

Аналитическая геометрия

Геометрические объекты описывают формулами.
Геометрические задачи решают не с помощью геометрических построений, а тоже с помощью формул.

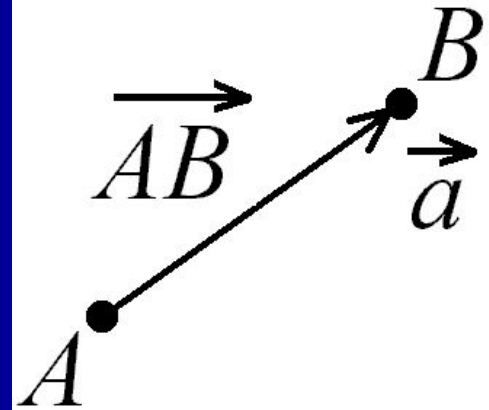
Векторы. Линейные операции над векторами.

Разложение вектора по базису

Скалярная величина, скаляр – число.

Определение 4.1. Вектор – направленный отрезок

\overrightarrow{AB} , \vec{a} , \mathbf{a}



Определение 4.2. Расстояние между начальной и конечной точками вектора называется **модулем** или **длиной** вектора:

$$|\overrightarrow{AB}|, |\vec{a}|$$

Определение 4.3. Вектор, у которого конец совпадает с началом, называется **нуль-вектором**: $\vec{0}$, $|\vec{0}| = 0$.

По определению нуль-вектор параллелен любому вектору.

Определение 4.4. Вектор, имеющий длину равную единице, называется **единичным** вектором : $|\vec{a}| = 1$.

Определение 4.5. Параллельные векторы называются **коллинеарными**: $\vec{a} \parallel \vec{b}$;

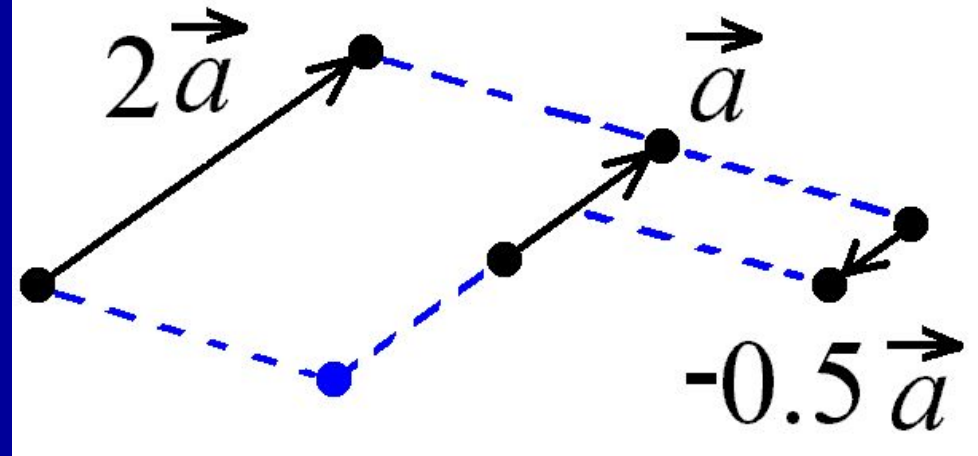
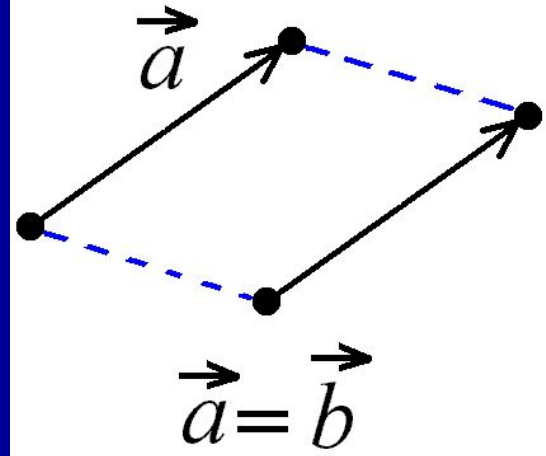
если коллинеарные векторы имеют одинаковые направления, то они называются **сонаправленными**: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$;

если параллельные векторы имеют противоположные направления, то они называются **противоположно направленными**: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Определение 4.6. Векторы, расположенные в одной плоскости называются **компланарными**.

Линейные операции над векторами

Определение 4.7. Два вектора \vec{a} и \vec{b} называются **равными**: $\vec{a} = \vec{b}$, если они коллинеарны $\vec{a} \parallel \vec{b}$, сонаправленны $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и имеют одинаковую длину $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.



вектор не меняется, если его переместить в пространстве параллельно самому себе

Определение 4.8. Произведением вектора \vec{a} на число λ называется новый вектор $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$, параллельный данному, имеющий длину $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ и либо сонаправленный с вектором \vec{a} , если $\lambda > 0$, либо противоположно направленный с \vec{a} , если $\lambda < 0$.

Теорема 4.1. Если вектора \vec{a} и \vec{b} коллинеарны и длина вектора \vec{a} не ноль, т.е. $|\vec{a}| \neq 0$, то существует единственное число λ , что

$$\vec{b} = \lambda \vec{a},$$

т.е. вектор \vec{b} линейно выражается через вектор \vec{a} .

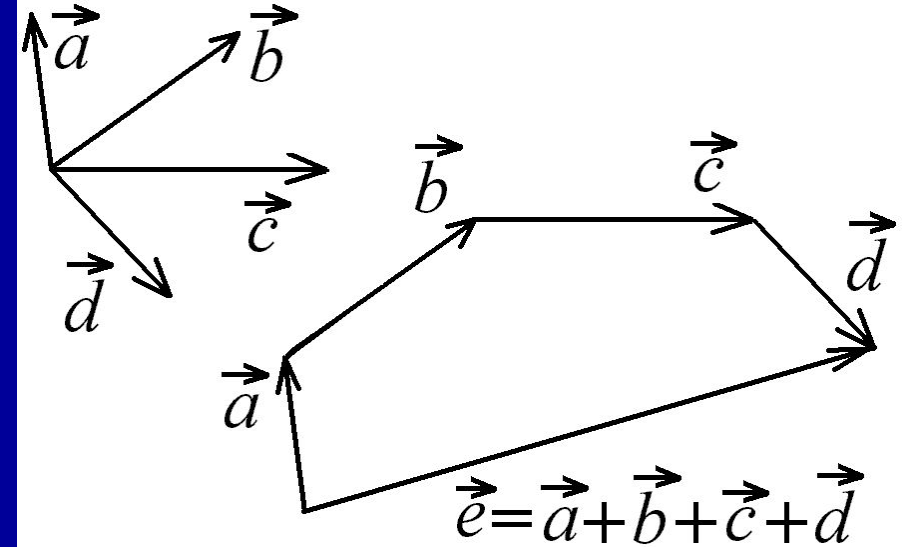
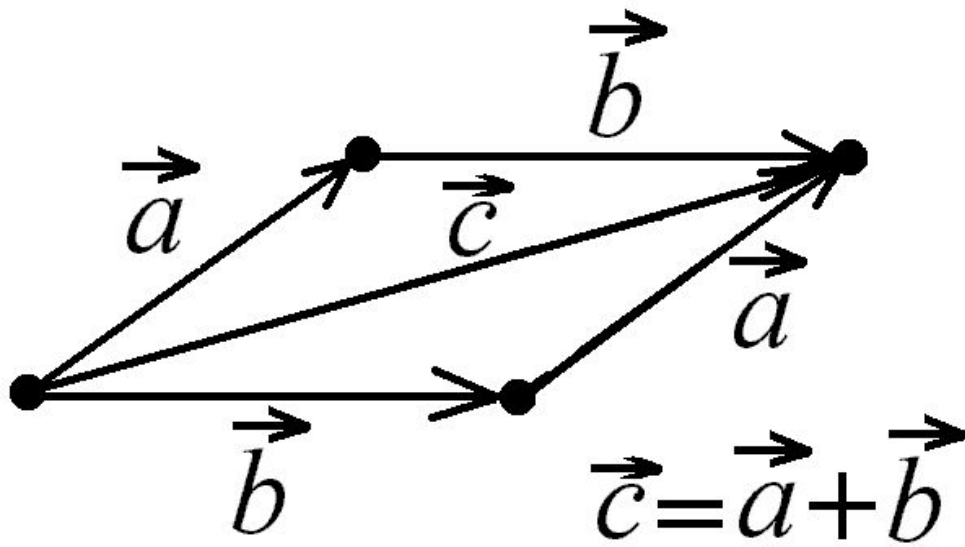
Доказательство: если параллельные векторы \vec{a} и \vec{b} сонаправлены, то $\lambda = |\vec{b}|/|\vec{a}|$. А если векторы противоположно направлены, то $\lambda = -|\vec{b}|/|\vec{a}|$.

Определение 4.9. Сумма векторов \vec{a} и \vec{b} есть новый вектор \vec{c} :

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

к концу вектора \vec{a} подставляется начало вектора \vec{b} и из начала вектора \vec{a} в конец вектора \vec{b} проводится вектор \vec{c} .

Сумма $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ определяется и по правилу параллелограмма.



Для сложения нескольких векторов надо к концу очередного слагаемого подставлять начало следующего слагаемого, а потом соединить начало самого первого слагаемого с концом последнего слагаемого.

Свойства сложения векторов

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

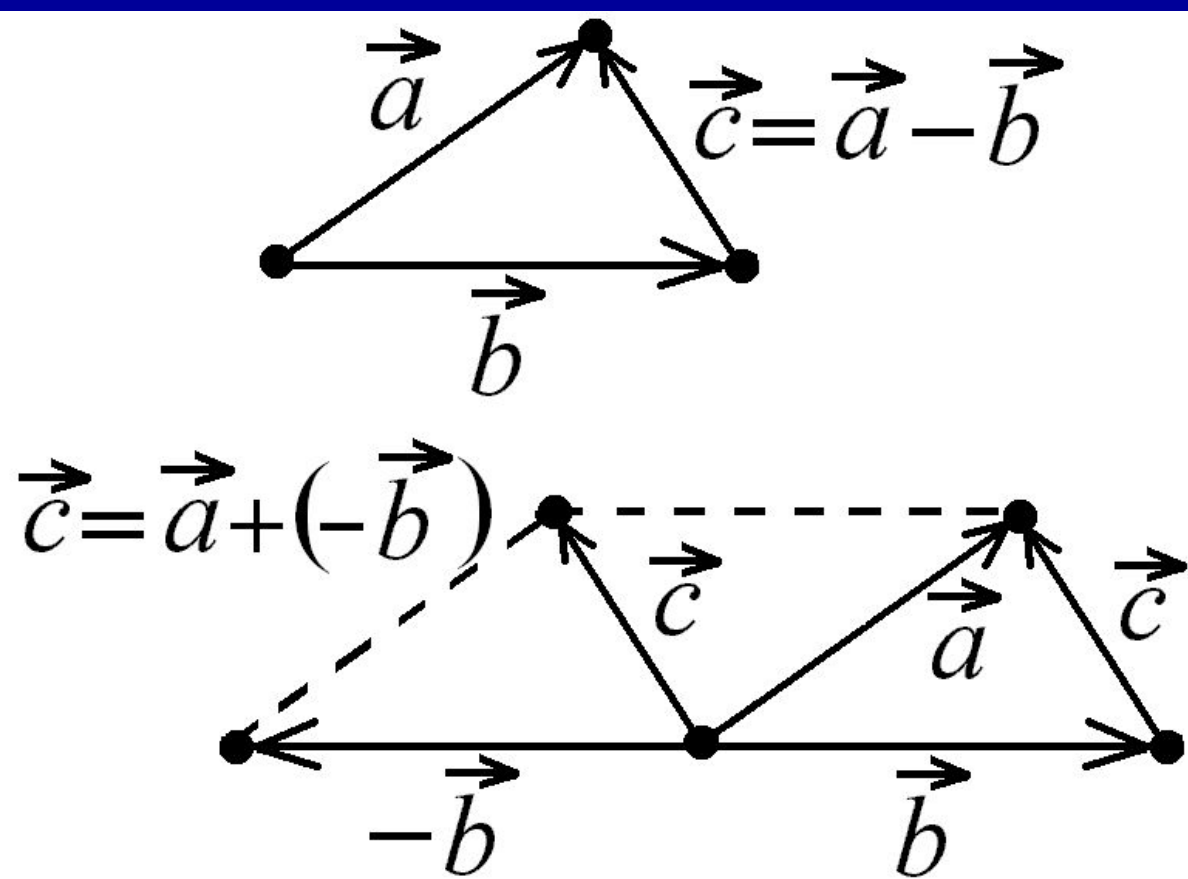
$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

Разность векторов \vec{a} и \vec{b} :

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b}$$

или с помощью второй диагонали параллелограмма:

вектора \vec{a} и \vec{b} должны иметь общее начало и проводить \vec{c} из конца \vec{b} в конец вектора \vec{a} , т.к. $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$.

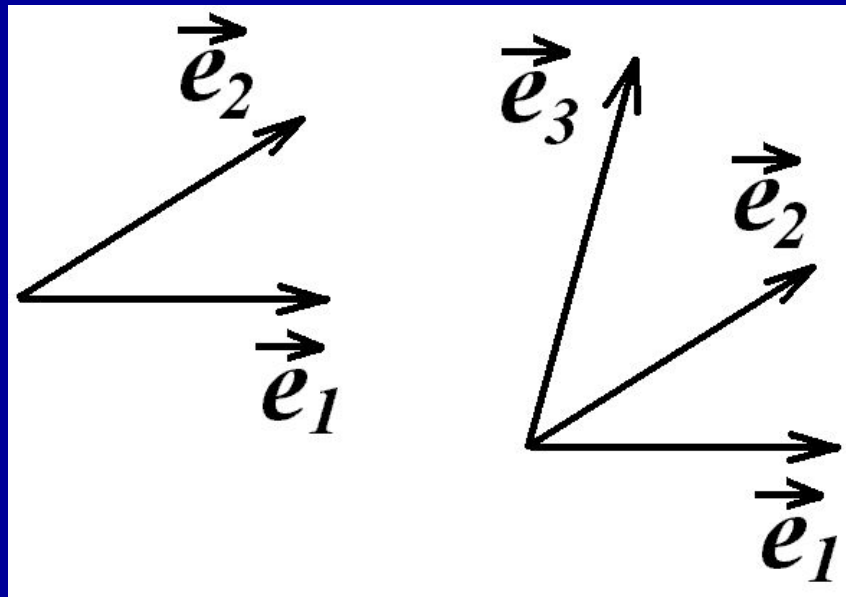


Разложение вектора по базису

Определение 4.10. **Базисом на плоскости** называются любые два неколлинеарных вектора

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2 : \vec{e}_1 \not\parallel \vec{e}_2$$

Определение 4.11. **Базисом в пространстве** называются любые три вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, не лежащие в одной плоскости, т.е. не компланарные.



Из определений следует, что среди векторов, образующих базис, заведомо нет нулевых векторов:

$$|\vec{e}_i| \neq 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Если $|\vec{e}_i| = 1, i = 1, 2, 3$, то базис называется **единичным**.

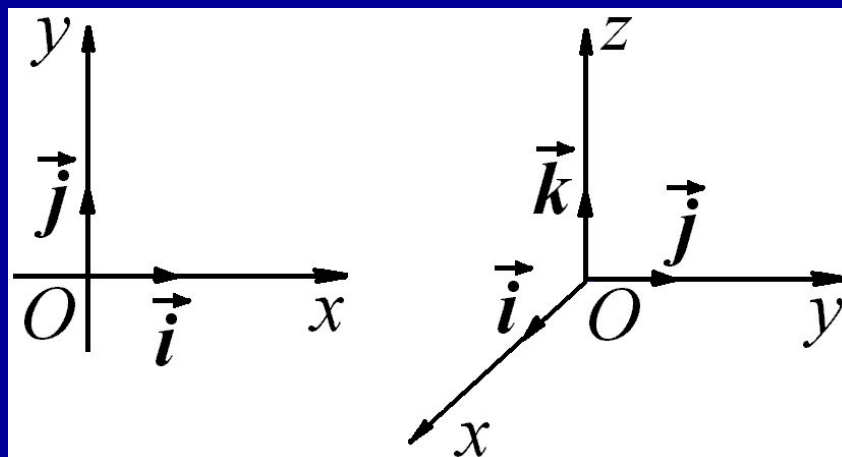
Если

$$\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2, \quad \vec{e}_1 \perp \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3,$$

то базис называется **ортогональным** или **декартовым**.

Векторы $\vec{e}_1 = \vec{i}, \vec{e}_2 = \vec{j}, \vec{e}_3 = \vec{k}$ образуют единичный декартов базис на плоскости и в пространстве:

$$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} : |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1, \quad \vec{i} \perp \vec{j}, \quad \vec{i} \perp \vec{k}, \quad \vec{j} \perp \vec{k}$$



Теорема 4.2. *Любой вектор можно разложить по базису, причем единственным образом, т.е. для любого вектора \vec{a} существует единственный набор из трех чисел a_1, a_2, a_3 такой, что справедливо равенство*

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3, \quad (4.1)$$

вектор \vec{a} линейно выражается через векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Определение 4.11. Числа a_1, a_2, a_3 – **координаты** вектора \vec{a} , представление (4.1) называется **разложением вектора \vec{a} по заданному базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$,**

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = \{a_1; a_2; a_3\} \quad (4.2)$$

т.е. вектор задан своими координатами.

Вместо геометрического объекта – вектора рассматривается математический объект – упорядоченная тройка чисел **координаты вектора.**

Пусть базис декартов: $\vec{e}_1 = \vec{i}$, $\vec{e}_2 = \vec{j}$, $\vec{e}_3 = \vec{k}$

$$a_1 = \text{пр}_{\vec{i}} \vec{a}, \quad a_2 = \text{пр}_{\vec{j}} \vec{a}, \quad a_3 = \text{пр}_{\vec{k}} \vec{a}$$

Определение 4.12.

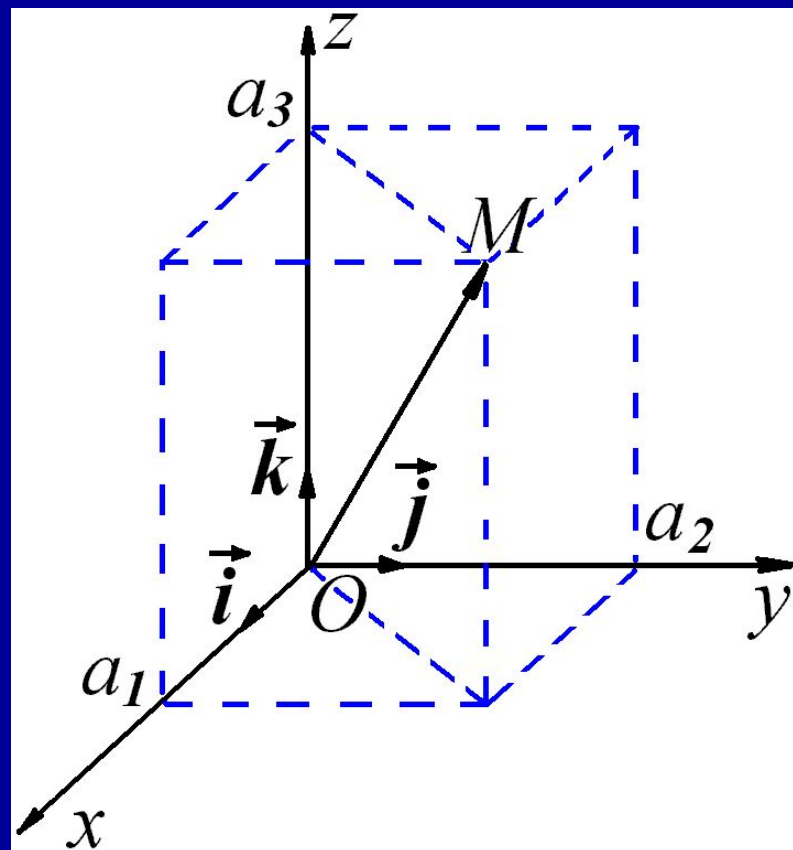
Если начало вектора \vec{a} помещено в **начало координат** O , то вектор \vec{a} называют **радиус-вектором**

$M(a_1, a_2, a_3)$ — точка;

$\vec{OM} = \{a_1; a_2; a_3\}$ — вектор

по теореме Пифагора

$$|\vec{OM}| = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$



Линейные операции над векторами, заданными своими координатами

Теорема 4.3. Равенство векторов. Вектор $\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$ равен вектору $\vec{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$ тогда и только тогда, когда равны соответствующие координаты этих векторов

$$\vec{a} = \vec{b} \iff a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad a_3 = b_3$$

Доказательство:

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3; \quad \vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3$$

по условию теоремы

$$a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3$$

из единственности разложения вектора по базису

$$a_1 = b_1; \quad a_2 = b_2; \quad a_3 = b_3$$

Теорема 4.4. Умножение вектора на число. Чтобы вектор $\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$ умножить на число λ , надо каждую координату исходного вектора умножить на это число

$$\lambda \vec{a} = \{\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3\}$$

$$\vec{b} = \{\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3\} \parallel \vec{a}$$

Теорема 4.5. Параллельность векторов. Векторы $\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$ и $\vec{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$ параллельны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = \lambda$$

Теорема 4.6. Сложение и вычитание векторов. Чтобы сложить (вычесть) векторы $\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$ и $\vec{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$, надо сложить (вычесть) соответствующие координаты

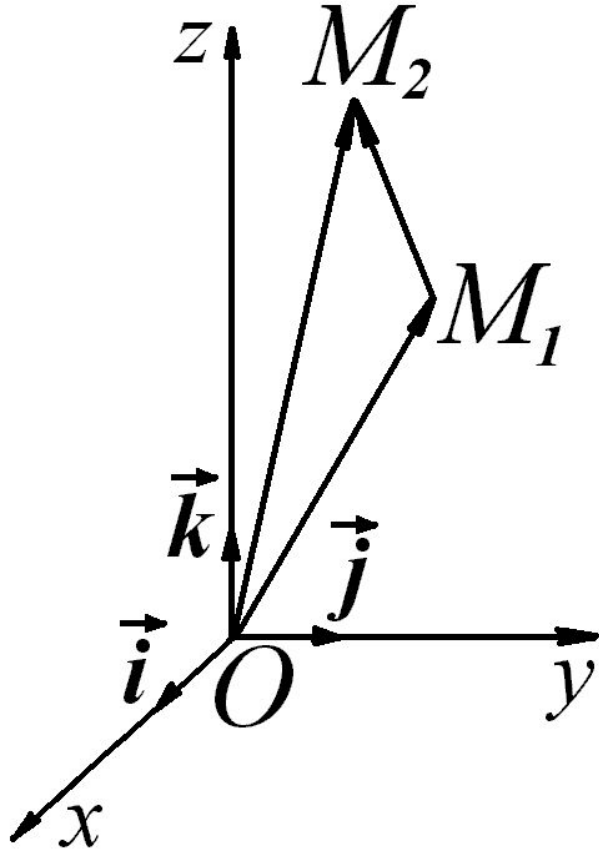
$$\vec{a} \pm \vec{b} = \{a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3\}$$

Теорема 4.7. Определение вектора через координаты его начала и конца. Если у вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ известны координаты начальной точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и конечной точки $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то для определения координат вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ надо из координат конца вектора вычесть соответствующие координаты начала вектора

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

Т.к.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1},$$



Длина вектора

$$|\overrightarrow{M_1 M_2}| =$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

С векторами можно производить и **нелинейные** операции, например, различные умножения.

Из всех возможных произведений векторов ниже будут рассмотрены три:

скалярное, векторное и смешанное.

Скалярное произведение векторов

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \vec{b}$$

Определение. Скалярное произведение двух векторов \vec{a} и \vec{b} вычисляется по формуле

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$$

$$(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \varphi - \text{угол между } \vec{a}, \vec{b}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$$

Результатом **скалярного** произведения является **число**, т.е. **скалярная величина**.

Теорема. Свойства скалярного произведения. *Имеют место следующие соотношения:*

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, тогда и только тогда, когда $\vec{a} \perp \vec{b}$;

2. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$, $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$;

3. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

4. $\lambda \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \lambda \vec{b}$, λ — число;

5. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} \cdot |\vec{b}| = \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} \cdot |\vec{a}|$;

6. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$;

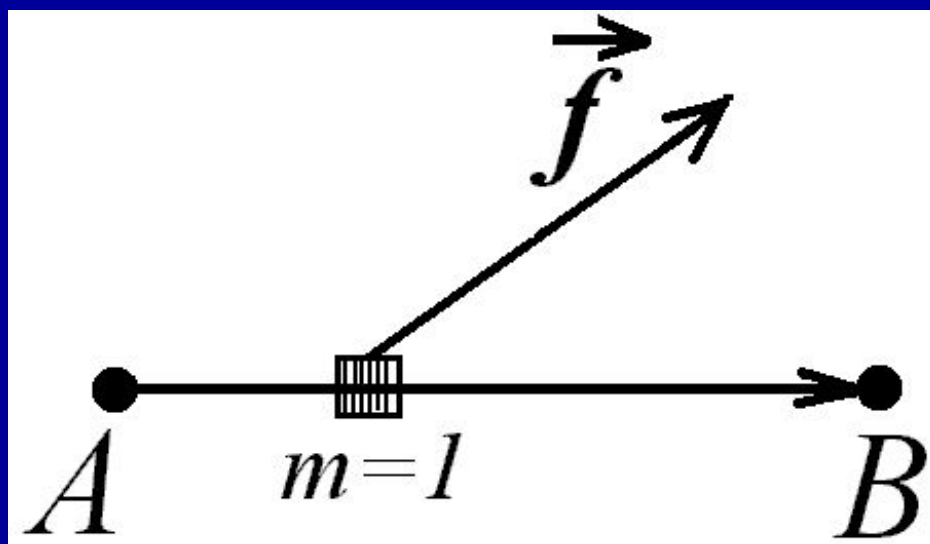
7. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \{a_1; a_2; a_3\} \cdot \{b_1; b_2; b_3\} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$;

вид скалярного произведения через координаты сомножителей;

8. $\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

Механический смысл скалярного произведения. Если тело единичной массы под действием постоянной силы \vec{f} перемещается из точки A в точку B вдоль прямой, то совершаемая при этом работа W есть скалярное произведение вектора силы на вектор перемещения:

$$W = \vec{f} \cdot \overline{AB} = \overline{AB} \cdot \vec{f}$$

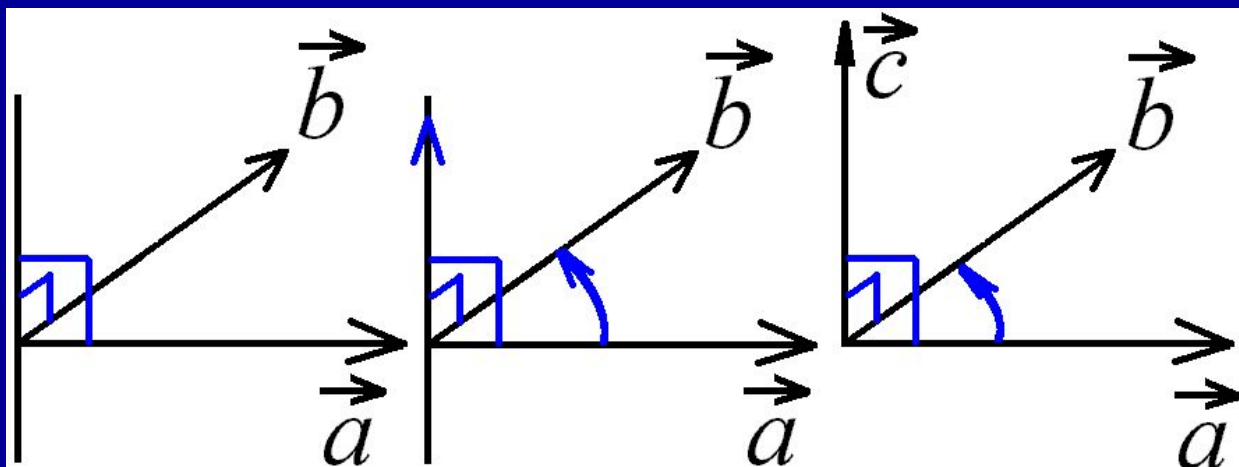


Векторное произведение векторов

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b}$$

Определение. Результат векторного произведения двух векторов \vec{a} и \vec{b} есть третий **вектор** \vec{c} : $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ — однозначно определяемый следующими тремя условиями:

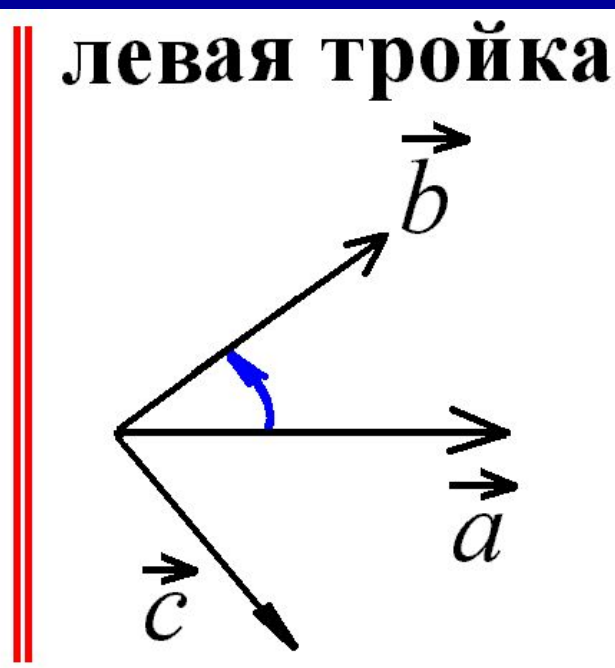
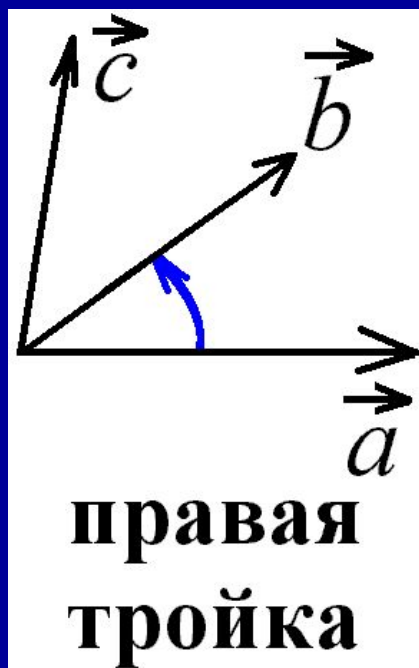
1. $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;
2. \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} — правая тройка векторов;
3. $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$



Определение.

Тройка векторов называется **правой**, если кратчайший поворот от первого вектора ко второму из конца третьего вектора наблюдается **против** хода часовой стрелки.

Тройка векторов называется **левой**, если кратчайший поворот от первого вектора ко второму из конца третьего вектора наблюдается **по** ходу часовой стрелки.



Теорема. Свойства векторного произведения. *Имеют место следующие соотношения:*

1. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, если $\vec{a} \parallel \vec{b}$;
2. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;
3. $\lambda[\vec{a}, \vec{b}] = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$, λ — число;
4. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$;
5. $|\vec{a} \times \vec{b}| = S_{\diamond ABCD}$;
6. $\{a_1; a_2; a_3\} \times \{b_1; b_2; b_3\} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

6. Вид векторного произведения через координаты сомножителей – **правило для запоминания**

$$\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}, \quad \vec{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

определитель нужно раскрыть по первой строке

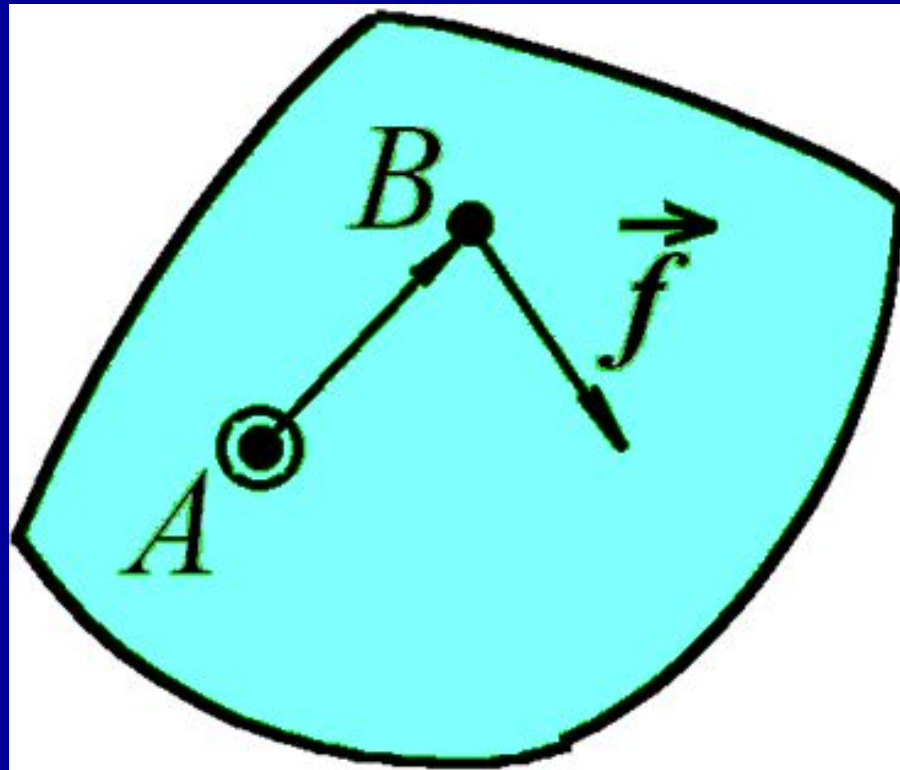
$$\begin{aligned} &= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + (-1) \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k} = \\ &= c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k} = \{c_1; c_2; c_3\} = \vec{c} \end{aligned}$$

Механический смысл векторного произведения.

Тело закреплено в точке A , в точке B приложена сила \vec{f} , поэтому тело крутится.

$$M_A \vec{f} = \vec{AB} \times \vec{f}$$

\vec{AB} – вектор-плечо



Смешанное произведение

Определение. $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{d}$ – вектор; $\vec{d} \cdot \vec{c}$ – число;

результат смешанного произведения – **число, скаляр**

Вид через координаты сомножителей

Пусть $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, $\vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \boxed{c_1} & \boxed{c_2} & \boxed{c_3} \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3 = \vec{d} \cdot \vec{c};$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{d} = \{d_1, d_2, d_3\} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Свойства смешанного произведения:

1.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Если определитель раскрыть по первой строке, то

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{f} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

2.

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = -\vec{b} \vec{a} \vec{c} = \vec{b} \vec{c} \vec{a}$$

по свойству определителей.

$$3. \quad \vec{a} \vec{b} \vec{c} = \pm V_{\text{пар}} = \pm 6V_{\text{пир}}$$

$V_{\text{пар}}$ – объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \vec{a} \vec{c} = |\vec{a}| |\vec{c}| \cos \varphi = S_{\diamond ABCD} \cdot (\pm H) = \pm V_{\text{пар}}$$

