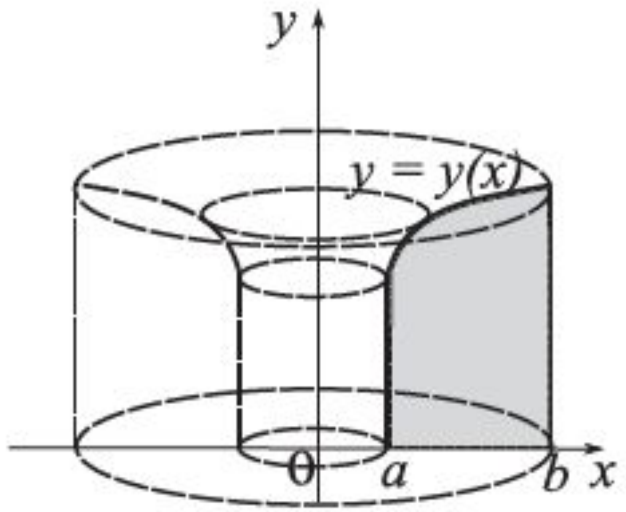
Аналогично, если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $x = x(y)$ и прямыми $y = c, y = d, x = 0$, вращается вокруг оси Oy, то объем тела вращения может быть вычислен по формуле

$$V_{Oy} = \pi\int_c^d x^2(y)\,dy.$$



Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = y(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$, вращается вокруг оси Oy, то объем тела вращения может быть вычислен по формуле

$$V_{Oy} = 2\pi\int_a^b x \cdot y(x)\,dx.$$



Длина дуги плоской кривой

Пусть кривая на плоскости задана уравнением $y = y(x)$ $x \in [a, b]$, причем $y(x)$ непрерывно дифференцируема на этом отрезке. Тогда длина соответствующей дуги этой кривой находится по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$$

Если кривая в плоскости Oxy задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, причем $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции, то длина дуги этой кривой находится по формуле

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt.$$

Если кривая задана в полярной системе координат уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, длина дуги этой кривой находится по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi.$$

Площадь поверхности вращения

Пусть плоская кривая, заданная уравнением $y = y(x), x \in [a, b]$ (причем $y(x)$ непрерывно дифференцируема на этом отрезке), вращается вокруг оси Ox. Тогда площадь поверхности вращения находится по формуле

$$S_{Ox} = \int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx.$$

Если кривая в плоскости Oxy задана параметрическими уравнениями $x = x(t), y = y(t), t \in [t_1, t_2]$, причем $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции, то площадь поверхности вращения находится по формуле

$$S_{Ox} = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt.$$

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{x^2}{3}$, $y=\frac{4}{x^2+4}$.

Решение

Найдем точки пересечения кривых:

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2}{3}, \\ y=\dfrac{4}{x^2+4}, \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{3}=\frac{4}{x^2+4}, \Rightarrow \quad x^4+4x^2-12=0,$$

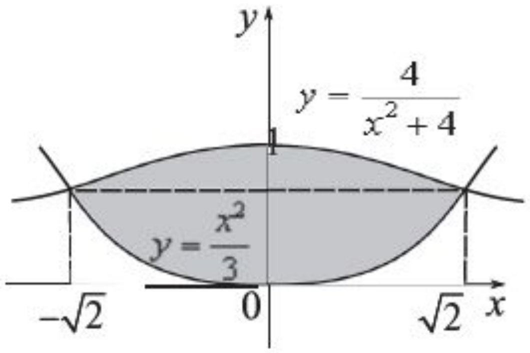
откуда $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=-\sqrt{2}$ и $y_1=y_2=\frac{2}{3}$.

Таким образом, данные кривые пересекаются в точках $A\left(\sqrt{2}, \frac{2}{3}\right)$ и $B\left(-\sqrt{2}, \frac{2}{3}\right)$.

Снизу фигура ограничена параболой $y=\frac{x^2}{3}$, сверху — кривой $y=\frac{4}{x^2+4}$. Значения переменной x принадлежат отрезку $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$.

Тогда

$$S=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(\frac{4}{x^2+4}-\frac{x^2}{3}\right)dx=\left(2\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{x^3}{9}\right)\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}=4\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{4\sqrt{2}}{9}.$$



Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x+1$, $x-y-1=0$.

Решение

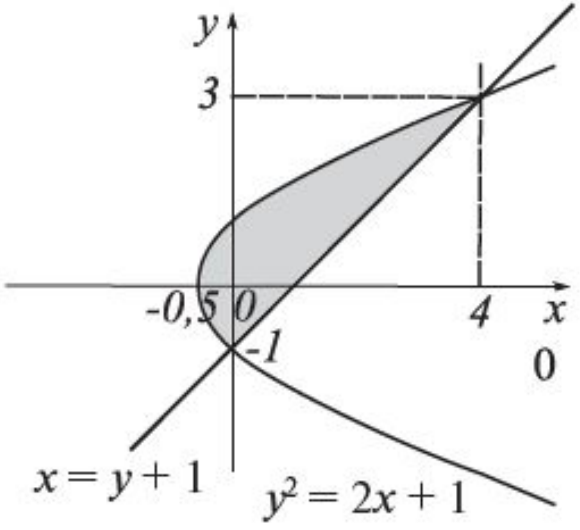
Первое уравнение задает параболу с вершиной в точке $(-0,5;0)$, для которой ось Ox является осью симметрии. Второе уравнение задает прямую в плоскости Oxy.

Найдем точки пересечения кривых:

$$\begin{cases} y^2 = 2x+1, \\ x = y+1, \end{cases} \Rightarrow y^2 - 2y - 3 = 0,$$

откуда $y_1 = -1$, $y_2 = 3$ и $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

Таким образом, данные кривые пересекаются в точках $A(0,-1)$ и $B(4,3)$.



Выразим переменную y из уравнений кривых: $y = \pm\sqrt{2x+1}$ и $y = x-1$.

Снизу фигура ограничена двумя линиями: частью параболы $y = -\sqrt{2x+1}$ и прямой $y = x-1$, сверху — параболой $y = \sqrt{2x+1}$, поэтому при вычислении площади нужно фигуру разбить на две части. Тогда площадь S такой фигуры есть сумма площадей двух фигур: $S = S_1 + S_2$, где

$$S_1 = \int_{-0,5}^{0}\left(\sqrt{2x+1} - \left(-\sqrt{2x+1}\right)\right)dx =$$

$$= \int_{-0,5}^{0} 2\sqrt{2x+1}\,dx = \int_{-0,5}^{0}\sqrt{2x+1}\,d(2x+1) =$$

$$= \frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-0,5}^{0} = \frac{2}{3}.$$

$$S_2 = \int_{0}^{4}\left(\sqrt{2x+1} - (x-1)\right)dx = \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2}\Big|_{0}^{4} - \frac{(x-1)^2}{2}\Big|_{0}^{4} = 4\frac{2}{3}.$$

Тогда $S = \frac{2}{3} + 4\frac{2}{3} = 5\frac{1}{3}$.

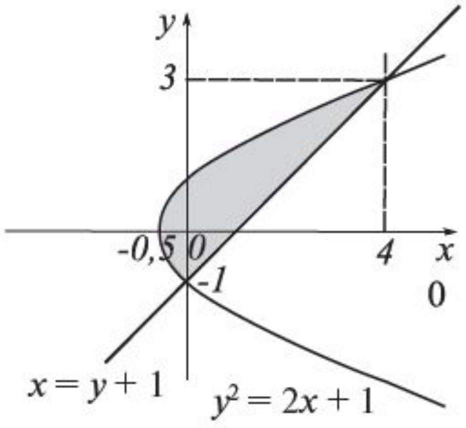
Однако при решении данной задачи удобнее воспользоваться формулой

$$S = \int_{c}^{d}\left(x_2(y) - x_1(y)\right)dy.$$

Выразим переменную x из уравнений кривых: $x = \frac{y^2-1}{2}$ и $x = y+1$.

Тогда $S = \int_{-1}^{3}\left(y+1-\frac{y^2-1}{2}\right)dy = \left(\frac{(y+1)^2}{2} - \frac{y^3}{6} + \frac{y}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{3} = 5\frac{1}{3}.$

При решении вторым методом вычислений значительно меньше, чем при решении первым.



Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной петлей линии:

$$\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$$

Решение

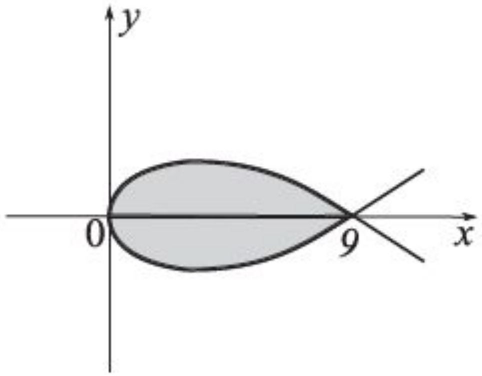
Для построения кривой проведем небольшое исследование. Найдем точки пересечения кривой с координатными осями:

$x = 0$ при $t_1 = 0$,

$y = 0$ при $t_2 = 0$, $t_3 = \sqrt{3}$, $t_4 = -\sqrt{3}$.

Получили координаты двух точек: $A(0;0)$, $B(9;0)$, причем точке B соответствуют два значения параметра, т. е. при движении по кривой точка B встречается дважды.

Заметим, что одному значению переменной x соответствуют два значения переменной y, отличающиеся знаком, т. е. данная кривая симметрична относительно оси Ox, причем $y \geq 0$ при $t \in \left(0, \sqrt{3}\right)$ и $y \leq 0$ при $t \in \left(-\sqrt{3}, 0\right)$



Вычислим площадь фигуры, ограниченной верхней половиной петли линии и осью Ox:

$$S_1 = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,dt = \int_0^{\sqrt{3}} \left(3t - t^3\right) \cdot 6t\,dt = 6\int_0^{\sqrt{3}} \left(3t^2 - t^4\right)dt = 6\left(t^3 - \frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = \frac{36\sqrt{3}}{5}.$$

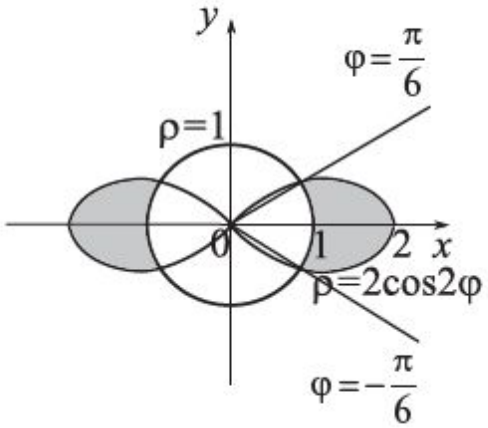
Тогда площадь всей фигуры равна: $S = 2S_1 = \dfrac{72\sqrt{3}}{5}$.

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\rho = 2\cos 2\varphi$, $\rho = 1$ (вне окружности).

Решение

Построим фигуры, заданные в полярной системе координат: $\rho = 2\cos 2\varphi$ — двухлепестковая роза, $\rho = 1$ — окружность Найдем углы, под которыми пересекаются кривые:

$$2\cos 2\varphi = 1 \Rightarrow \cos 2\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$$



Для вычисления площади фигуры воспользуемся формулой

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(\rho_2^2(\varphi) - \rho_1^2(\varphi)\right)d\varphi.$$

Так как фигура симметрична, вычислим площадь половины фигуры.

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\left(4\cos^2 2\varphi - 1\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\left((1+\cos 4\varphi) - 1\right)d\varphi =$$

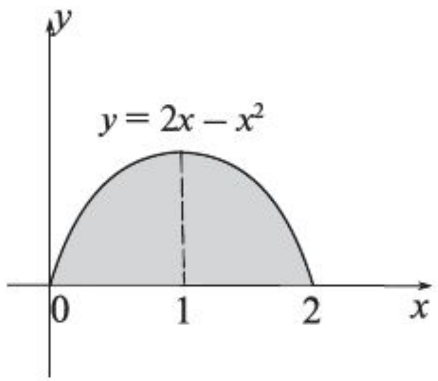
$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\cos 4\varphi\, d\varphi = \frac{\sin 4\varphi}{4}\bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Тогда площадь всей фигуры равна: $S = 2S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Пример 5. Вычислить объемы тел, полученных при вращении вокруг осей Ox и Oy криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$.

Решение

Построим криволинейную трапецию.



Для вычисления объема тела вращения вокруг оси Ox воспользуемся формулой

$$V_{Ox} = \pi\int_a^b y^2(x)\,dx.$$

$$V_{Ox} = \pi\int_0^2 \left(2x - x^2\right)^2 dx = \pi\int_0^2 \left(4x^2 - 4x^3 + x^4\right) dx =$$

$$= \pi\left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{16\pi}{5}.$$

Для вычисления объема тела вращения вокруг оси Oy выразим переменную x из уравнения кривой: $x = 1 \pm \sqrt{1-y}$ (левая и правая ветви параболы). Тогда объем тела вращения вокруг оси Oy может быть найден как разность объемов тел, полученных вращением ветвей параболы вокруг оси Oy: $V_{Oy} = V_1 - V_2$.

$$V_1 = \pi\int_c^d x_1^2(y)\,dy = \pi\int_0^1 \left(1 + \sqrt{1-y}\right)^2 dy = \pi\int_0^1 \left(2 + 2\sqrt{1-y} - y\right) dy =$$

$$= \pi\left(2y - \frac{4(1-y)^{3/2}}{3} - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{17\pi}{6},$$

$$V_2=\pi\int_c^d x_2^2(y)\,dy=\pi\int_0^1\left(1-\sqrt{1-y}\right)^2 dy=\pi\int_0^1\left(2-2\sqrt{1-y}-y\right)dy=$$

$$=\pi\left(2y+\frac{4(1-y)^{3/2}}{3}-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{6}.$$

Тогда $V_{Oy}=V_1-V_2=\frac{17\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\frac{8\pi}{3}.$

Однако в данном примере объем тела вращения вокруг оси Oy удобнее находить по формуле

$$V_{Oy}=2\pi\int_a^b x\cdot y(x)\,dx.$$

$$V_{Oy}=2\pi\int_0^2 x\left(2x-x^2\right)dx=2\pi\int_0^2\left(2x^2-x^3\right)dx==2\pi\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2=\frac{8\pi}{3}.$$

Пример 6. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$ от точки $O(0,0)$ до точки $A(4,8)$.

Решение

Воспользуемся формулой: $l = \int\limits_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx$.

Для этого выразим переменную y через x: $y^2 = x^3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^3}$.

Нашему условию удовлетворяет функция $y = \sqrt{x^3}$, $x \in [0,4]$.

Тогда

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x},\ \sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\frac{9}{4}x},$$

$$l = \int\limits_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx = \frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Bigg|_0^4 = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right).$$

Пример 7. Найти полную площадь поверхности тела, образованного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной линиями $y^2 = 2x$ и $2x = 3$.

Решение

Для вычисления объема тела вращения вокруг оси Oy выразим переменную y из уравнения кривой: $y = \pm\sqrt{2x}$. Так как кривая симметрична относительно оси Ox, то для получения соответствующей поверхности достаточно рассмотреть только верхнюю часть кривой: $y = \sqrt{2x}$.

Полная площадь поверхности тела может быть найдена как сумма площадей поверхностей, полученных вращением отрезка AB и дуги OA вокруг оси Ox, т. е. $S_{\text{полн}} = S_1 + S_2$.

При вращении отрезка вокруг оси Ox получим круг, поэтому $S_1 = S_{\text{круга}} = \pi R^2 = 3\pi$.

Площадь второй поверхности вращения найдем, воспользовавшись формулой

$$S_{Ox} = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx.$$

$$S_2 = 2\pi\int_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{2x}\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)^2}dx = 2\pi\int_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{2x+1}\,dx = \left.\frac{2\pi(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^{\frac{3}{2}} = \frac{14\pi}{3}.$$

Таким образом, $S_{\text{полн}} = S_1 + S_2 = 3\pi + \dfrac{14\pi}{3} = \dfrac{23\pi}{3}$.

Упражнения для самостоятельной подготовки

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x = \sqrt{4 - y^2}$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho = 1 + \sqrt{2}\cos\varphi$ и лежащей вне круга $\rho = 1$.

3. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$, $y = x$, $x = 0$, $x = 1$,

а) вокруг оси Ox,

б) вокруг оси Oy.

4. Найти длину дуги кривой $x = \dfrac{t^6}{6}$, $y = 4 - \dfrac{t^4}{4}$ между точками пересечения с осью Ox.