Логарифмические неравенства.

Преподаватель: Нургалиева Айнаш
Кенжебековна

Определение. *Неравенство, содержащее переменную под знаком логарифма или в основании логарифма, называется* ***логарифмическим неравенством.***

Всякое значение переменной, при котором данное логарифмическое неравенство обращается в верное числовое неравенство, называется *решением логарифмического неравенства.*

Решить логарифмическое неравенство – значит найти все его решения или доказать, что их нет.

Два логарифмических неравенства с одной переменной называются *равносильными*, если решения этих неравенств совпадают или оба не имеют решения.

Решение логарифмических неравенств в основном сводится к решению неравенств вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ ($\log_a f(x) \geq \log_a g(x)$) и $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ ($\log_a f(x) \leq \log_a g(x)$).

Для решения таких неравенств, учитывая область определения логарифмической функции и ее свойства, воспользуемся следующими утверждениями:

1) при $a > 1$ неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x); \end{cases} \tag{1}$$

2) при $0 < a < 1$ неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases} \tag{2}$$

Пример1

ПРИМЕР

1. Решим неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(2x+5) < -2$.

Решение. Преобразуем правую часть неравенства, т. е. число -2 запишем через логарифм по основанию $\frac{1}{3}$. Тогда: $-2 = \log_{\frac{1}{3}} 9$. Соответственно, исходное неравенство примет вид: $\log_{\frac{1}{3}}(2x+5) < \log_{\frac{1}{3}} 9$. Здесь $a = \frac{1}{3}$, т. е. $a \in (0;\ 1)$, поэтому, используя систему неравенств вида (2), запишем:

$$\begin{cases} 2x+5>0, \\ 2x+5>9 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x > -\dfrac{5}{2}, \\ x > 2. \end{cases}$$

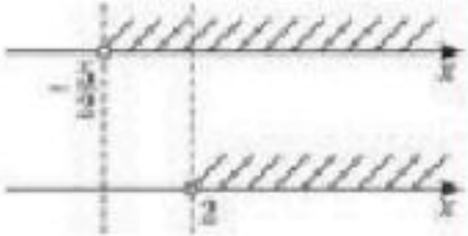

Рис. 68

Решением последней системы неравенств будет промежуток $(2;\ +\infty)$ (рис. 68).

Ответ: $(2;\ +\infty)$.

Пример2

ПРИМЕР **2.** Решим неравенство $\lg(x+1) < 1 - \lg(2x-6)$.

Решение. Логарифмы имеют смысл при $x + 1 > 0$ и $2x - 6 > 0$.

Преобразуем данное неравенство, использовав свойства логарифмов:

$$\lg(x+1) + \lg(2x-6) < 1,\ \lg((x+1)(2x-6)) < \lg 10.$$

В полученном неравенстве $a = 10$, поэтому заданное неравенство будет равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} x + 1 > 0, \\ 2x - 6 > 0, \\ (x+1)(2x-6) \leqslant 10 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x > -1, \\ x > 3, \\ (x-4)(x+2) \leqslant 0. \end{cases}$$

Изображая решение каждого неравенства системы неравенств по отдельности на координатной прямой (рис. 69), находим общую часть. Таким образом, решением данного неравенства является промежуток $(3; 4]$.

Ответ: $(3; 4]$.

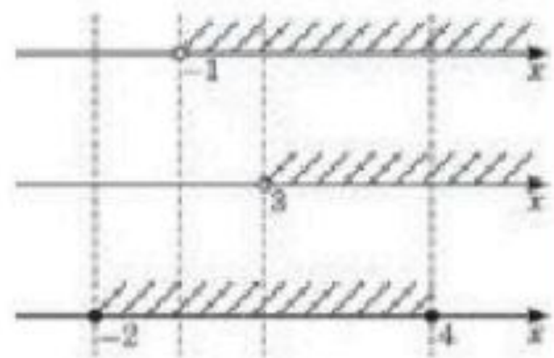

Рис. 69

Пример2

ПРИМЕР **3.** Решим неравенство $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 4x > 1$.

Решение. По определению логарифмической функции, основания x и $2x$ должны быть положительными и не равными 1, следовательно, $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq \frac{1}{2}$.

Приведем все логарифмы к одному основанию, равному 2:

$$\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x};\ \log_{2x} 2 = \frac{1}{\log_2 2x} = \frac{1}{1 + \log_2 x}.$$

С учетом последних двух равенств исходное неравенство примет вид:

$$\frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{1 + \log_2 x} \cdot (2 + \log_2 x) > 1,$$

поскольку $\log_2 4x = \log_2 4 + \log_2 x = 2 + \log_2 x$.

Введем обозначение $\log_2 x = t$, тогда: $\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1+t} \cdot (2 + t) > 1$, откуда

$$\frac{-t^2 + 2}{t(t+1)} > 0 \text{ или } \frac{t^2 - 2}{t(t+1)} < 0.$$

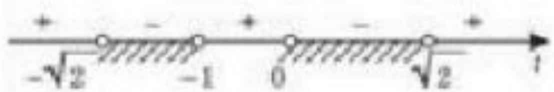

Рис. 70

Решив последнее неравенство методом интервалов, находим: $-\sqrt{2} < t < -1$; $0 < t < \sqrt{2}$ (рис. 70).

Заменив t на $\log_2 x$, имеем:

1) $-\sqrt{2} < \log_2 x < -1$ или $\log_2 2^{-\sqrt{2}} < \log_2 x < \log_2 \frac{1}{2}$, откуда $2^{-\sqrt{2}} < x < \frac{1}{2}$;

2) $0 < \log_2 x < \sqrt{2}$ или $\log_2 1 < \log_2 x < \log_2 2^{\sqrt{2}}$, откуда $1 < x < 2^{\sqrt{2}}$.

Ответ: $\left(2^{-\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(1; 2^{\sqrt{2}}\right)$.

Пример2

ПРИМЕР **4. Найдем область определения функции**

$$y = \frac{\sqrt{10 + 3x - x^2}}{\log_3\left(x^2 - 2x\right) - 1}.$$

Решение. Данная функция является алгебраической дробью, поэтому $\log_3(x^2 - 2x) - 1 \neq 0$.

Выражение $10 + 3x - x^2$ находится под квадратным корнем, поэтому должно быть $10 + 3x - x^2 > 0$ или $x^2 - 3x - 10 < 0$.

Учитывая область определения логарифмической функции, имеем следующую систему:

$$\begin{cases} \log_3\left(x^2 - 2x\right) - 1 \neq 0, \\ x^2 - 2x > 0, \\ x^2 - 3x - 10 < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \neq 0, \\ x(x - 2) > 0, \\ (x + 2)(x - 5) < 0. \end{cases}$$

Из первого соотношения: $x \neq -1$ и $x \neq 3$.

Решая второе и третье неравенства последней системы неравенств методом интервалов, имеем: $x \in [-2;\ 0) \cup (2;\ 5]$ (рис. 71). Затем из этих промежутков, исключая $x = 3$ и $x = -1$, получим промежутки, являющиеся областью определения данной функции.

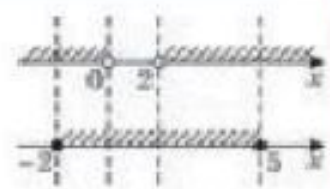

Рис. 71

Ответ: $[-2;-1) \cup (-1;\ 0) \cup (2;\ 3) \cup (3;\ 5]$.

Домашнее задание :

Изучить видеоурок

Написать конспект с презентации

Решить задачи №26.1(1,2)-№26-6 (1,2)

Решите логарифмические неравенства (**26.1—26.4**):

26.1. 1) $\log_5(3 + 8x) > 0$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}(7 - x) > -2$;

3) $\log_2(x - 3) < 3$; 4) $\lg(4x - 1) < 1$.

26.2. 1) $\log_2(2x + 5) > \log_2(x - 7)$; 2) $\log_5(3x - 2) > \log_5(x + 6)$;

3) $\log_3(3x - 1) < \log_3(2x + 3)$; 4) $\log_{\frac{1}{9}}(4x - 3) \geq \log_{\frac{1}{9}}(x + 3)$.

26.3. 1) $\log_2(2x - 1) > \log_2(x + 1)$; 2) $\log_5(3x + 1) > \log_5(x - 2)$;

3) $\log_{\frac{1}{7}}(12 - x) \geq -2$; 4) $\log_{0,2}(x - 2) > \log_{0,2}(3 - x)$.

26.4. 1) $\log_2^2 x + \log_2 x - 2 \leq 0$; 2) $\log_{0,2}^2 x - 5\log_{0,2} x < -6$;

3) $\log_{0,1}^2 x + 3\log_{0,1} x > 4$; 4) $2 - \lg^2 x \geq \lg x$.

26.6. Найдите область определения функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \frac{2x}{x - 1}}$; 2) $f(x) = \sqrt{\log_3 \frac{x - 1}{x + 5}}$.