

Несобственные интегралы.
Геометрические приложения
определенного интеграла

Основные понятия и определения

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале $[a, +\infty)$. Тогда она будет непрерывна на любом интервале $[a, b]$, где $b > a$ и существует интеграл $\int_a^b f(x) dx$.

Определение. Несобственным интегралом 1-го рода называется интеграл, определяемый равенством $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$.

Если соответствующий предел существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл 1-го рода *сходится*, иначе несобственный интеграл называют *расходящимся*.

Аналогично, если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке интегрирования, то интегралы вида $\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ также являются *несобственными интегралами 1-го рода*.

Или $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$, причем интеграл в левой части равенства сходится, если одновременно сходятся оба интеграла в правой части равенства.

Если же на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет точку разрыва 2-го рода, то возникает понятие несобственного интеграла 2-го рода. Рассмотрим 3 случая.

а) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале $[a, b)$ и неограниченна вблизи точки $x = b$. Тогда функция будет непрерывна на любом отрезке $[a, b_1]$, где $a \leq b_1 < b$, и существует определенный интеграл $\int_a^{b_1} f(x) dx$.

Определение. *Несобственным интегралом 2-го рода* называется интеграл, определяемый равенством $\int_a^b f(x) dx = \lim_{b_1 \rightarrow b-0} \int_a^{b_1} f(x) dx$, точка b в этом случае называется особой точкой 2-го рода.

б) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(a, b]$ и неограниченна вблизи точки $x = a$. Тогда функция будет непрерывна на любом отрезке $[a_1, b]$, где $a < a_1 \leq b$, и существует определенный интеграл $\int_{a_1}^b f(x) dx$.

Определение. *Несобственным интегралом 2-го рода* называется интеграл, определяемый равенством $\int_a^b f(x) dx = \lim_{a_1 \rightarrow a+0} \int_{a_1}^b f(x) dx$, в этом случае точка a называется особой точкой 2-го рода.

Несобственные интегралы 2-го рода сходятся, если соответствующие пределы существуют и конечны.

в) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале $[a, b]$ всюду за исключением точки $c \in (a, b)$ и неограниченна вблизи точки $x = c$. Тогда

$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ также является

несобственным интегралом 2-го рода, причем интеграл в левой части сходится, если сходятся оба интеграла в правой части.

Свойства несобственных интегралов

Сформулируем свойства для несобственных интегралов 1-го рода, аналогичные свойства будут справедливы и для несобственных интегралов 2-го рода.

1. Свойство линейности. Пусть сходятся (или являются определенными интегралами) любые два из трех интегралов $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, $\int_a^{+\infty} (\lambda f(x) + \mu g(x))dx$. Тогда сходится и третий из этих интегралов, причем справедливо равенство:

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x)dx + \mu \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

2. Критерий Коши. Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \exists a_0 > a, \forall a', b' : a_0 < a' < b'$, справедливо неравенство $\left| \int_{a'}^{b'} f(x)dx \right| < \varepsilon$.

Теорема (обобщенная формула Ньютона — Лейбница). Пусть несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится и $F(x)$ — некоторая первообразная функции $f(x)$ на промежутке $[a, +\infty)$. Тогда справедлива следующая формула:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x) - F(a)).$$

Аналогично, $\int_a^{\boxed{b}} f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = \lim_{x \rightarrow b-0} F(x) - F(a)$.

Замечание. При вычислении несобственных интегралов используют те же методы, что и при вычислении определенных интегралов.

Пример 1. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

а) $\int_{\sqrt{e}}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$; б) $\int_0^{+\infty} (x+1)e^x dx$; в) $\int_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^3} dx$; г) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$.

Решение

а) Функция $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$ непрерывна на интервале $[\sqrt{e}, +\infty)$,

т.е. имеем несобственный интеграл 1-го рода.

Для вычисления интеграла воспользуемся методом занесения под знак дифференциала:

$$\int_{\sqrt{e}}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int_{\sqrt{e}}^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} \Big|_{\sqrt{e}}^{+\infty} = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} + 2 = 2.$$

Интеграл равен конечному числу, т.е. несобственный интеграл сходится.

б) Подынтегральная функция непрерывна на всей числовой прямой. Для вычисления несобственного интеграла воспользуемся методом интегрирования по частям: $u = x + 1$, $dv = e^x dx \Rightarrow du = dx, v = e^x$.

$$\int_0^{+\infty} (x+1)e^x dx = (x+1)e^x \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^x dx = xe^x \Big|_0^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x - 0 = +\infty.$$

Несобственный интеграл расходится.

в) Функция $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3}$ непрерывна на интервале $[1, +\infty)$.

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^3} dx &= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right) dx = \\ &= \left(\ln x - \frac{1}{2x^2} \right) \Big|_1^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x - \frac{1}{2x^2} \right) + \frac{1}{2} = +\infty. \end{aligned}$$

Несобственный интеграл расходится.

г) Подынтегральная функция непрерывна на всей числовой прямой. Так как функция $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ является четной, а пределы интегрирования симметричны, то воспользуемся следующим свойством интегралов: $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

$$\text{Тогда } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = 2 \arctg x \Big|_0^{+\infty} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \pi.$$

Таким образом, исходный интеграл сходится.

Пример 2. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x^4}; \text{ б) } \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x \ln^2 x}; \text{ в) } \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2 - 8}};$$

$$\text{г) } \int_0^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \frac{1}{x^3} \cos \frac{1}{x^2} dx; \text{ д) } \int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^2}.$$

Решение

а) Функция $f(x) = \frac{1}{x^2 + x^4}$ имеет точку разрыва $x = 0$, причем функция $f(x)$ неограниченна вблизи этой точки:

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x^2 + x^4} = +\infty.$$

Таким образом, имеем несобственный интеграл 2-го рода.

Для вычисления интеграла представим подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей: $\frac{1}{x^2 + x^4} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1 + x^2}$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x^4} &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1 + x^2} \right) dx = \left(-\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x \right) \Big|_0^1 = \\ &= -1 - \frac{\pi}{4} + \lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x \right) = +\infty. \end{aligned}$$

Несобственный интеграл расходится.

б) Подынтегральная функция непрерывна на промежутке $(1, \sqrt{e}]$ и неограниченна вблизи точки $x = 1$.

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} \Big|_1^{\sqrt{e}} = 2 + \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{\ln x} = +\infty.$$

Несобственный интеграл расходится.

в) Функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{6x - x^2 - 8}}$ непрерывна на промежутке $(2, 4)$ и неограниченна вблизи точек $x = 2$ и $x = 4$.

$$\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2 - 8}} = \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{1 - (x-3)^2}} = \operatorname{arcsin}(x-3) \Big|_2^4 = \pi.$$

г) Функция $f(x) = \frac{1}{x^3} \cos \frac{1}{x^2}$ непрерывна на промежутке $\left(0, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right]$ и неограниченна вблизи точки $x = 0$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \frac{1}{x^3} \cos \frac{1}{x^2} dx &= -\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \cos \frac{1}{x^2} d\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2} \sin \frac{1}{x^2} \Big|_0^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} = \\ &= -\frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\frac{1}{2} \sin \frac{1}{x^2} \right), \end{aligned}$$

предел не существует, поэтому несобственный интеграл расходится.

д) Функция $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ на отрезке $[0, 4]$ имеет точку разрыва второго рода $x = 2$.

Поэтому

$$\int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^2} = \int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^2} + \int_2^4 \frac{dx}{(x-2)^2},$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^2} = -\frac{1}{x-2} \Big|_0^2 = -\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x-2} - \frac{1}{2} = +\infty,$$

т. е. один из интегралов в правой части равенства расходится, а значит, исходный интеграл расходится.

Упражнения для самостоятельной ПОДГОТОВКИ

Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

$$\text{а) } \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x \, dx}{x^2 + 1}; \quad \text{б) } \int_0^1 x \ln^2 x \, dx; \quad \text{в) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}; \quad \text{г) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

Сходимость несобственных интегралов

В некоторых случаях вычисление несобственных интегралов бывает довольно затруднительно, поэтому для исследования сходимости несобственных интегралов применяют различные признаки сходимости. Сформулируем соответствующие теоремы для несобственных интегралов 1-го рода.

Теорема (признак сравнения). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на интервале $[a, +\infty)$ и $0 \leq f(x) \leq g(x)$ для всех $x \in [a, +\infty)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если интеграл $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходится, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

также сходится;

2) если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ расходится, то интеграл $\int_a^{+\infty} g(x) dx$

расходится.

Теорема (признак сравнения в предельной форме). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на любом отрезке из интервала $[a, +\infty)$ и для всех $x \in [a, +\infty)$ выполнены неравенства $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$. Если существует предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, то справедли-

вы следующие утверждения:

1) если $k = 0$ и $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится;

2) если $k = +\infty$ и $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ расходится, то $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ расходится;

3) если $k \in (0, +\infty)$, то $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходятся или расхо-

дятся одновременно.

Теорема (о сходимости интеграла от произведения функций).
Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале $[a, +\infty)$, а $g(x)$ монотонна и имеет непрерывную производную для всех $x \in [a, +\infty)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если функция $F(A) = \int_a^A f(x) dx$ ограничена на интервале $[a, +\infty)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, то $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ сходится;

2) если сходится несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, а функция $g(x)$ ограничена на интервале $[a, +\infty)$, то $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ сходится.

Замечание 1. Аналогичные теоремы можно сформулировать для несобственных интегралов 2-го рода.

Замечание 2. Чтобы использовать указанные теоремы, необходимо иметь набор эталонных несобственных интегралов 1-го и 2-го рода. В качестве таких несобственных интегралов можно взять интегралы следующих видов:

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \begin{cases} \text{сходится при } p > 1, \\ \text{расходится при } p \leq 1. \end{cases}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} \begin{cases} \text{сходится при } p \leq 1, \\ \text{расходится при } p > 1. \end{cases}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} \begin{cases} \text{сходится при } p \leq 1, \\ \text{расходится при } p > 1. \end{cases}$$

Определение. Если функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке из интервала $[a, +\infty)$ и несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ называют *абсолютно сходящимся*.

Теорема. Если $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится абсолютно, то он сходится.

Замечание. Из сходимости несобственного интеграла не следует абсолютная сходимость.

Определение. Если $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится, а несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ расходится, то $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ называют *условно сходящимся*.

Пример 1. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

а) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{4+2x^2+7x^5}$; б) $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{x+1}}{4x^3+2x+1} dx$; в) $\int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{x}} dx$;

г) $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{e^x-1} dx$; д) $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$.

Решение

а) Воспользуемся признаком сравнения. Для этого оценим подынтегральную функцию сверху: $0 < \frac{1}{4+2x^2+7x^5} \leq \frac{1}{7x^5} \leq \frac{1}{x^5}$.

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5}$ — сходится (по замечанию 2), поэтому по признаку

сравнения сходится несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{4+2x^2+7x^5}$.

б) В данном примере воспользуемся признаком сравнения в предельной форме.

При $x \rightarrow +\infty$ больший вклад в значение функции в числителе и знаменателе вносят старшие степени переменной x , поэтому $f(x) = \frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{x+1}}{4x^3+2x+1} \sim \frac{\sqrt{x^3}}{4x^3} = \frac{1}{4\sqrt{x^3}} = g(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, т. е.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, и несобственные интегралы от этих функций ведут себя одинаково.

По замечанию 2: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{4\sqrt{x^3}}$ — сходится, поэтому и интеграл

$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{x+1}}{4x^3+2x+1} dx$ сходится.

в) Воспользуемся признаком сравнения. На отрезке $[0,1]$

справедливо неравенство: $0 < \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

Несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ сходится, поэтому $\int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{x}} dx$

также сходится.

г) Для функции $f(x) = \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{e^x-1}$ особой точкой второго рода является точка $x=0$. Воспользуемся признаком сравнения в предельной форме. По свойствам эквивалентных бесконечно малых функций имеем:

$$f(x) = \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{e^x-1} \sim \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = g(x) \text{ при } x \rightarrow 0.$$

Несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ сходится по замечанию 2, по-

этому $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{e^x-1} dx$ сходится.

д) Для функции $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ особой точкой второго рода является точка $x=1$.

По свойствам эквивалентных бесконечно малых функций:

$$\ln x = \ln(1+(x-1)) \sim (x-1) \text{ при } x \rightarrow 1,$$

поэтому $f(x) = \frac{1}{\ln x} \sim \frac{1}{(x-1)} = g(x)$ при $x \rightarrow 1$.

Воспользуемся признаком сравнения в предельной форме:

$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, поэтому несобственные интегралы ведут себя одинаково.

наково.

Несобственный интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)}$ расходитс по замечанию 2,

поэтому $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$ расходитс.

Пример 2. Исследовать на абсолютную сходимость несобственный интеграл:

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin 3x^2 dx}{(x-1)^{10}}.$$

Решение

Функция $f(x) = \frac{\sin 3x^2 dx}{(x-1)^{10}}$ непрерывна при $x \geq 2$. Так как

подынтегральная функция может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то признаки сравнения пока не применимы.

Исследуем на сходимость интеграл $\int_2^{+\infty} \left| \frac{\sin 3x^2}{(x-1)^{10}} \right| dx$.

Воспользуемся признаком сравнения. Для этого оценим подынтегральную функцию сверху: $\left| \frac{\sin 3x^2}{(x-1)^{10}} \right| \leq \frac{1}{(x-1)^{10}}$.

$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^{10}}$ сходится, поэтому по признаку сравнения $\int_2^{+\infty} \left| \frac{\sin 3x^2}{(x-1)^{10}} \right| dx$ сходится, а значит, $\int_2^{+\infty} \frac{\sin 3x^2 dx}{(x-1)^{10}}$ сходится абсолютно.

Упражнения для самостоятельной подготовки

Исследовать сходимость следующих несобственных интегралов:

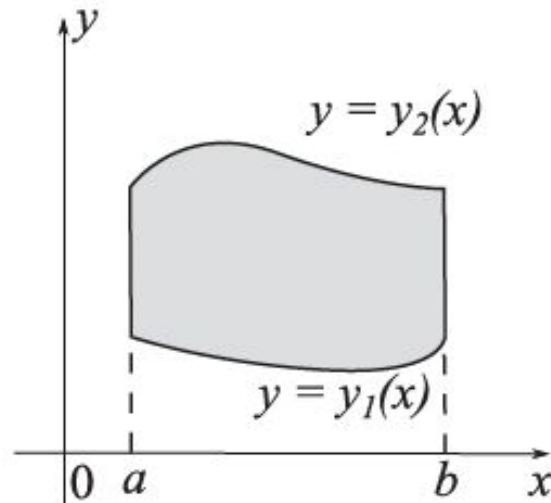
$$\text{а) } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+2x^2+x^6}}; \quad \text{б) } \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x^2+1}}{x^2+3x+1} dx;$$

$$\text{в) } \int_1^{+\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{2}{x}\right)\right) dx; \quad \text{г) } \int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}.$$

Геометрические приложения определенного интеграла

Площадь плоской фигуры

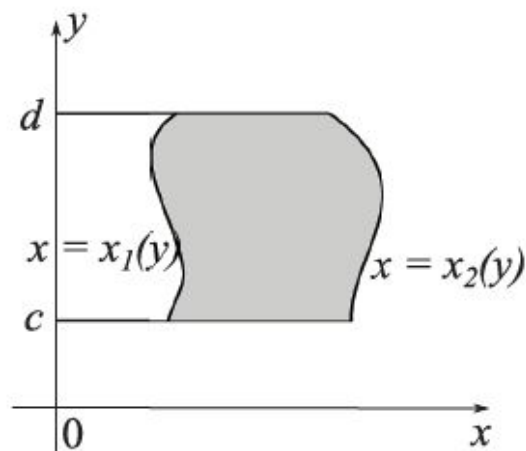
Пусть фигура в плоскости Oxy ограничена прямыми $x = a$, $x = b$ и кривыми $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, причем $y_1(x) \leq y_2(x)$ на отрезке $[a, b]$ (рис.).



Площадь S такой фигуры может быть найдена по формуле

$$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x)) dx.$$

Пусть фигура в плоскости Oxy ограничена прямыми $y = c$, $y = d$ и кривыми $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$, причем $x_1(y) \leq x_2(y)$ на отрезке $[c, d]$.



Площадь S такой фигуры может быть найдена по формуле

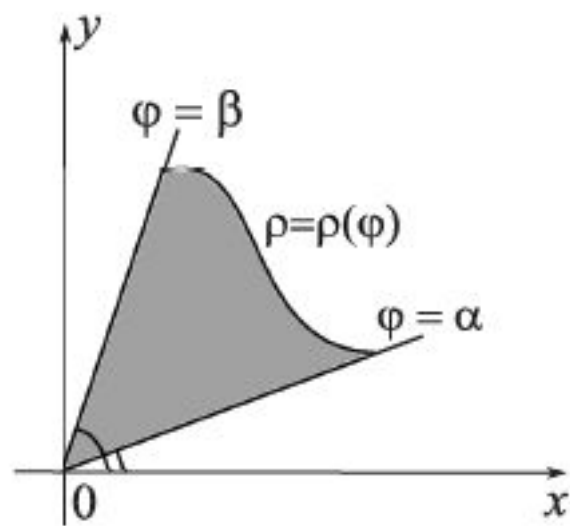
$$S = \int_c^d (x_2(y) - x_1(y)) dy.$$

Если кривая в плоскости Oxy задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ ($a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$), может быть найдена по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt.$$

Если кривая задана в полярной системе координат уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, то площадь криволинейного сектора, ограниченного этой кривой и двумя полярными лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, $\alpha < \beta$ находится по формуле

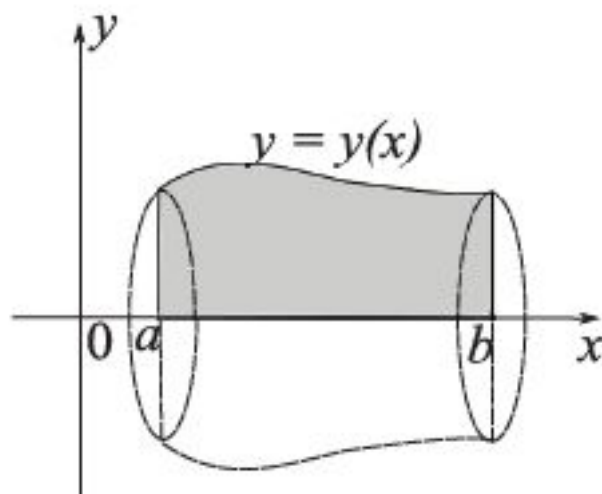
$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$



Объем тела вращения

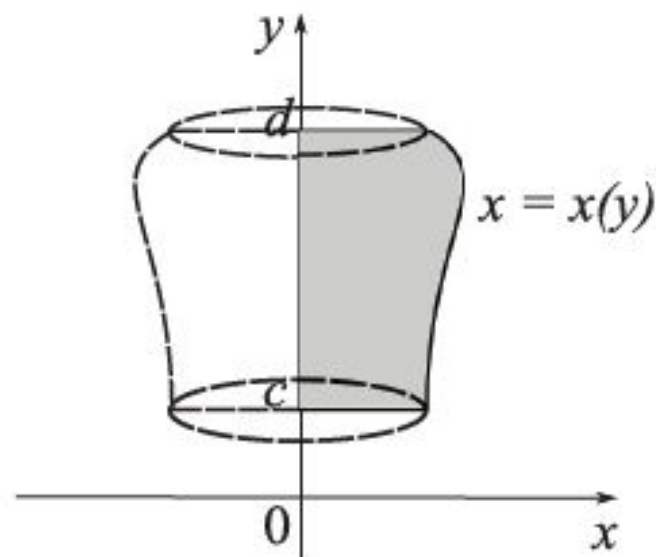
Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = y(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$, вращается вокруг оси Ox , то объем тела вращения может быть вычислен по формуле

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b y^2(x) dx.$$



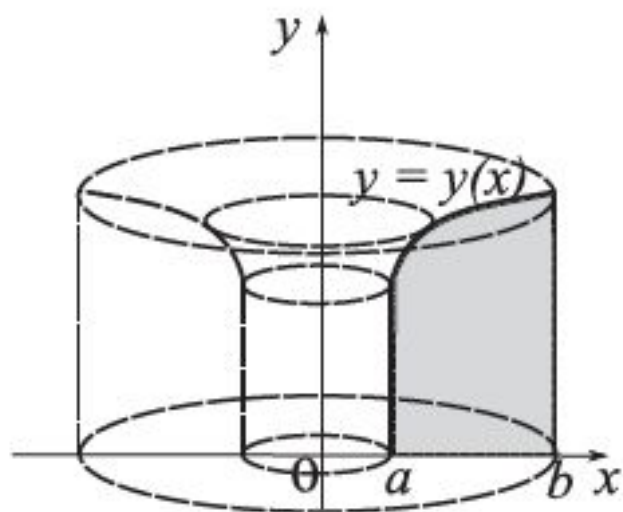
Аналогично, если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $x = x(y)$ и прямыми $y = c$, $y = d$, $x = 0$, вращается вокруг оси Oy , то объем тела вращения может быть вычислен по формуле

$$V_{Oy} = \pi \int_c^d x^2(y) dy.$$



Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = y(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$, вращается вокруг оси Oy , то объем тела вращения может быть вычислен по формуле

$$V_{Oy} = 2\pi \int_a^b x \cdot y(x) dx.$$



Длина дуги плоской кривой

Пусть кривая на плоскости задана уравнением $y = y(x)$ $x \in [a, b]$, причем $y(x)$ непрерывно дифференцируема на этом отрезке. Тогда длина соответствующей дуги этой кривой находится по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Если кривая в плоскости Oxy задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, причем $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции, то длина дуги этой кривой находится по формуле

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt.$$

Если кривая задана в полярной системе координат уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, длина дуги этой кривой находится по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi.$$

Площадь поверхности вращения

Пусть плоская кривая, заданная уравнением $y = y(x), x \in [a, b]$ (причем $y(x)$ непрерывно дифференцируема на этом отрезке), вращается вокруг оси Ox . Тогда площадь поверхности вращения находится по формуле

$$S_{Ox} = \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Если кривая в плоскости Oxy задана параметрическими уравнениями $x = x(t), y = y(t), t \in [t_1, t_2]$, причем $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции, то площадь поверхности вращения находится по формуле

$$S_{Ox} = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt.$$

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{3}$, $y = \frac{4}{x^2 + 4}$.

Решение

Найдем точки пересечения кривых:

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{3}, \\ y = \frac{4}{x^2 + 4}, \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{3} = \frac{4}{x^2 + 4}, \Rightarrow x^4 + 4x^2 - 12 = 0,$$

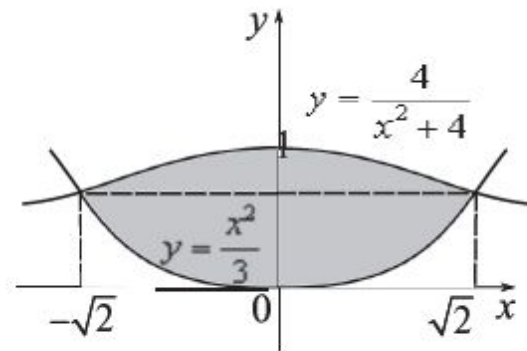
откуда $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$ и $y_1 = y_2 = \frac{2}{3}$.

Таким образом, данные кривые пересекаются в точках $A\left(\sqrt{2}, \frac{2}{3}\right)$ и $B\left(-\sqrt{2}, \frac{2}{3}\right)$.

Снизу фигура ограничена параболой $y = \frac{x^2}{3}$, сверху — кривой $y = \frac{4}{x^2 + 4}$. Значения переменной x принадлежат отрезку $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Тогда

$$S = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\frac{4}{x^2 + 4} - \frac{x^2}{3} \right) dx = \left(2 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \frac{x^3}{9} \right) \Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = 4 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{4\sqrt{2}}{9}.$$



Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x + 1$, $x - y - 1 = 0$.

Решение

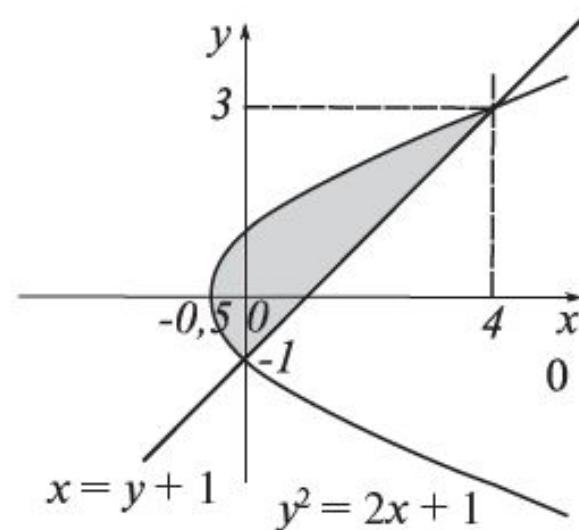
Первое уравнение задает параболу с вершиной в точке $(-0,5; 0)$, для которой ось Ox является осью симметрии. Второе уравнение задает прямую в плоскости Oxy .

Найдем точки пересечения кривых:

$$\begin{cases} y^2 = 2x + 1, \\ x = y + 1, \end{cases} \Rightarrow y^2 - 2y - 3 = 0,$$

откуда $y_1 = -1$, $y_2 = 3$ и $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

Таким образом, данные кривые пересекаются в точках $A(0, -1)$ и $B(4, 3)$.



Выразим переменную y из уравнений кривых: $y = \pm\sqrt{2x+1}$ и $y = x-1$.

Снизу фигура ограничена двумя линиями: частью параболы $y = -\sqrt{2x+1}$ и прямой $y = x-1$, сверху — параболой $y = \sqrt{2x+1}$, поэтому при вычислении площади нужно фигуру разбить на две части. Тогда площадь S такой фигуры есть сумма площадей двух фигур: $S = S_1 + S_2$, где

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-0,5}^0 (\sqrt{2x+1} - (-\sqrt{2x+1})) dx = \\ &= \int_{-0,5}^0 2\sqrt{2x+1} dx = \int_{-0,5}^0 \sqrt{2x+1} d(2x+1) = \\ &= \frac{2}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-0,5}^0 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$S_2 = \int_0^4 (\sqrt{2x+1} - (x-1)) dx = \frac{1}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 - \frac{(x-1)^2}{2} \Big|_0^4 = 4\frac{2}{3}.$$

$$\text{Тогда } S = \frac{2}{3} + 4\frac{2}{3} = 5\frac{1}{3}.$$

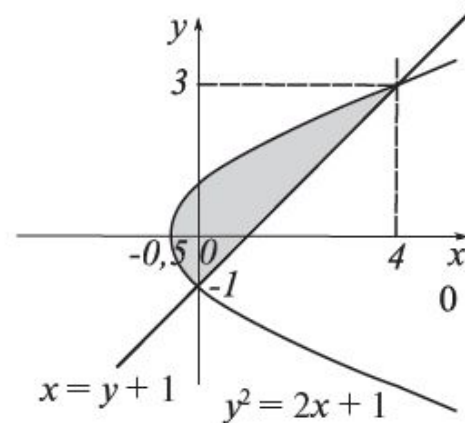
Однако при решении данной задачи удобнее воспользоваться формулой

$$S = \int_c^d (x_2(y) - x_1(y)) dy.$$

Выразим переменную x из уравнений кривых: $x = \frac{y^2-1}{2}$ и $x = y+1$.

$$\text{Тогда } S = \int_{-1}^3 \left(y+1 - \frac{y^2-1}{2} \right) dy = \left(\frac{(y+1)^2}{2} - \frac{y^3}{6} + \frac{y}{2} \right) \Big|_{-1}^3 = 5\frac{1}{3}.$$

При решении вторым методом вычислений значительно меньше, чем при решении первым.



Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной петлей линии:

$$\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$$

Решение

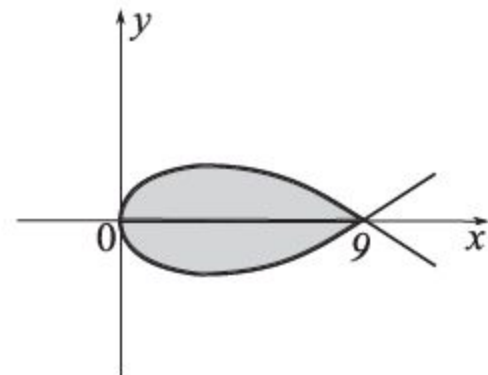
Для построения кривой проведем небольшое исследование. Найдем точки пересечения кривой с координатными осями:

$$x = 0 \text{ при } t_1 = 0,$$

$$y = 0 \text{ при } t_2 = 0, t_3 = \sqrt{3}, t_4 = -\sqrt{3}.$$

Получили координаты двух точек: $A(0;0)$, $B(9;0)$, причем точке B соответствуют два значения параметра, т. е. при движении по кривой точка B встречается дважды.

Заметим, что одному значению переменной x соответствуют два значения переменной y , отличающиеся знаком, т. е. данная кривая симметрична относительно оси Ox , причем $y \geq 0$ при $t \in (0, \sqrt{3})$ и $y \leq 0$ при $t \in (-\sqrt{3}, 0)$



Вычислим площадь фигуры, ограниченной верхней половиной петли линии и осью Ox :

$$S_1 = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t) dt = \int_0^{\sqrt{3}} (3t - t^3) \cdot 6t dt = 6 \int_0^{\sqrt{3}} (3t^2 - t^4) dt = 6 \left(t^3 - \frac{t^5}{5} \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{36\sqrt{3}}{5}.$$

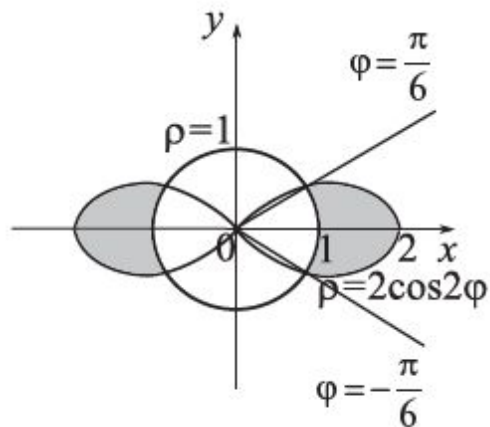
Тогда площадь всей фигуры равна: $S = 2S_1 = \frac{72\sqrt{3}}{5}$.

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\rho = 2 \cos 2\varphi$, $\rho = 1$ (вне окружности).

Решение

Построим фигуры, заданные в полярной системе координат: $\rho = 2 \cos 2\varphi$ — двухлепестковая роза, $\rho = 1$ — окружность. Найдем углы, под которыми пересекаются кривые:

$$2 \cos 2\varphi = 1 \Rightarrow \cos 2\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$$



Для вычисления площади фигуры воспользуемся формулой

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (\rho_2^2(\varphi) - \rho_1^2(\varphi)) d\varphi.$$

Так как фигура симметрична, вычислим площадь половины фигуры.

$$S_1 = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (4 \cos^2 2\varphi - 1) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} ((1 + \cos 4\varphi) - 1) d\varphi =$$

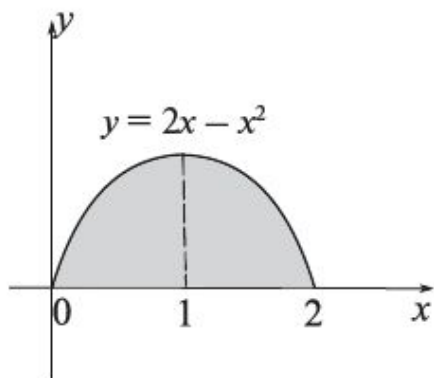
$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 4\varphi d\varphi = \frac{\sin 4\varphi}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Тогда площадь всей фигуры равна: $S = 2S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Пример 5. Вычислить объемы тел, полученных при вращении вокруг осей Ox и Oy криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$.

Решение

Построим криволинейную трапецию.



Для вычисления объема тела вращения вокруг оси Ox воспользуемся формулой

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b y^2(x) dx.$$

$$\begin{aligned} V_{Ox} &= \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx = \\ &= \pi \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_0^2 = \frac{16\pi}{5}. \end{aligned}$$

Для вычисления объема тела вращения вокруг оси Oy выразим переменную x из уравнения кривой: $x = 1 \pm \sqrt{1-y}$ (левая и правая ветви параболы). Тогда объем тела вращения вокруг оси Oy может быть найден как разность объемов тел, полученных вращением ветвей параболы вокруг оси Oy : $V_{Oy} = V_1 - V_2$.

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_c^d x_1^2(y) dy = \pi \int_0^1 (1 + \sqrt{1-y})^2 dy = \pi \int_0^1 (2 + 2\sqrt{1-y} - y) dy = \\ &= \pi \left(2y - \frac{4(1-y)^{3/2}}{3} - \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{17\pi}{6}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_2 &= \pi \int_c^d x_2^2(y) dy = \pi \int_0^1 (1 - \sqrt{1-y})^2 dy = \pi \int_0^1 (2 - 2\sqrt{1-y} - y) dy = \\
 &= \pi \left(2y + \frac{4(1-y)^{3/2}}{3} - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}.
 \end{aligned}$$

Тогда $V_{Oy} = V_1 - V_2 = \frac{17\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{8\pi}{3}$.

Однако в данном примере объем тела вращения вокруг оси Oy удобнее находить по формуле

$$V_{Oy} = 2\pi \int_a^b x \cdot y(x) dx.$$

$$V_{Oy} = 2\pi \int_0^2 x(2x - x^2) dx = 2\pi \int_0^2 (2x^2 - x^3) dx = 2\pi \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2 = \frac{8\pi}{3}.$$

Пример 6. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$ от точки $O(0,0)$ до точки $A(4,8)$.

Решение

Воспользуемся формулой: $l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$.

Для этого выразим переменную y через x : $y^2 = x^3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^3}$.

Нашему условию удовлетворяет функция $y = \sqrt{x^3}$, $x \in [0,4]$.

Тогда

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}, \quad \sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}x},$$

$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{8}{27} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2} \Big|_0^4 = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1).$$

Пример 7. Найти полную площадь поверхности тела, образованного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной линиями $y^2 = 2x$ и $2x = 3$.

Решение

Для вычисления объема тела вращения вокруг оси Oy выразим переменную y из уравнения кривой: $y = \pm\sqrt{2x}$. Так как кривая симметрична относительно оси Ox , то для получения соответствующей поверхности достаточно рассмотреть только верхнюю часть кривой: $y = \sqrt{2x}$.

Полная площадь поверхности тела может быть найдена как сумма площадей поверхностей, полученных вращением отрезка AB и дуги OA вокруг оси Ox , т. е. $S_{\text{полн}} = S_1 + S_2$.

При вращении отрезка вокруг оси Ox получим круг, поэтому $S_1 = S_{\text{круга}} = \pi R^2 = 3\pi$.

Площадь второй поверхности вращения найдем, воспользовавшись формулой

$$S_{Ox} = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

$$S_2 = 2\pi \int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{2x} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)^2} dx = 2\pi \int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{2x+1} dx = \frac{2\pi(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_0^{\frac{3}{2}} = \frac{14\pi}{3}.$$

$$\text{Таким образом, } S_{\text{полн}} = S_1 + S_2 = 3\pi + \frac{14\pi}{3} = \frac{23\pi}{3}.$$

Упражнения для самостоятельной подготовки

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x = \sqrt{4 - y^2}$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho = 1 + \sqrt{2} \cos \varphi$ и лежащей вне круга $\rho = 1$.

3. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$, $y = x$, $x = 0$, $x = 1$,

а) вокруг оси Ox ,

б) вокруг оси Oy .

4. Найти длину дуги кривой $x = \frac{t^6}{6}$, $y = 4 - \frac{t^4}{4}$ между точками пересечения с осью Ox .

