# Лекция № 2.
# Тема: «Основные понятия теории множеств, комбинаторики, теории вероятности»

**Специальность: «Лечебное дело»**

**Курс: 2**

**Дисциплина: «Математика»**

Подготовила: преподаватель высшей категории
Фёдорова Олеся Николаевна

**Калуга 2021 год**

# Множества
# и операции над ними

**Множество** – это любая совокупность, объединение некоторых объектов произвольной природы.

Объекты, входящие в  множество, называются элементами множества

Объекты объединяются в множество по некоторому правилу, следуя которому любой объект, который может быть рассмотрен, однозначно относится к данному множеству или не относится

Множества бывают конечными и бесконечными

Множества обозначаются прописными буквами – A, B, C, …

Элементы множеств – строчными: a, z, x

Принадлежность элемента множеству обозначается символом: $z \in A$, $x \notin C$

Если каждый элемент множества А является одновременно элементом множества В, то множество А является подмножеством множества В, $A \subseteq B$

Если в множестве В есть элементы не принадлежащие множеству А (т.е. А и В не совпадают), то $A \subset B$

Для любого множества можно рассмотреть множество всех его подмножеств $\rho(A)$ – одноэлементные подмножества, пары элементов, тройки и т.д. и всё множество в целом

Существует множество, в котором нет ни одного элемента – пустое множество $\varnothing$.

Пустое множество является подмножеством любого множества

# Операции над множествами

1. Сумма или объединение двух множеств $\cup$

   Суммой двух множеств $A \cup B$ является множество, каждый элемент которого принадлежит либо множеству A, либо множеству B

2. Произведение двух множеств $\cap$

   Произведением двух множеств $A \cap B$ является множество, каждый элемент которого принадлежит как множеству A, так и множеству B

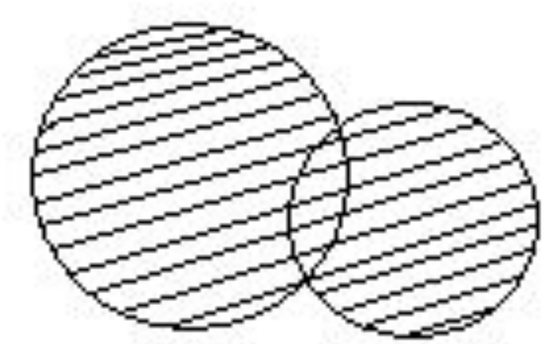
   Пересечение двух множеств может являться пустым множеством $\varnothing$

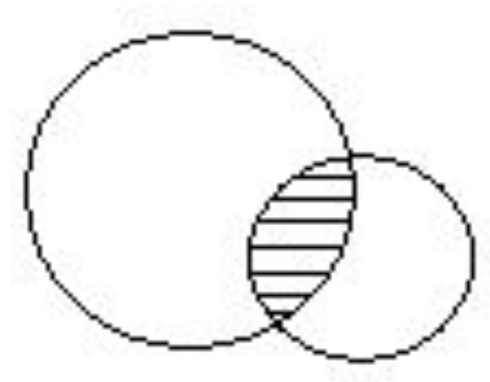
## 3. Разность множеств \

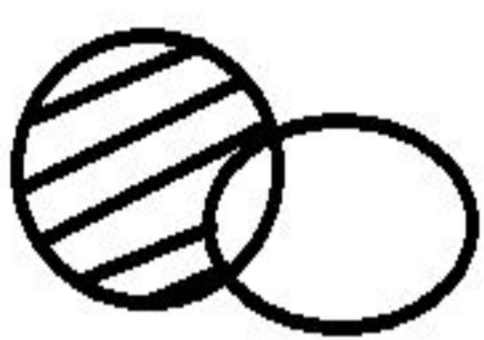
Разностью двух множеств A\B называется множество состоящее из элементов множества A, не принадлежащих множеству B.

Если $B \subset A$, то разность A\B называют дополнением множества B в множестве A и обозначают $B'_A$.

# Изображение операций (диаграммы Эйлера)







# Основные понятия теории графов

**Граф** – это совокупность конечного числа точек, называемых вершинами графа, и попарно соединяющих некоторые из этих вершин линий, называемых ребрами или дугами графа.

Другая формулировка: **графом** называется непустое множество точек (вершин) и отрезков (ребер), оба конца которых принадлежат заданному  множеству точек

Вершины графа мы будем обозначать латинскими буквами A, B, C, D.

Иногда граф в целом будем обозначать одной заглавной буквой.

Вершины графа, которые не принадлежат ни одному ребру, называются **изолированными**.

Граф, состоящий только из изолированных вершин, называется **нуль-графом**.

Если две вершины соединены направленным отрезком, то пара называется **упорядоченной**, а отрезок называется **ребром** графа. Если вершины соединены ненаправленным отрезком, то вершины называются **неупорядоченными**, отрезок, их соединяющий, называется **дугой**.

Граф, содержащий только ребра, называется **ориентированным**.

Граф, содержащий только дуги, называется **неориентированным**.

Пара вершин может соединяться двумя или более ребрами одного направления, такие ребра называются **кратными**.

Дуга или ребро может начинаться или заканчиваться в одной вершине, такие дуги называются **петлями**. Считается, что длина петли равна 1.

Вершины, соединенные ребром или дугой называются **смежными**.

Дуги, имеющие общие вершины называются **смежными**.

Ребро и любая из двух ее вершин называется **инцидентными**.

**Подграфом** $G_A$ графа G=(X,Г) называется граф, в который входит лишь часть вершин графа G, образующих множество A вместе с дугами, соединяющими эти вершины.

**Частичным графом** $G_A$ графа G=(X,Г) называется граф, содержащий все вершины графа и только часть дуг графа.

Граф, в котором каждая пара вершин соединена ребром, называется **полным.**

Такой граф можно представить как n–угольник, в котором проведены все диагонали.

**Степенью вершины** называется число ребер, которым принадлежит вершина.

Обозначение: р (А) – степень вершины А.

Граф, степени всех k вершин которого одинаковы, называется **однородным графом степени k.**

**Дополнением данного графа** называется граф, состоящий из всех ребер и их концов, которые необходимо добавить к исходному графу, чтобы получить полный граф.

Граф, который можно представить на плоскости в таком виде, когда его ребра пересекаются только в вершинах, называется **плоским.**

**Путем от А до Х** называется последовательность ребер, ведущая от А к Х, такая, что каждые два соседних ребра имеют общую вершину, и никакое ребро не встречается более одного раза.

**Циклом** называется путь, в котором совпадают начальная и конечная точка.

**Простым циклом** называется цикл, не проходящий ни через одну из вершин графа более одного раза.

**Длиной пути,** проложенного на цикле, называется число ребер этого пути.

Две вершины А и В в графе называются **связными (несвязными),** если в нем существует (не существует) путь, ведущий из А в В.

**Граф называется связным,** если каждые две его вершины связны; если же в графе найдется хотя бы одна пара несвязных вершин, то граф называется **несвязным.**

**Деревом** называется связный граф, не содержащий циклов.

1. имеется в точности один узел, называемый корнем, в который не входит ни одно ребро,

2. В каждый узел, кроме корня, входит ровно одно ребро,

3. Из корня к каждому узлу идет путь - единственный.

Деревья являются простейшим видом связных графов. Любое дерево с **n** вершинами содержит **n-1** ребер. Число различных деревьев, которые можно построить на n вершинах равно.

Дерево с одной выделенной вершиной называется **корневым деревом**.

Ориентированный граф, состоящий из нескольких деревьев, называется **лесом**.

# Основные теоремы теории графов

**Теорема 1.** Удвоенная сумма степеней вершин любого графа равна числу его ребер.

**Теорема 2.** Число нечетных вершин любого графа четно.

Следствие 1. Нечетное число знакомых в любой компании всегда четно.

Следствие 2. Число вершин многогранника, в которых сходится нечетное число ребер, четно.

Следствие 3. Число всех людей, когда-либо пожавших руку другим людям, нечетное число раз, является четным.

**Теорема 3.** Во всяком графе с *n* вершинами, где *n* больше или равно 2, всегда найдутся две или более вершины с одинаковыми степенями.

**Теорема 4.** Если в графе с *n* вершинами (*n* больше или равно 2) только одна пара имеет одинаковую степень, то в этом графе всегда найдется либо единственная изолированная вершина, либо единственная вершина, соединенная со всеми другими.

**Теорема 5.** Если у графа все простые циклы четной длины, то он не содержит ни одного цикла четной длины.

**Теорема 6.** Для того, чтобы граф был эйлеровым, необходимо и достаточно, чтобы он был связным и все его вершины имели четную степень.

**Теорема 7.** Для того чтобы на связном графе можно было бы проложить цепь *AB*, содержащую все его ребра в точности по одному разу, необходимо и достаточно, чтобы *A* и *B* были единственными нечетными вершинами этого графа.

**Теорема 8.** Полный граф с пятью вершинами не является плоским.

# Элементы комбинаторики

Комбинаторика – раздел математики, в котором изучаются способы пересчета комбинаций элементов, удовлетворяющих тем или иным условиям.

**комбинации**

**Без повторений**

**Каждый элемент входит в комбинацию не более, чем один раз**

**С повторениями**

**Есть элемент, который встречается более одного раза**

# Типы комбинаций

Характеристики **состав и порядок**

**1 тип.** Важен и состав, и порядок (выбрать, разместить) – **Размещения**
**2 тип.** Важен только порядок (все элементы участвуют в комбинации) – **Перестановки**
**3 тип.** Важен только состав (нет первого элемента, последовательность не важна) – **Сочетания**

**1 и 2 тип – упорядоченные комбинации**

# Понятие факториала

**Факториал** – это произведение всех натуральных чисел до указанного числа n.

$$\boxed{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}$$

$$\boxed{0! = 1}$$

**Пример.**

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

# Формулы комбинаций без повторений

Размещения.

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Перестановки.

$$\boxed{P_n = n!}$$

Сочетания.

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

## Пример.

$$A_8^5 = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 6720$$

$$P_8 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 = 40320$$

$$C_8^5 = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8!}{5!\cdot 3!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 56$$

# Формулы комбинаций с повторениями

Размещения.

$$\overline{A_n^k} = n^k$$

Перестановки.

$$\overline{P_n} = \frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_k!}$$

Сочетания.

$$\overline{C_n^k} = \frac{(k+n-1)!}{(n-1)!\cdot k!}$$

# Элементы теории вероятности

Комплекс условий, который может повторяться мысленно бесконечно много раз (опыт, эксперимент) – **S**

Случайное событие, происходящее или не происходящее в  данном опыте – **A**

Пример.

S – бросаем монетку

A – выпала «решка»

B – выпал «орел»

# Виды случайных событий

Событие называется достоверным, если оно происходит при каждом испытании в данном эксперименте

Событие называется невозможным, если оно не происходит ни при одном испытании в данном опыте

Пример.

А – наступление дня после ночи, В – выпадение цифры 5 при подбрасывании 10 копеечной монеты

События А и В называются несовместными, если появление одного из них в результате опыта исключает появление другого события

События А и В называются совместными, если появления одного из них не исключает появление другого события

Пример.

А – выпала «решка», В – выпал «орел»

А – досталась конфетка с полки, В – досталась ириска

События называются противоположными (взаимно – дополнительными), если не появление одного из них в результате опыта влечет появление другого

События называются благоприятствующими, если появление одного из них в результате эксперимента влечет появление другого события

Пример.

А – поставлена удовлетворительная оценка, В – поставлена неудовлетворительная оценка

А – все сессионные оценки удовлетворительные, В – начисление стипендии

События называются равновозможными, если по условию данного опыта нет оснований считать одно из них более возможным, чем второе

Пример.

А – выпала «решка», В – выпал «орел»

# Операции над событиями

**Сумма событий**

Суммой событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из данных событий

**Произведение событий**

Произведением событий называется событие, состоящее в совместном наступлении всех данных событий

Пример.

1) A – досталась ириска, B – досталась шоколадная, C – досталась карамелька

*Находим сумму двух событий:*

A+B – досталась не карамелька

A+C – досталась не шоколадная

B+C – досталась не ириска

2) A – вынули карту пиковой масти, B – вынули даму

*Находим произведение событий:*

AB – вынули даму пик

# Вероятность события

Рассмотрим эксперимент S, с равновозможными исходами. Случайному событию A *благоприятствует k исходов* (исходы, когда A наступает) и *не благоприятствует n-k исходов*

***Вероятностью события A** называется отношение числа благоприятствующих исходов к числу всех исходов данного эксперимента*

*n – число всех исходов, k – число благоприятствующих исходов*

## *Вероятность события* $\boxed{P(A) = \frac{k}{n}}$

$$0 \le k \le n \;\Rightarrow 0 \le P(A) \le 1$$

,

P (невозможное) = 0
P (достоверное) = 1

Пример
S – бросание игральной кости, A – число выпавших очков кратно 3, B – выпало простое число

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

# Теоремы и формулы теории вероятности

Теорема 1: Вероятность суммы двух несовместных событий равно сумме вероятностей этих событий

$$\boxed{P(A+B) = P(A) + P(B)}$$

Следствие: сумма вероятностей противоположных событий равна 1

$$\boxed{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$$

Теорема 2: Вероятность суммы двух произвольных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)}$$

# Условная вероятность события А при условии В

Рассмотрим опыт и связанные с ним события А и В

Событию В благоприятствует $l$ исходов, Произведению событий АВ благоприятствует $q$ исходов

Отношение $\frac{q}{l}$ называется условной вероятностью события А при условии В

$$\boxed{P(A/B)=\frac{q}{l}}$$

## Пример.

S – бросание игральной кости

B – выпадает четное число очков

A – выпадает шестерка

B благоприятствует три исхода $l = 3$

AB благоприятствует один исход $q = 1$

Вероятность события A при условии B

$$\frac{q}{l} = \frac{1}{3}$$

Теорема 3: Для условной вероятности P(A/B) справедливы формулы

$$\boxed{P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}}\qquad \boxed{P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}}$$

Теорема 4: Вероятность произведения двух произвольных событий равна вероятности одного из этих событий, умноженное на условную вероятность другого при условии, что первое произошло

$$\boxed{P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B)}$$

# Независимые события

Событие А называется независимым от события В, если условная вероятность события А при условии В равна вероятности события А

$$\boxed{P(A/B) = P(A)}$$

В противном случае события называются зависимыми

## Пример.

S – из колоды в 36 карт вытаскивают одну наугад

A – вытаскивают туз, B – вытаскивают карту красной масти

Выяснить, независимы ли события A и B

Всего 36 исходов, событию A благоприятствует 4 исхода

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Событию B благоприятствует 18 исходов, событию AB благоприятствует 2 исхода

$$P(A/B) = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

$$P(A) = P(A/B) \Rightarrow$$ события независимы

Теорема 5: Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий

$$\boxed{P(AB) = P(A) \cdot P(B)}$$

# Случайные величины

Случайная величина, связанная с некоторым опытом – это величина, которая при осуществлении этого опыта принимает то или иное числовое значение

Пример.

Наружный диаметр трубы, число родившихся в течении суток в разных странах

X – случайная величина

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ – её значения

$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ – вероятности значений

Закон распределения случайной величины (если известны все значения и все вероятности)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | … | $x_{n-1}$ | $x_n$ |
| $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | … | $p_{n-1}$ | $p_n$ |

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = 1$$

## Пример.

X – число очков выпавших при подбрасывании игральной кости

Закон распределения

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 |

# Числовые характеристики случайной величины

## 1. Математическое ожидание

Это число, равное сумме произведений всех значений величины на вероятности этих значений, MX

$$\boxed{MX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n}$$

Математическое ожидание *указывает некоторое среднее число*, около которого группируются все значения случайной величины

Пример.

$$MX = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 4 + \frac{1}{6}\cdot 5 + \frac{1}{6}\cdot 6 = \frac{1}{6}\cdot 21 = 3{,}5$$

## 2. Дисперсия

Это математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания, DX

$$\boxed{DX = M\left(X - MX\right)^2}$$

$$\boxed{DX = p_1\left(x_1 - MX\right)^2 + p_2\left(x_2 - MX\right)^2 + \ldots + p_n\left(x_n - MX\right)^2}$$

Дисперсия случайной величины *характеризует степень разброса*, рассеивания случайной величины относительно её математического ожидания

Пример.

Закон распределения случайной величины:

| | | | |
|---|---|---|---|
| -2 | -1 | 1 | 2 |
| 1/6 | 1/3 | 1/3 | 1/6 |

Найдем математическое ожидание и дисперсию

$$MX = -2 \cdot \frac{1}{6} + (-1) \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{6} = 0$$

$$DX = (-2-0)^2 \cdot \frac{1}{6} + (-1-0)^2 \cdot \frac{1}{3} + (1-0)^2 \cdot \frac{1}{3} + (2-0)^2 \cdot \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{4}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{6} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$$