

Лекция № 2.

Тема: «Основные понятия теории множеств, комбинаторики, теории вероятности»



Специальность: «Лечебное дело»

Курс: 2

Дисциплина: «Математика»

Подготовила: преподаватель высшей категории
Фёдорова Олеся Николаевна

Калуга 2021 год

Множества и операции над ними

Множество – это любая совокупность, объединение некоторых объектов произвольной природы.

Объекты, входящие в множество, называются **элементами множества**

Объекты объединяются в множество по **некоторому правилу**, следуя которому любой объект, который может быть рассмотрен, однозначно **относится к данному множеству или не относится**

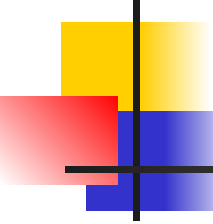


Множества бывают **конечными** и **бесконечными**

Множества обозначаются **прописными буквами** –
A, B, C, ...

Элементы множеств – **строчными**: a, z, x

Принадлежность элемента множеству
обозначается символом: $z \in A, x \notin C$



Если каждый элемент множества A является одновременно элементом множества B , то множество A является **подмножеством** множества B , $A \subseteq B$

Если в множестве B есть элементы не принадлежащие множеству A (т.е. A и B не совпадают), то $A \subset B$

Для любого множества можно рассмотреть **множество всех его подмножеств** $\rho(A)$ – одноэлементные подмножества, пары элементов, тройки и т.д. и всё множество в целом

Существует множество, в котором нет ни одного элемента – **пустое множество** \emptyset .

Пустое множество является **подмножеством любого множества**

Операции над множествами



1. Сумма или объединение двух множеств \cup

Суммой двух множеств $A \cup B$ является множество, каждый элемент которого принадлежит либо множеству A , либо множеству B

2. Произведение двух множеств \cap

Произведением двух множеств $A \cap B$ является множество, каждый элемент которого принадлежит как множеству A , так и множеству B

Пересечение двух множеств может являться **пустым множеством** \emptyset

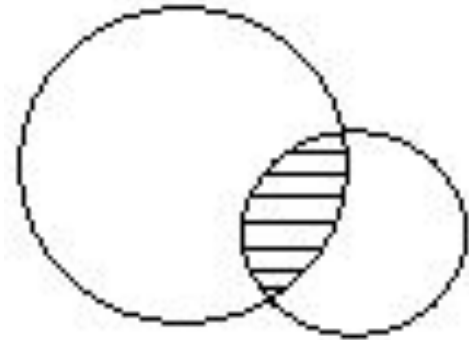
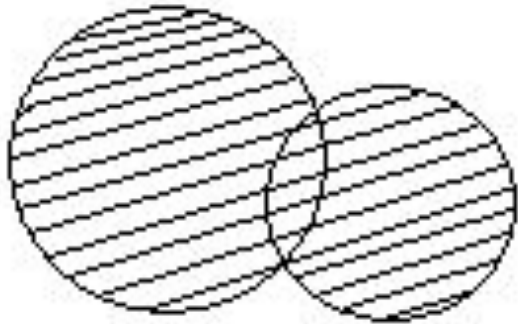


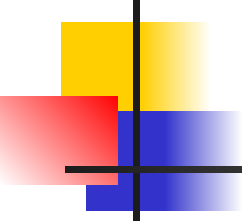
3. Разность множеств \

Разностью двух множеств $A \setminus B$ называется множество состоящее из элементов множества A , не принадлежащих множеству B .

Если $B \subset A$, то разность $A \setminus B$ называют **дополнением** множества B в множестве A и обозначают B'_A .

Изображение операций (диаграммы Эйлера)

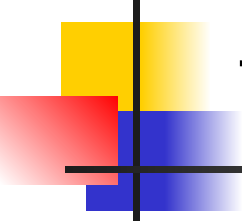




Основные понятия теории графов

Граф — это совокупность конечного числа точек, называемых вершинами графа, и попарно соединяющих некоторые из этих вершин линий, называемых ребрами или дугами графа.

Другая формулировка: **графом** называется непустое множество точек (вершин) и отрезков (ребер), оба конца которых принадлежат заданному множеству точек



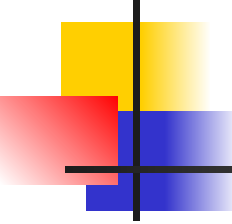
Вершины графа мы будем обозначать латинскими буквами A, B, C, D.

Иногда граф в целом будем обозначать одной заглавной буквой.

Вершины графа, которые не принадлежат ни одному ребру, называются

изолированными.

Граф, состоящий только из изолированных вершин, называется **нуль-графом.**

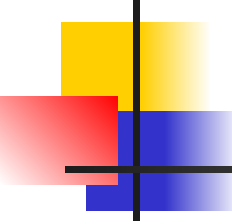


Если две вершины соединены направленным отрезком, то пара называется **упорядоченной**, а отрезок называется **ребром** графа. Если вершины соединены ненаправленным отрезком, то вершины называются **неупорядоченными**, отрезок, их соединяющий, называется **дугой**.

Граф, содержащий только ребра, называется **ориентированным**.

Граф, содержащий только дуги, называется **неориентированным**.

Пара вершин может соединяться двумя или более ребрами одного направления, такие ребра называются **кратными**.



Дуга или ребро может начинаться или заканчиваться в одной вершине, такие дуги называются **петлями**.
Считается, что длина петли равна **1**.

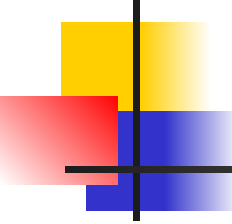
Вершины, соединенные ребром или дугой называются **смежными**.

Дуги, имеющие общие вершины называются **смежными**.

Ребро и любая из двух ее вершин называется **инцидентными**.

Подграфом G_A графа $G=(X,\Gamma)$ называется граф, в который входит лишь часть вершин графа G , образующих множество A вместе с дугами, соединяющими эти вершины.

Частичным графом G_A графа $G=(X,\Gamma)$ называется граф, содержащий все вершины графа и только часть дуг графа.



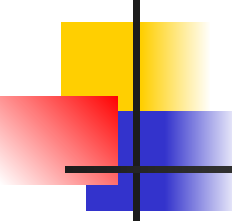
Граф, в котором каждая пара вершин соединена ребром, называется **полным**.

Такой граф можно представить как n -угольник, в котором проведены все диагонали.

Степенью вершины называется число ребер, которым принадлежит вершина.

Обозначение: $p(A)$ – степень вершины A .

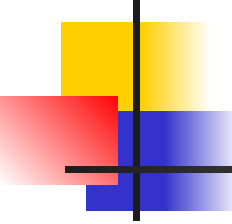
Граф, степени всех k вершин которого одинаковы, называется **однородным графом степени k** .



Дополнением данного графа называется граф, состоящий из всех ребер и их концов, которые необходимо добавить к исходному графу, чтобы получить полный граф.

Граф, который можно представить на плоскости в таком виде, когда его ребра пересекаются только в вершинах, называется **плоским**.

Путем от А до Х называется последовательность ребер, ведущая от А к Х, такая, что каждые два соседних ребра имеют общую вершину, и никакое ребро не встречается более одного раза.



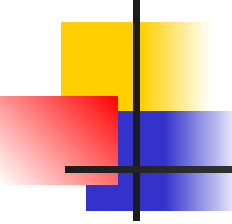
Циклом называется путь, в котором совпадают начальная и конечная точка.

Простым циклом называется цикл, не проходящий ни через одну из вершин графа более одного раза.

Длиной пути, проложенного на цикле, называется число ребер этого пути.

Две вершины A и B в графе называются **связными (несвязными)**, если в нем существует (не существует) путь, ведущий из A в B.

Граф называется связным, если каждые две его вершины связны; если же в графе найдется хотя бы одна пара несвязных вершин, то граф называется **несвязным**.



Деревом называется связный граф, не содержащий циклов.

1. имеется в точности один узел, называемый корнем, в который не входит ни одно ребро,

2. В каждый узел, кроме корня, входит ровно одно ребро,

3. Из корня к каждому узлу идет путь - единственный.

Деревья являются простейшим видом связных графов. Любое дерево с n вершинами содержит $n-1$ ребер. Число различных деревьев, которые можно построить на n вершинах равно.

Дерево с одной выделенной вершиной называется **корневым деревом**.

Ориентированный граф, состоящий из нескольких деревьев, называется **лесом**.

Основные теоремы теории графов



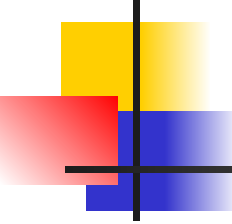
Теорема 1. Удвоенная сумма степеней вершин любого графа равна числу его ребер.

Теорема 2. Число нечетных вершин любого графа четно.

Следствие 1. Нечетное число знакомых в любой компании всегда четно.

Следствие 2. Число вершин многогранника, в которых сходится нечетное число ребер, четно.

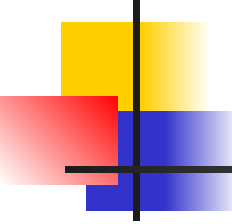
Следствие 3. Число всех людей, когда-либо пожавших руку другим людям, нечетное число раз, является четным.



Теорема 3. Во всяком графе с n вершинами, где n больше или равно 2, всегда найдутся две или более вершины с одинаковыми степенями.

Теорема 4. Если в графе с n вершинами (n больше или равно 2) только одна пара имеет одинаковую степень, то в этом графе всегда найдется либо единственная изолированная вершина, либо единственная вершина, соединенная со всеми другими.

Теорема 5. Если у графа все простые циклы четной длины, то он не содержит ни одного цикла четной длины.



Теорема 6. Для того, чтобы граф был эйлеровым, необходимо и достаточно, чтобы он был связным и все его вершины имели четную степень.

Теорема 7. Для того чтобы на связном графе можно было бы проложить цепь AB , содержащую все его ребра в точности по одному разу, необходимо и достаточно, чтобы A и B были единственными нечетными вершинами этого графа.

Теорема 8. Полный граф с пятью вершинами не является плоским.

Элементы комбинаторики

Комбинаторика – раздел математики, в котором изучаются способы пересчета комбинаций элементов, удовлетворяющих тем или иным условиям.

комбинации

Без повторений

Каждый элемент
входит в комбинацию
не более, чем один раз

С повторениями

Есть элемент, который
встречается более
одного раза

Типы комбинаций



Характеристики **состав и порядок**

1 тип. Важен и состав, и порядок (выбрать, разместить) –

Размещения

2 тип. Важен только порядок (все элементы участвуют в комбинации) – **Перестановки**

3 тип. Важен только состав (нет первого элемента, последовательность не важна) – **Сочетания**

1 и 2 тип – упорядоченные комбинации

Понятие факториала

Факториал – это произведение всех натуральных чисел до указанного числа n .

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

$$0! = 1$$

Пример.

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

Формулы комбинаций без повторений

Размещения.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Перестановки.

$$P_n = n!$$

Сочетания.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$



Пример.

$$A_8^5 = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 6720$$

$$P_8 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$$

$$C_8^5 = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$$

Формулы комбинаций с повторениями

Размещения.

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

Перестановки.

$$\overline{P}_n = \frac{n!}{m_1!m_2!\dots m_k!}$$

Сочетания.

$$\overline{C}_n^k = \frac{(k+n-1)!}{(n-1)! \cdot k!}$$



Элементы теории вероятности

Комплекс условий, который может повторяться мысленно бесконечно много раз (опыт, эксперимент) – **S**

Случайное событие, происходящее или не происходящее в данном опыте – **A**

Пример.

S – бросаем монетку

A – выпала «решка»

B – выпал «орел»



Виды случайных событий

Событие называется **достоверным**, если оно происходит при каждом испытании в данном эксперименте

Событие называется **невозможным**, если оно не происходит ни при одном испытании в данном опыте

Пример.

A – наступление дня после ночи, B – выпадение цифры 5 при подбрасывании 10 копеечной монеты

События А и В называются **несовместными**, если появление одного из них в результате опыта исключает появление другого события

События А и В называются **совместными**, если появления одного из них не исключает появления другого события

Пример.

А – выпала «решка», В – выпал «орел»

А – досталась конфетка с полки, В – досталась ириска



События называются **противоположными** (взаимно – дополнительными), если не появление одного из них в результате опыта влечет появление другого

События называются **благоприятствующими**, если появление одного из них в результате эксперимента влечет появление другого события

Пример.

А – поставлена удовлетворительная оценка, В – поставлена неудовлетворительная оценка

А – все сессионные оценки удовлетворительные, В – начисление стипендии

События называются **равновозможными**, если по условию данного опыта нет оснований считать одно из них более возможным, чем второе

Пример.

А – выпала «решка», В – выпал «орел»



Операции над событиями



Сумма событий

Суммой событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из данных событий



Произведение событий

Произведением событий называется событие, состоящее в совместном наступлении всех данных событий



Пример.

1) А – досталась ириска, В – досталась шоколадная, С – досталась карамелька

Находим сумму двух событий:

$A+B$ – досталась не карамелька

$A+C$ – досталась не шоколадная

$B+C$ – досталась не ириска

2) А – вынули карту пиковой масти, В – вынули даму

Находим произведение событий:

AB – вынули даму пик

Вероятность события



Рассмотрим эксперимент S , с равновозможными исходами. Случайному событию A благоприятствует k исходов (исходы, когда A наступает) и не благоприятствует $n-k$ исходов

Вероятностью события A называется отношение числа благоприятствующих исходов k к числу всех исходов данного эксперимента

n – число всех исходов, k – число благоприятствующих исходов



Вероятность события

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

$$0 \leq k \leq n \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$$

P (невозможное) = 0

P (достоверное) = 1

Пример

S – бросание игральной кости, A – число выпавших очков кратно 3, B – выпало простое число

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$



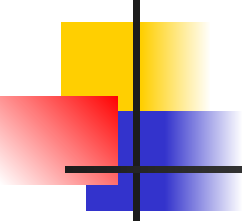
Теоремы и формулы теории вероятности

Теорема 1: Вероятность суммы двух несовместных событий равно сумме вероятностей этих событий

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

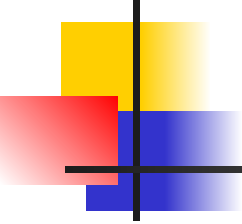
Следствие: сумма вероятностей противоположных событий равна 1

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$



Теорема 2: Вероятность суммы двух произвольных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$



Условная вероятность события А при условии В

Рассмотрим опыт и связанные с ним события А и В

Событию В благоприятствует l исходов,

Произведению событий АВ благоприятствует q исходов

Отношение $\frac{q}{l}$ называется **условной вероятностью события А при условии В**

$$P(A / B) = \frac{q}{l}$$



Пример.

S – бросание игральной кости

B – выпадает четное число очков

A – выпадает шестерка

B благоприятствует три исхода $l = 3$

AB благоприятствует один исход $q = 1$

Вероятность события A при условии B

$$\frac{q}{l} = \frac{1}{3}$$



Теорема 3: Для условной вероятности $P(A/B)$ справедливы формулы

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

Теорема 4: Вероятность произведения двух произвольных событий равна вероятности одного из этих событий, умноженное на условную вероятность другого при условии, что первое произошло

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$$

Независимые события



Событие A называется **независимым** от события B , если условная вероятность события A при условии B равна вероятности события A

$$P(A/B) = P(A)$$

В противном случае события называются **зависимыми**



Пример.

S – из колоды в 36 карт вытаскивают одну наугад

A – вытаскивают туза, B – вытаскивают карту красной масти

Выяснить, независимы ли события A и B

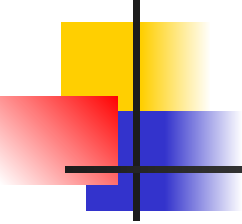
Всего 36 исходов, событию A благоприятствует 4 исхода

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Событию B благоприятствует 18 исходов, событию AB благоприятствует 2 исхода

$$P(A/B) = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

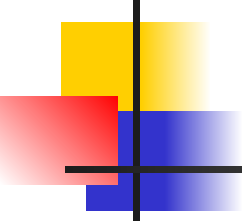
$P(A) = P(A/B) \Rightarrow$ события независимы



Теорема 5: Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Случайные величины



Случайная величина, связанная с некоторым опытом — это величина, которая при осуществлении этого опыта принимает то или иное числовое значение

Пример.

Наружный диаметр трубы, число родившихся в течении суток в разных странах

X — случайная величина

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ — её значения

$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ — вероятности значений



Закон распределения случайной величины (если известны все значения и все вероятности)

x_1	x_2	x_3	\dots	x_{n-1}	x_n
p_1	p_2	p_3	\dots	p_{n-1}	p_n

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$$

Пример.

X – число очков выпавших при подбрасывании игральной кости

Закон распределения

1	2	3	4	5	6
1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Числовые характеристики случайной величины

1. Математическое ожидание

Это число, равное сумме произведений всех значений величины на вероятности этих значений, MX

$$MX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

Математическое ожидание *указывает некоторое среднее число*, около которого группируются все значения случайной величины

Пример.

$$MX = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{1}{6} \cdot 21 = 3,5$$

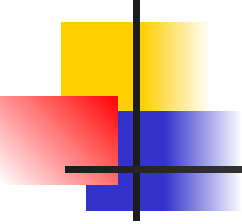


2. Дисперсия

Это математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания, DX

$$DX = M(X - MX)^2$$

$$DX = p_1(x_1 - MX)^2 + p_2(x_2 - MX)^2 + \dots + p_n(x_n - MX)^2$$



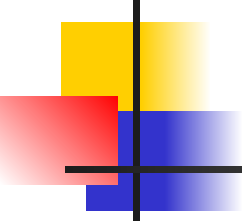
Дисперсия случайной величины *характеризует степень разброса*, рассеивания случайной величины относительно её математического ожидания

Пример.

Закон распределения случайной величины:

-2	-1	1	2
1/6	1/3	1/3	1/6

Найдем математическое ожидание и дисперсию



$$MX = -2 \cdot \frac{1}{6} + (-1) \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{6} = 0$$

$$DX = (-2-0)^2 \cdot \frac{1}{6} + (-1-0)^2 \cdot \frac{1}{3} + (1-0)^2 \cdot \frac{1}{3} + (2-0)^2 \cdot \frac{1}{6} =$$
$$= \frac{4}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{6} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$$