

# Логарифмические неравенства.

Преподаватель: Нургалиева Айнаш  
Кенжебековна

**Определение.** *Неравенство, содержащее переменную под знаком логарифма или в основании логарифма, называется логарифмическим неравенством.*

Всякое значение переменной, при котором данное логарифмическое неравенство обращается в верное числовое неравенство, называется *решением логарифмического неравенства.*

*Решить логарифмическое неравенство* – значит найти все его решения или доказать, что их нет.

Два логарифмических неравенства с одной переменной называются *равносильными*, если решения этих неравенств совпадают или оба не имеют решения.

Решение логарифмических неравенств в основном сводится к решению неравенств вида  $\log_a f(x) > \log_a g(x)$  ( $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ ) и  $\log_a f(x) < \log_a g(x)$  ( $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ ).

Для решения таких неравенств, учитывая область определения логарифмической функции и ее свойства, воспользуемся следующими утверждениями:

1) при  $a > 1$  неравенство  $\log_a f(x) > \log_a g(x)$  равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x); \end{cases} \quad (1)$$

2) при  $0 < a < 1$  неравенство  $\log_a f(x) > \log_a g(x)$  равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases} \quad (2)$$

# Пример1

## ПРИМЕР

1. Решим неравенство  $\log_{\frac{1}{3}}(2x + 5) < -2$ .

*Решение.* Преобразуем правую часть неравенства, т. е. число  $-2$  запишем через логарифм по основанию  $\frac{1}{3}$ . Тогда:  $-2 = \log_{\frac{1}{3}} 9$ . Соответственно, исходное

неравенство примет вид:  $\log_{\frac{1}{3}}(2x + 5) < \log_{\frac{1}{3}} 9$ . Здесь

$a = \frac{1}{3}$ , т. е.  $a \in (0; 1)$ , поэтому, используя систему неравенств вида (2), запишем:

$$\begin{cases} 2x + 5 > 0, \\ 2x + 5 > 9 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x > -\frac{5}{2}, \\ x > 2. \end{cases}$$

Решением последней системы неравенств будет промежуток  $(2; +\infty)$  (рис. 68).

*Ответ:*  $(2; +\infty)$ .

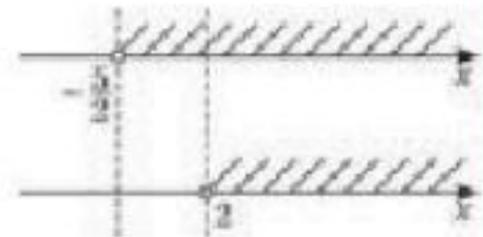


Рис. 68

## Пример2

### ПРИМЕР

2. Решим неравенство  $\lg(x + 1) < 1 - \lg(2x - 6)$ .

*Решение.* Логарифмы имеют смысл при  $x + 1 > 0$  и  $2x - 6 > 0$ .

Преобразуем данное неравенство, используя свойства логарифмов:

$$\lg(x + 1) + \lg(2x - 6) < 1, \lg((x + 1)(2x - 6)) < \lg 10.$$

В полученном неравенстве  $a = 10$ , поэтому заданное неравенство будет равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} x + 1 > 0, \\ 2x - 6 > 0, \\ (x + 1)(2x - 6) < 10 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x > -1, \\ x > 3, \\ (x - 4)(x + 2) < 0. \end{cases}$$

Изображая решение каждого неравенства системы неравенств по отдельности на координатной прямой (рис. 69), находим общую часть. Таким образом, решением данного неравенства является промежуток  $(3; 4]$ .

*Ответ:*  $(3; 4]$ .

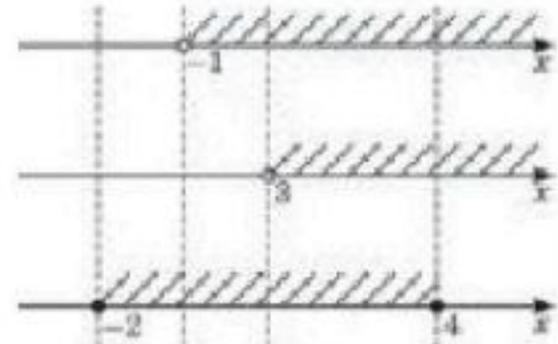


Рис. 69

## Пример2

### ПРИМЕР

3. Решим неравенство  $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 4x > 1$ .

*Решение.* По определению логарифмической функции, основания  $x$  и  $2x$  должны быть положительными и не равными 1, следовательно,  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ ,  $x \neq \frac{1}{2}$ .

Приведем все логарифмы к одному основанию, равному 2:

$$\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}; \log_{2x} 2 = \frac{1}{\log_2 2x} = \frac{1}{1 + \log_2 x}.$$

С учетом последних двух равенств исходное неравенство примет вид:

$$\frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{1 + \log_2 x} \cdot (2 + \log_2 x) > 1,$$

поскольку  $\log_2 4x = \log_2 4 + \log_2 x = 2 + \log_2 x$ .

Введем обозначение  $\log_2 x = t$ , тогда:  $\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1+t} \cdot (2+t) > 1$ , откуда

$$\frac{-t^2 + 2}{t(t+1)} > 0 \text{ или } \frac{t^2 - 2}{t(t+1)} < 0.$$

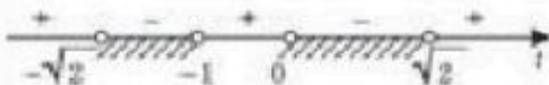


Рис. 70

Заменяя  $t$  на  $\log_2 x$ , имеем:

- 1)  $-\sqrt{2} < \log_2 x < -1$  или  $\log_2 2^{-\sqrt{2}} < \log_2 x < \log_2 \frac{1}{2}$ , откуда  $2^{-\sqrt{2}} < x < \frac{1}{2}$ ;
- 2)  $0 < \log_2 x < \sqrt{2}$  или  $\log_2 1 < \log_2 x < \log_2 2^{\sqrt{2}}$ , откуда  $1 < x < 2^{\sqrt{2}}$ .

Решив последнее неравенство методом интервалов, находим:  $-\sqrt{2} < t < -1$ ;  $0 < t < \sqrt{2}$  (рис. 70).

$$\text{Ответ: } \left(2^{-\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(1; 2^{\sqrt{2}}\right).$$

## Пример2

### ПРИМЕР

4. Найдем область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{10 + 3x - x^2}}{\log_3(x^2 - 2x) - 1}.$$

*Решение.* Данная функция является алгебраической дробью, поэтому  $\log_3(x^2 - 2x) - 1 \neq 0$ .

Выражение  $10 + 3x - x^2$  находится под квадратным корнем, поэтому должно быть  $10 + 3x - x^2 > 0$  или  $x^2 - 3x - 10 < 0$ .

Учитывая область определения логарифмической функции, имеем следующую систему:

$$\begin{cases} \log_3(x^2 - 2x) - 1 \neq 0, \\ x^2 - 2x > 0, \\ x^2 - 3x - 10 < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \neq 0, \\ x(x - 2) > 0, \\ (x + 2)(x - 5) < 0. \end{cases}$$

Из первого соотношения:  $x \neq -1$  и  $x \neq 3$ .

Решая второе и третье неравенства последней системы неравенств методом интервалов, имеем:  $x \in [-2; 0) \cup (2; 5]$  (рис. 71). Затем из этих промежутков, исключая  $x = 3$  и  $x = -1$ , получим промежутки, являющиеся областью определения данной функции.

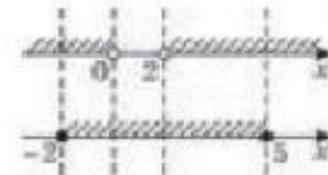


Рис. 71

Ответ:  $[-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (2; 3) \cup (3; 5]$ .

## Домашнее задание :

Изучить видеоурок

Написать конспект с презентации

Решить задачи №26.1(1,2)-№26-6 (1,2)

Решите логарифмические неравенства (26.1—26.4):

26.1. 1)  $\log_5(3 + 8x) > 0;$

2)  $\log_{\frac{1}{3}}(7 - x) > -2;$

3)  $\log_2(x - 3) < 3;$

4)  $\lg(4x - 1) < 1.$

26.2. 1)  $\log_2(2x + 5) > \log_2(x - 7);$

2)  $\log_5(3x - 2) > \log_5(x + 6);$

3)  $\log_3(3x - 1) < \log_3(2x + 3);$

4)  $\log_{\frac{1}{9}}(4x - 3) > \log_{\frac{1}{9}}(x + 3).$

26.3. 1)  $\log_2(2x - 1) > \log_2(x + 1);$

2)  $\log_5(3x + 1) > \log_5(x - 2);$

3)  $\log_{\frac{1}{7}}(12 - x) > -2;$

4)  $\log_{0,2}(x - 2) > \log_{0,2}(3 - x).$

26.4. 1)  $\log_2^2 x + \log_2 x - 2 < 0;$

2)  $\log_{0,2}^2 x - 5\log_{0,2} x < -6;$

3)  $\log_{0,1}^2 x + 3\log_{0,1} x > 4;$

4)  $2 - \lg^2 x > \lg x.$

26.6. Найдите область определения функции  $y = f(x)$ :

1)  $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \frac{2x}{x-1}};$

2)  $f(x) = \sqrt{\log_3 \frac{x-1}{x+5}}.$