

ПРАВИЛА С ДВУМЯ
РЕШЕНИЯМИ. ПОДХОД
НЕЙМАНА – ПИРСОНА.



Постановка задачи

- Выборка наблюдений $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{X}$ случайной величины X
- Случайная величина X имеет плотность $f(x; \theta)$, где θ - точка из параметрического пространства Ω .
- Есть две гипотезы:
 $H: \theta \in \Omega_H, K: \theta \in \Omega_K: \Omega_H \cup \Omega_K = \Omega; \Omega_H \cap \Omega_K = \emptyset$
- Необходимо построить правило (тест, процедуру)

$$\delta = \begin{cases} d_H, x \in D_H \\ d_K, x \in D_K \end{cases} \quad D_H \cap D_K = \emptyset; D_H \cup D_K = \mathcal{X}$$

для тестирования гипотезы H против альтернативы K по наблюдениям $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, которое обладает какими-то хорошими свойствами.



Ошибки 1 и 2 рода

- Отвержение H , когда она верна – ошибка 1 рода.
- Принятие H , когда она не верна - ошибка 2 рода.

Хорошее правило должно минимизировать обе вероятности ошибок. Невозможно одновременно минимизировать обе вероятности.



Пример

- $H: \theta = \theta_0; K: \theta = \theta_1$. Пусть $\delta(x)$ выбрано, то есть D_H, D_K фиксированы. Тогда вероятность ошибки 1 рода

$$P_H(\delta = d_K) = \int_{D_K} f(x, \theta_0) dx$$

Вероятность ошибки 2 рода

$$P_K(\delta = d_H) = \int_{D_H} f(x, \theta_1) dx$$

Уменьшение $P_H(\delta = d_K)$ может осуществляться уменьшением D_K . Это подразумевает рост D_H . Тогда

$P_K(\delta = d_H) = \int_{D_H} f(x, \theta_1) dx$ растет.



Подход Неймана-Пирсона

- Качество любого правила двух решений δ определяется вектором $(P_H(\delta = d_K), P_K(\delta = d_H))$
- Классический подход – подход Неймана-Пирсона.

$$\begin{cases} P_H(\delta = d_K) \leq \alpha \\ P_K(\delta = d_H) \rightarrow \min \end{cases}$$

Обычно $\alpha = 0.1; 0.05; 0.01$.

Такой подход позволяет контролировать вероятность ошибки первого рода и минимизировать вероятность ошибки второго рода.



Простые и сложные гипотезы

- Существует 2 типа гипотез H, K – простые и сложные.

Определение

- *Гипотеза H о распределении случайной величины X называется простой, если распределение X полностью определяется истинностью H . Иначе H называется сложной гипотезой.*

Пример

- Гипотезы $H : \theta = \theta_1, K : \theta = \theta_2$ простые.
- Гипотезы $H : \theta \leq \theta_1, K : \theta > \theta_1$ сложные.
- Гипотеза $H : \theta = \theta_1$ простая, гипотеза $K : \theta > \theta_1$ сложная.



Тест или критическая функция

Правило

$$\delta = \begin{cases} d_H, x \in D_H \\ d_K, x \in D_K \end{cases} \quad D_H \cap D_K = \emptyset; D_H \cup D_K = \chi$$

может быть написано как

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, x \in D_H \\ 1, x \in D_K \end{cases}$$

В таком случае $P_H(\delta = d_K) = E\varphi(X)$.

Функция $\varphi(x)$ называется тестовой или критической функцией.

$$\begin{cases} E_\theta \varphi(X) \leq \alpha, \theta \in \Omega_H \\ E_\theta \varphi(X) \rightarrow \max, \theta \in \Omega_K \end{cases}$$

Функция мощности $\rho(\theta) = E_\theta \varphi(X)$ для $\theta \in \Omega$; $\Omega = \Omega_H \cup \Omega_K$



Подход Неймана-Пирсона.

Построение теста. Простые гипотезы

Фундаментальная лемма Неймана-Пирсона.

В случае тестирования простой гипотезы $H: \theta = \theta_0$ против простой альтернативы $K: \theta = \theta_1$. Функции правдоподобия:

$$p_H(x) = f(x_1, \theta_0) f(x_2, \theta_0) \dots f(x_n, \theta_0)$$

$$p_K(x) = f(x_1, \theta_1) f(x_2, \theta_1) \dots f(x_n, \theta_1)$$



Подход Неймана-Пирсона.

Построение теста. Простые гипотезы

Пусть $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям (1), (2)

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & T(x) = \frac{p_K(x)}{p_H(x)} > c_\alpha \\ 0, & T(x) = \frac{p_K(x)}{p_H(x)} < c_\alpha \end{cases} \quad (1)$$

$$c_\alpha \text{ может быть найдена из } E_\theta \varphi(X) = \alpha \quad (2)$$

Тогда тест $\varphi(x)$ - наиболее мощный тест уровня α .



Наиболее мощный тест, равномерно наиболее мощный тест

○ определение

□ Тест δ уровня α для проверки простой гипотезы H против простой альтернативы K называется наиболее мощным тестом, если для любого другого теста δ' уровня α для проверки простой гипотезы H против простой альтернативы K выполняется:

$$P_K(\delta(x) = d_K) \geq P_K(\delta'(x) = d_K)$$



Наиболее мощный тест, равномерно наиболее мощный тест

○ определение

□ Тест δ уровня α для проверки сложной гипотезы $H: \theta \in \Omega_H$ против сложной гипотезы $K: \theta \in \Omega_K$ называется равномерно наиболее мощным тестом если для любого другого теста δ' уровня α для проверки сложной гипотезы H против сложной альтернативы K выполняется: $P_\theta(\delta(x) = d_K) \geq P_\theta(\delta'(x) = d_K), \forall \theta \in \Omega_K$



Подход Неймана-Пирсона. Построение теста. Простые гипотезы. Пример

Монета с вероятностью выпадения орла p подбрасывается n раз.

Наблюдения $x_1, x_2, \dots, x_n; x_i \in \{0, 1\}$. $x_i = 1$ – орел в наблюдении i .

Гипотеза $H: p = \frac{1}{2}$ против альтернативы $K: p = \frac{2}{3}$

Функции правдоподобия:

$$p_H(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n - \sum_{i=1}^n x_i} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$p_K(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i} \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{n - \sum_{i=1}^n x_i}$$

Тест

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^n x_i > c_\alpha \\ 0, & \sum_{i=1}^n x_i < c_\alpha \end{cases}$$



Подход Неймана-Пирсона. Построение теста. Простые гипотезы. Пример

- Порог c_α определяется из $P_H(\sum_{i=1}^n X_i > c_\alpha) = \alpha$.

Предполагается, что уравнение имеет решение. Оно может быть получено путем выбора α . При верности H статистика $\sum_{i=1}^n X_i$ имеет биномиальное распределение $b(n, \frac{1}{2})$, тогда порог c_α определяется из уравнения:

$$\sum_{i=c_\alpha+1}^n C_n^i \left(\frac{1}{2}\right)^n = \alpha$$



Сложные гипотезы. Монотонное отношение правдоподобия

- $H: \theta \leq \theta_0$ vs $K: \theta > \theta_0$
 $H: \theta \geq \theta_0$ vs $K: \theta < \theta_0$

Определение

- Семейство распределений имеет монотонное отношение правдоподобия если для любых $\theta, \theta': \theta < \theta'$ распределения $p_{\theta'}(x), p_{\theta}(x)$ различны и существует функция $T(x)$ такая, что отношение $\frac{p_{\theta'}(x)}{p_{\theta}(x)}$ - неубывающая функция $T(x)$.

$$\frac{p_{\theta'}(x)}{p_{\theta}(x)} > C \Leftrightarrow T(x) > C_1$$



Подход Неймана-Пирсона. Сложные гипотезы. Монотонное отношение правдоподобия

Теорема

- Пусть θ – реальный и пусть случайная величина X имеет функцию плотности $f(x, \theta)$ с монотонным отношением правдоподобия в $T(x)$. Тогда для тестирования $H: \theta \leq \theta_0$ против $K: \theta > \theta_0$ существует РНМ тест, определяемый с помощью:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & T(x) > C \\ 0, & T(x) \leq C \end{cases}$$
$$E_{\theta} \varphi(X) = \alpha$$



Подход Неймана-Пирсона. Сложные гипотезы. Монотонное отношение правдоподобия. Пример

Монета с вероятностью выпадения орла p подбрасывается n раз.

Наблюдения $x_1, x_2, \dots, x_n; x_i \in \{0, 1\}$. $x_i = 1$ – орел в наблюдении i .

Гипотеза $H: p \leq \frac{1}{2}$ против альтернативы $K: p > \frac{1}{2}$

Поскольку биномиальное распределение имеет монотонное отношение правдоподобия в $T(x) = \sum_{i=1}^n X_i$ тогда согласно теореме РНМ тест имеет вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^n x_i > c_\alpha \\ 0, & \sum_{i=1}^n x_i < c_\alpha \end{cases}$$



Подход Неймана-Пирсона. Сложные гипотезы. Монотонное отношение правдоподобия. Пример

Порог c_α определяется из $P_H(\sum_{i=1}^n X_i > c_\alpha) = \alpha$.

Так как по гипотезе H статистика $\sum_{i=1}^n X_i$ имеет биномиальное распределение $b(n, \frac{1}{2})$, тогда порог c_α определяется из уравнения:

$$\sum_{i=c_\alpha+1}^n C_n^i \left(\frac{1}{2}\right)^n = \alpha$$



Несмещенность, тесты структуры Неймана

⊙ определение

□ Статистическое правило δ называется W -несмещенным, если

$$E_{\theta} w(\theta, \delta) \leq E_{\theta} w(\theta', \delta) \quad (3)$$

В среднем несмещенный тест ближе к правильному решению, чем к любому неправильному. Для несмещенного теста $\varphi(x)$ выполняется:

$$\begin{aligned} \beta_{\varphi}(\theta) &\leq \alpha, \theta \in \Omega_H \\ \beta_{\varphi}(\theta) &\geq \alpha, \theta \in \Omega_K \end{aligned} \quad (4)$$

Если $\beta_{\varphi}(\theta)$ непрерывна, то:

$$\beta_{\varphi}(\theta) = \alpha, \forall \theta \in \omega = [\Omega_H] \cap [\Omega_K] \quad (5)$$



Несмещенность, тесты структуры Неймана. Теорема

Пусть X распределена согласно:

$$f(x, \theta) = C(\theta) \exp\left[\sum_{i=1}^K \theta_i T_i(x)\right] h(x) \quad (6)$$

где регионы $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_K)$ и $T = (T_1, \dots, T_K)$ выпуклы.

Перепишем (6) как

$$f(x, \theta, \vartheta) = C(\theta, \vartheta) \exp\left[\theta U(x) + \sum_{i=1}^{K-1} \vartheta_i T_i(x)\right] h(x), \quad (7)$$

где $\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_{K-1}), T = (T_1, \dots, T_K)$



Несмещенность, тесты структуры Неймана. Теорема

Теорема

- Для тестирования $H_1: \theta \leq \theta_0$ против $K_1: \theta > \theta_0$
НРНМ тест имеет вид:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 1, u > C_0(t) \\ 0, u \leq C_0(t) \end{cases} \quad (8)$$

где константа $C_0(t)$ определяется из:

$$E_{\theta_0}(\varphi_1(U, T) | T = t) = \alpha$$

для любых t .



Несмещенность, тесты структуры Неймана. Теорема

Теорема

□ Для тестирования $H_2: \theta = \theta_0$ против $K_2: \theta \neq \theta_0$ НРНМ тест имеет вид:

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 1, u < C_1(t) \text{ or } u > C_2(t) \\ 0, C_1(t) \leq u \leq C_2(t) \end{cases} \quad (9)$$

где константы $C_1(t)$, $C_2(t)$ определяются из:

$$E_{\theta_0}(\varphi_2(U, T) | T = t) = \alpha$$

$$E_{\theta_0}(U \varphi_2(U, T) | T = t) = \alpha E_{\theta_0}(U | t) \quad (10)$$



Несмещенность, тесты структуры Неймана. Теорема

Теорема

□ $h_{ij}: \theta_i \leq \theta_j$ против $k_{ij}: \theta_i > \theta_j$ с параметрами из (6)
НРМ тест имеет вид:

$$\varphi_{ij} = \begin{cases} \partial_{ij}^{-1}, t_i(x) > c_{ij}(t_i(x) + t_j(x), t_k(x)) \\ \partial_{ij}, t_i(x) \leq c_{ij}(t_i(x) + t_j(x), t_k(x)) \end{cases} \quad (11)$$

где константы $c_{ij}(t_i(x) + t_j(x), t_k(x))$ определяются
из:

$$P_{\theta_i = \theta_j}(T_i > c_i | T_i + T_j = t_i(x) + t_j(x), T_k = t_k(x)) = \alpha_{ij} \quad (12)$$



Сложные гипотезы. Процедура отношения правдоподобия

Если отношение монотонного правдоподобия отсутствует - используется процедура отношения правдоподобия.

$$H: \theta \in \Omega_0 \text{ против } K: \theta \in \Omega_1$$

Статистика теста:

$$\lambda(x) = \frac{\sup_{\theta \in \Omega_1} p_{\theta}(x)}{\sup_{\theta \in \Omega_0} p_{\theta}(x)} \text{ или } \lambda(x) = \frac{\sup_{\theta \in \Omega_1 \cup \Omega_0} p_{\theta}(x)}{\sup_{\theta \in \Omega_0} p_{\theta}(x)}$$



Сложные гипотезы. Процедура отношения правдоподобия

Тест имеет вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, \lambda(x) \leq c \\ 0, \lambda(x) > c \end{cases}$$

Порог c определяет из:

$$P_{\theta}(\lambda(x) \leq c) = \alpha \text{ для } \theta \in [\Omega_0] \cap [\Omega_1] \quad (13)$$

Предполагается, что существует решение уравнения (13).



Сложные гипотезы. Процедура отношения правдоподобия

Условие непрерывности $\frac{\partial \int f(x, \theta) dx}{\partial \theta} = \int \frac{\partial f(x, \theta) dx}{\partial \theta}$

Теорема

□ Для тестирования гипотезы $H_0: \theta = \theta_0$ ($\theta_0 = (\theta_{10}, \dots, \theta_{K0})$)

против $K: \theta \neq \theta_0$ при $n \rightarrow \infty$ LR процедура уровня α имеет вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & -2 \ln \lambda(x) \geq c_\alpha \\ 0, & -2 \ln \lambda(x) < c_\alpha \end{cases}$$

где c_α квантиль уровня $1-\alpha$ распределения χ^2 с K степенями свободы.



Сложные гипотезы. Процедура отношения правдоподобия

Consistency of LR процедуры

Теорема

□ Для $\theta \neq \theta_0$ и $n \rightarrow \infty$ выполняется:

$$P(-2\ln\lambda(x) \geq c_\alpha) \rightarrow 1$$



p-значения

Пусть распределение $\frac{p_K(X)}{p_H(X)}$ при истинности H непрерывно. Тогда МР тест уровня α отвергает гипотезу H , если $\frac{p_K(X)}{p_H(X)} > c_\alpha$, где c_α определяется из:

$$P\left(\frac{p_K(X)}{p_H(X)} > c_\alpha\right) = \alpha$$

Пусть $S_\alpha = \{x: \frac{p_K(X)}{p_H(X)} > c_\alpha\}$ - критическая область для теста уровня α . Предположим, что для $\alpha' < \alpha''$ выполняется $S_{\alpha'} \subset S_{\alpha''}$.



p-значения

⊙ определение

□ *Наименьший уровень значимости такой, что гипотеза отклоняется по данным наблюдениям X называется p-значением.*

$$\hat{p} = \hat{p}(X) = \inf\{\alpha: X \in S_\alpha\} \quad (14)$$

$\hat{p}(X)$ дает представление о том, насколько сильно данные противоречат H .



p-значения

Чтобы быть более точным, если

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & T(x) > c \\ 0, & T(x) \leq c \end{cases}$$

тогда $\hat{p}(X) = P_H(T(X) > t)$, где $t = t(x)$ наблюдаемое значение статистики $T(X)$.

В целом, если $\alpha' < \alpha''$ подразумевает $S_{\alpha'} \subset S_{\alpha''}$, тогда тест $\varphi(x)$ может быть записан как:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \hat{p}(t) > c \\ 0, & \hat{p}(t) \leq c \end{cases}$$



Основное свойство р-значений

Основное свойство р-значений для тест $\varphi(x)$ уровня α с критической областью S_α дается в следующей лемме, которая применяется как к простым, так и к сложным нулевым гипотезам.

Лемма

□ Пусть X имеет распределение $P_\theta, \theta \in \Omega, H: \theta \in \Omega_H$ и $\alpha' < \alpha'' S_{\alpha'} \subset S_{\alpha''}$

- если $\sup_{\theta} P_\theta(X \in S_\alpha) \leq \alpha, \forall \alpha \in (0,1)$, тогда $P_\theta(\hat{p}(t) \leq u) \leq u, \forall u \in [0,1]$
- если $\forall \theta \in \Omega_H \rightarrow P_\theta(X \in S_\alpha) = \alpha$ для всех $\alpha \in (0,1)$, тогда $P_\theta(\hat{p}(t) \leq u) = u, \forall u \in [0,1]$



Литература

E.L.Lehmann, J.P.Romano Testing Statistical Hypotheses.
Third edition, 2005.

