Лекция № 2

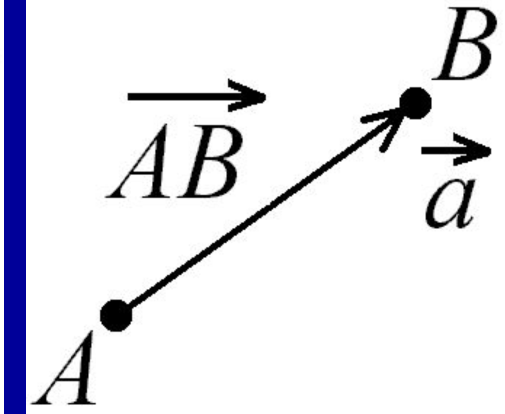
Аналитическая геометрия

Геометрические объекты описывают формулами. Геометрические задачи решают не с помощью геометрических построений, а тоже с помощью формул.

Векторы. Линейные операции над векторами. Разложение вектора по базису

Скалярная величина, скаляр – число.

Определение 4.1. **Вектор** – направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$, **a**



Определение 4.2. Расстояние между начальной и конечной точками вектора называется **модулем** или **длиной** вектора:

$$|\overrightarrow{AB}|, \ |\vec{a}\,|$$

Определение 4.3. Вектор, у которого конец совпадает с началом, называется **нуль-вектором**: $\vec{O}$, $|\vec{O}\,| = 0$.

По определению нуль-вектор параллелен любому вектору.

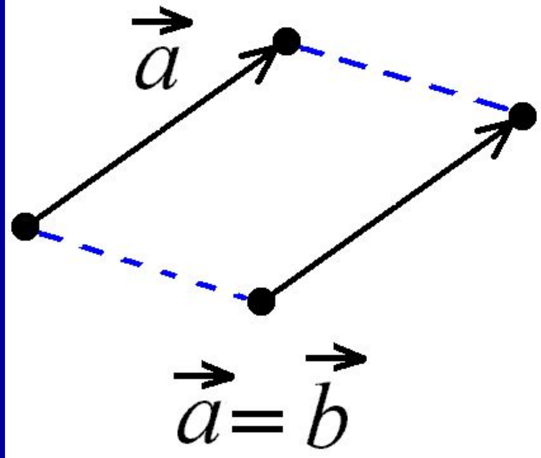
Определение 4.4. Вектор, имеющий длину равную единице, называется **единичным** вектором : $|\vec{a}\,| = 1$.

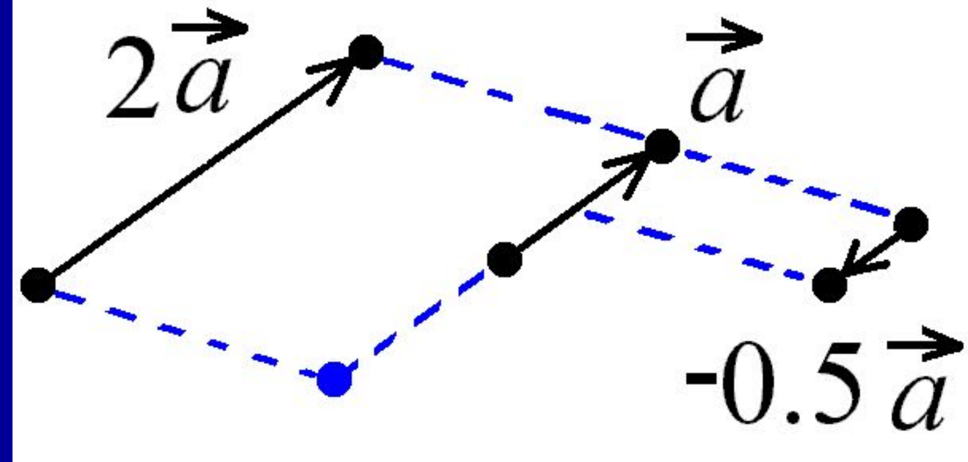
Определение 4.5. Параллельные векторы называются **коллинеарными**: $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$;
если коллинеарные векторы имеют одинаковые направления, то они называются **сонаправленными**: $\overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{b}$;
если параллельные векторы имеют противоположные направления, то они называются **противоположно направленными**: $\overrightarrow{a} \uparrow\downarrow \overrightarrow{b}$.

Определение 4.6. Векторы, расположенные в одной плоскости называются **компланарными**.

Линейные операции над векторами

Определение 4.7. Два вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ называются **равными**: $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$, если они коллинеарны $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$, сонаправленны $\overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{b}$ и имеют одинаковую длину $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}|$.





вектор не меняется, если его переместить в пространстве параллельно самому себе

Определение 4.8. Произведением вектора $\overrightarrow{a}$ на число λ называется новый вектор $\overrightarrow{b} = \lambda \cdot \overrightarrow{a}$, параллельный данному, имеющий длину $|\overrightarrow{b}| = |\lambda| \cdot |\overrightarrow{a}|$ и либо сонаправленный с вектором $\overrightarrow{a}$, если $\lambda > 0$, либо противоположно направленный с $\overrightarrow{a}$, если $\lambda < 0$.

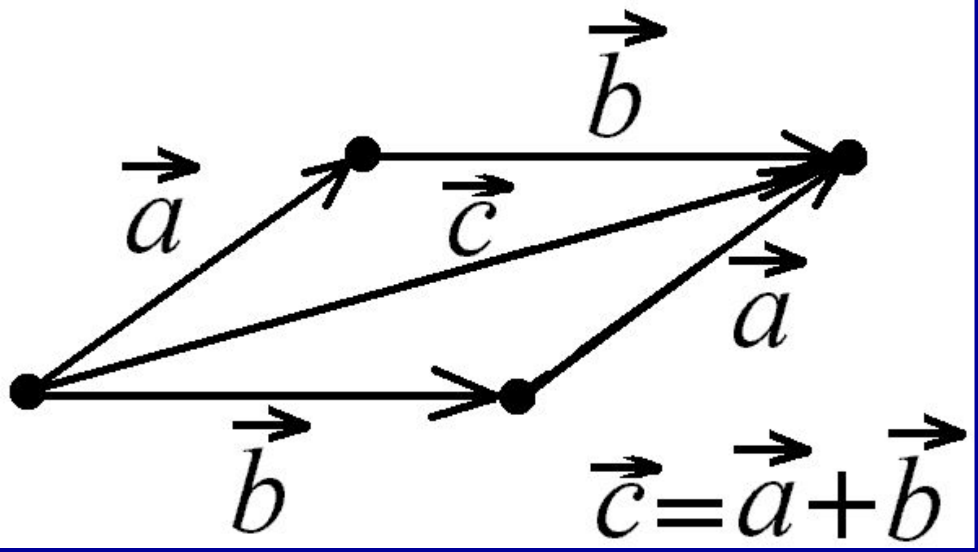
Теорема 4.1. *Если вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ коллинеарны и длина вектора $\overrightarrow{a}$ не ноль, т.е. $|\overrightarrow{a}| \neq 0$, то существует единственное число λ, что*

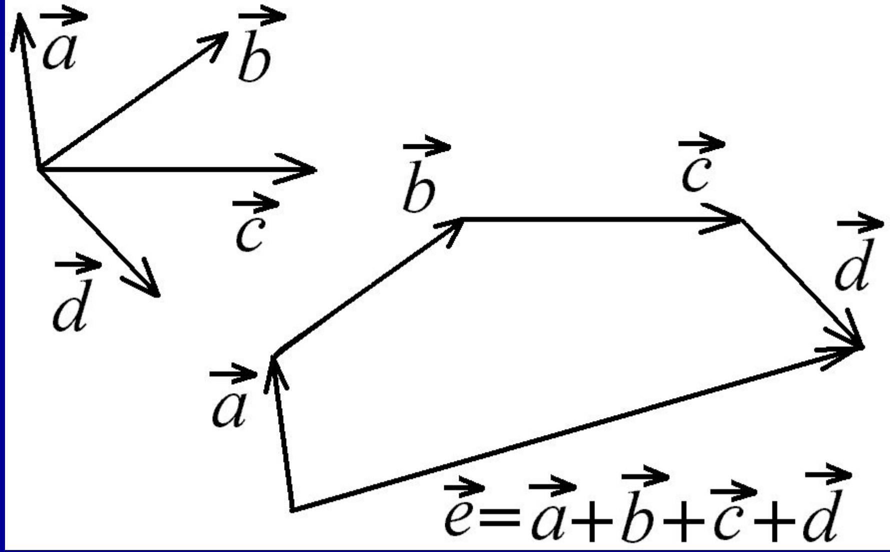
$$\overrightarrow{b} = \lambda \overrightarrow{a},$$

т.е. вектор $\overrightarrow{b}$ **линейно выражается через вектор** $\overrightarrow{a}$.
Доказательство: если параллельные векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ сонаправлены, то $\lambda = |\overrightarrow{b}|/|\overrightarrow{a}|$. А если векторы противоположно направлены, то $\lambda = -|\overrightarrow{b}|/|\overrightarrow{a}|$.
Определение 4.9. **Сумма** векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ есть новый вектор $\overrightarrow{c}$:

$$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$$

к концу вектора $\overrightarrow{a}$ подставляется начало вектора $\overrightarrow{b}$ и из начала вектора $\overrightarrow{a}$ в конец вектора $\overrightarrow{b}$ проводится вектор $\overrightarrow{c}$.
Сумма $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ определяется и по правилу параллелограмма.





Для сложения нескольких векторов надо к концу очередного слагаемого подставлять начало следующего слагаемого, а потом соединить начало самого первого слагаемого с концом последнего слагаемого.

Свойства сложения векторов

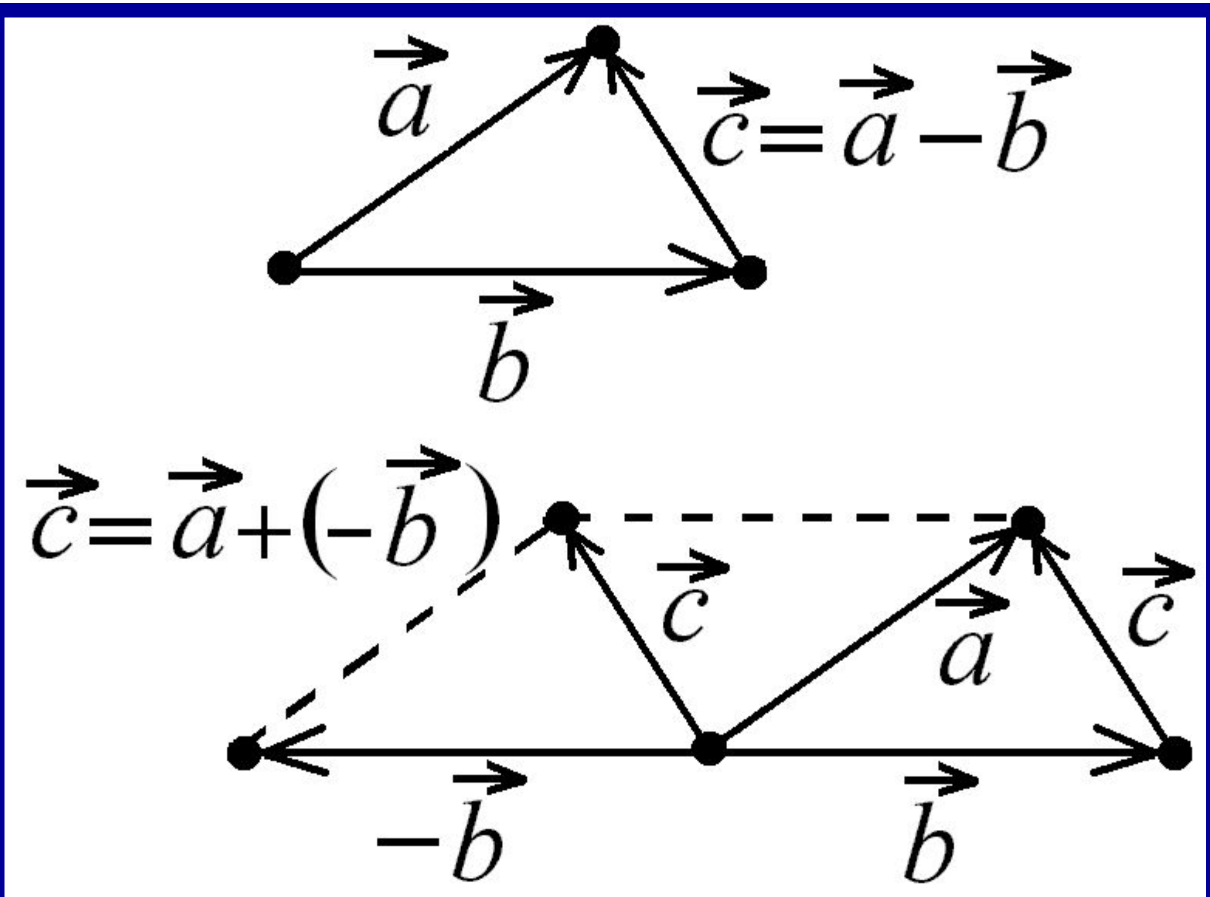
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$$

Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b}$$

или с помощью второй диагонали параллелограмма: вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ должны иметь общее начало и проводить $\vec{c}$ из конца $\vec{b}$ в конец вектора $\vec{a}$, т.к. $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$.

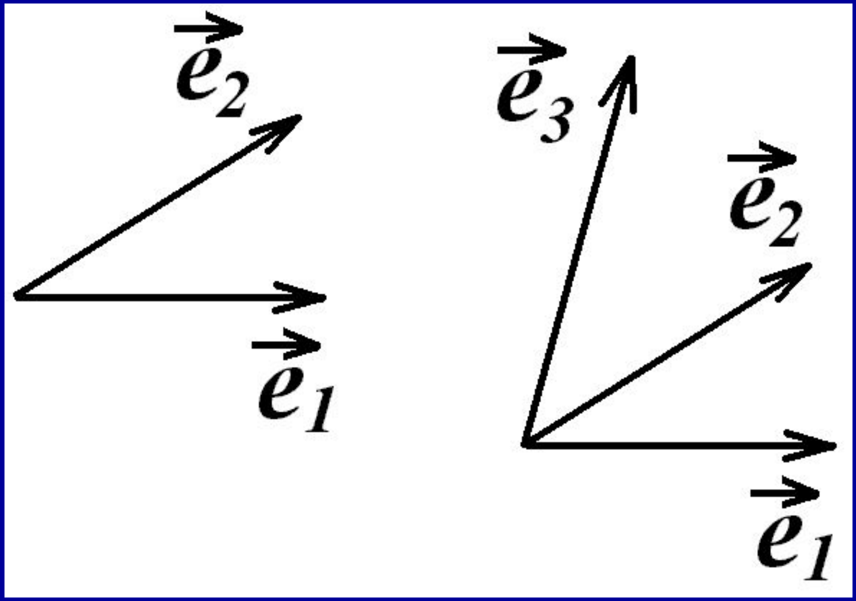


Разложение вектора по базису

Определение 4.10. **Базисом на плоскости** называются любые два неколлинеарных вектора

$$\vec{e_1},\quad \vec{e_2}:\quad \vec{e_1} \nparallel \vec{e_2}$$

Определение 4.11. **Базисом в пространстве** называются любые три вектора $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$, не лежащие в одной плоскости, т.е. не компланарные.



Из определений следует, что среди векторов, образующих базис, заведомо нет нулевых векторов:

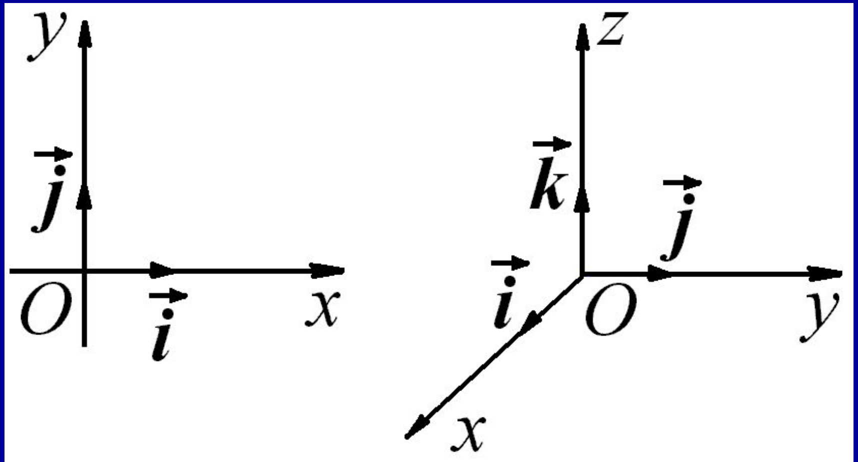
$$|\vec{e_i}| \neq 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Если $|\vec{e}_i| = 1$, $i = 1, 2, 3$, то базис называется **единичным**. Если

$$\vec{e_1} \perp \vec{e_2}, \quad \vec{e_1} \perp \vec{e_3}, \quad \vec{e_2} \perp \vec{e_3},$$

то базис называется **ортогональным** или **декартовым**. Векторы $\vec{e_1} = \vec{i}$, $\vec{e_2} = \vec{j}$, $\vec{e_3} = \vec{k}$ образуют единичный декартов базис на плоскости и в пространстве:

$$\vec{i}, \quad \vec{j}, \quad \vec{k} : \quad |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1, \quad \vec{i} \perp \vec{j}, \quad \vec{i} \perp \vec{k}, \quad \vec{j} \perp \vec{k}$$



Теорема 4.2. *Любой вектор можно разложить по базису, причем единственным образом, т.е. для любого вектора* $\vec{a}$ *существует единственный набор из трех чисел* a_1, a_2, a_3 *такой, что справедливо равенство*

$$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}, \qquad (4.1)$$

вектор $\vec{a}$ **линейно выражается через векторы** $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$.

Определение 4.11. Числа a_1, a_2, a_3 – **координаты** вектора $\vec{a}$, представление (4.1) называется **разложением вектора** $\vec{a}$ **по заданному базису** $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$,

$$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3} = \{a_1; a_2; a_3\} \qquad (4.2)$$

т.е. **вектор задан своими координатами**.
Вместо геометрического объекта – вектора
рассматривается математический объект –
упорядоченная тройка чисел **координаты вектора**.

Пусть базис декартов: $\vec{e_1} = \vec{i}$, $\vec{e_2} = \vec{j}$, $\vec{e_3} = \vec{k}$

$$a_1 = \text{пр}_{\vec{i}}\,\vec{a}, \quad a_2 = \text{пр}_{\vec{j}}\,\vec{a}, \quad a_3 = \text{пр}_{\vec{k}}\,\vec{a}$$

Определение 4.12.

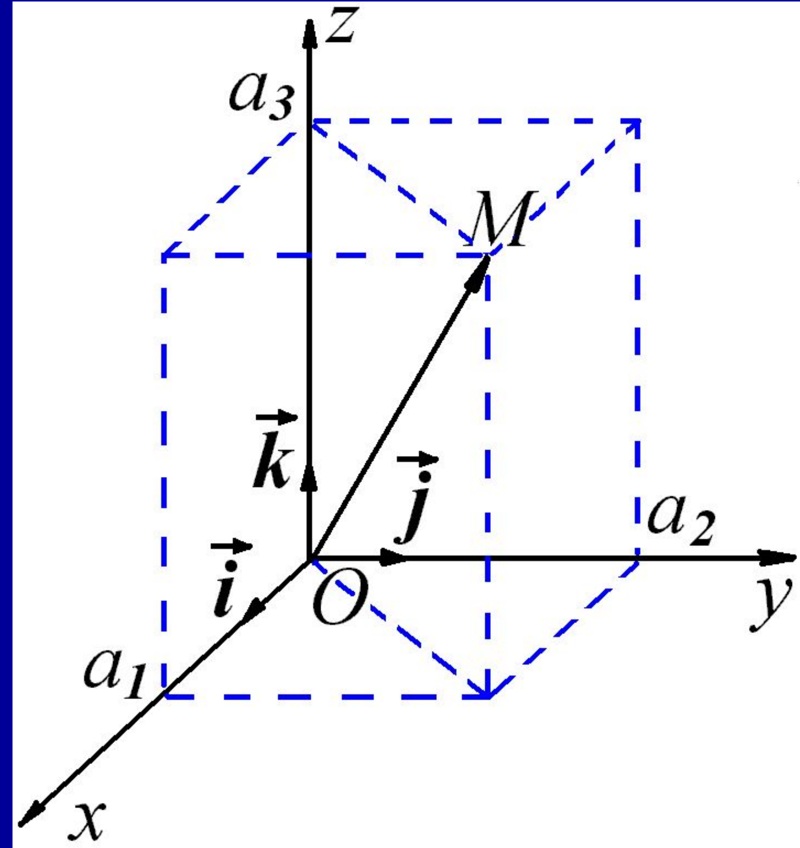
Если начало вектора $\vec{a}$ помещено в **начало координат** O, то вектор $\vec{a}$ называют **радиус-вектором**

$M(a_1, a_2, a_3)$ — точка;

$\overrightarrow{OM} = \{a_1; a_2; a_3\}$ – вектор

по теореме Пифагора

$$|\overrightarrow{OM}| = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$



Линейные операции над векторами, заданными своими координатами

Теорема 4.3. **Равенство векторов.** *Вектор* $\overrightarrow{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$ *равен вектору* $\overrightarrow{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$ *тогда и только тогда, когда равны соответствующие координаты этих векторов*

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \iff a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad a_3 = b_3$$

Доказательство:

$$\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}; \quad \overrightarrow{b} = b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3}$$

по условию теоремы

$$a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3} = b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3}$$

из единственности разложения вектора по базису

$$a_1 = b_1; \quad a_2 = b_2; \quad a_3 = b_3$$

Теорема 4.4. **Умножение вектора на число.** *Чтобы вектор* $\overrightarrow{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$ *умножить на число* λ, *надо каждую координату исходного вектора умножить на это число*

$$\lambda \overrightarrow{a} = \{\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3\}$$

$$\overrightarrow{b} = \{\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3\} \| \overrightarrow{a}$$

Теорема 4.5. **Параллельность векторов.** *Векторы* $\overrightarrow{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$ *и* $\overrightarrow{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$ *параллельны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны*

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = \lambda$$

Теорема 4.6. **Сложение и вычитание векторов.** *Чтобы сложить (вычесть) векторы* $\overrightarrow{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$ *и* $\overrightarrow{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$, *надо сложить (вычесть) соответствующие координаты*

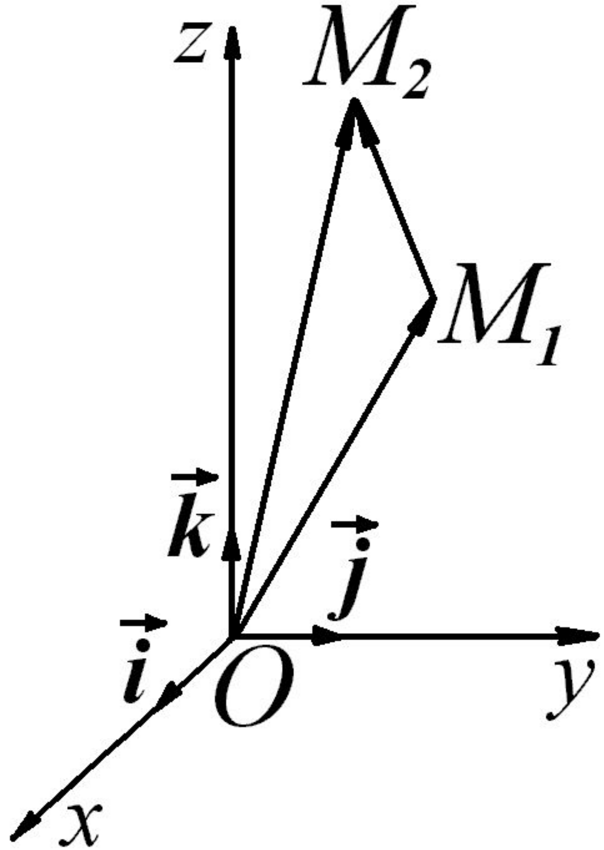
$$\overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b} = \{a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3\}$$

Теорема 4.7. **Определение вектора через координаты его начала и конца.** *Если у вектора* $\overrightarrow{M_1M_2}$ *известны координаты начальной точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *и конечной точки* $M_2(x_2, y_2, z_2)$, *то для определения координат вектора* $\overrightarrow{M_1M_2}$ *надо из координат конца вектора вычесть соответствующие координаты начала вектора*

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

Т.к.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1},$$



Длина вектора

$$|\overrightarrow{M_1 M_2}| =$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

С векторами можно производить и **нелинейные** операции, например, различные умножения.

Из всех возможных произведений векторов ниже будут рассмотрены три:

скалярное, **векторное** и **смешанное**.

Скалярное произведение векторов

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}\,\vec{b}$$

Определение. Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вычисляется по формуле

$$\boxed{(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})}$$

$$(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \varphi \text{ — угол между } \vec{a},\ \vec{b}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$

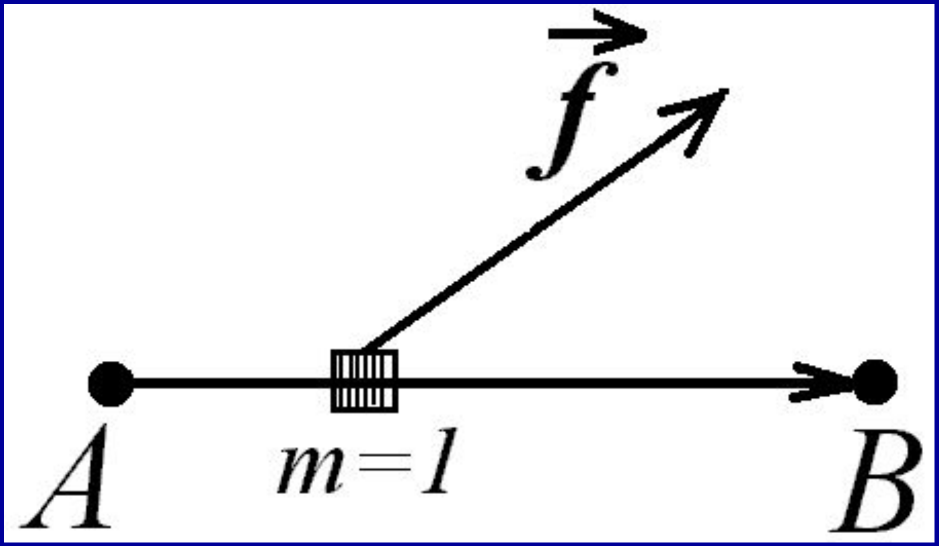
Результатом **скалярного** произведения является **число**, т.е. **скалярная величина**.

Теорема. **Свойства скалярного произведения**. *Имеют место следующие соотношения:*

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, тогда и только тогда, когда $\vec{a}\perp\vec{b}$;
2. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$, $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$;
3. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;
4. $\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\lambda\vec{b}$, λ — число;
5. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}\cdot|\vec{b}|=\text{пр}_{\vec{a}}\,\vec{b}\cdot|\vec{a}|$;
6. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$;
7. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\{a_1;a_2;a_3\}\cdot\{b_1;b_2;b_3\}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$;
   вид скалярного произведения через координаты сомножителей;
8. $\cos\varphi=\dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

Механический смысл скалярного произведения. *Если тело единичной массы под дествием постоянной силы* $\vec{f}$ *перемещается из точки* A *в точку* B *вдоль прямой, то совершаемая при этом работа* W *есть скалярное произведение вектора силы на вектор перемещения:*

$$W = \vec{f} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{f}$$

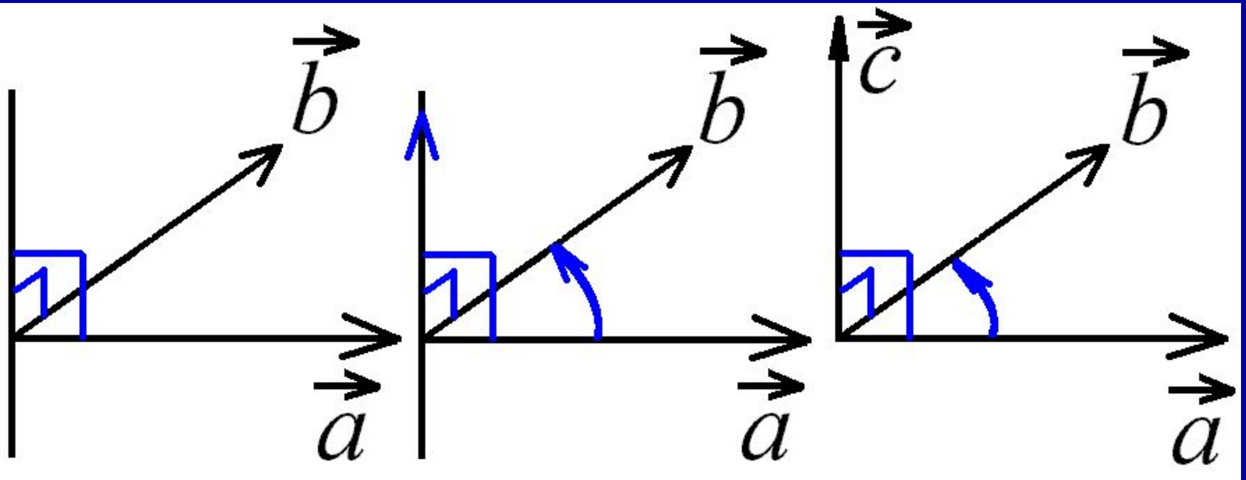


Векторное произведение векторов

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b}$$

Определение. Результат векторного произведения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть третий **вектор** $\vec{c}$: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ — однозначно определяемый следущими тремя условиями:

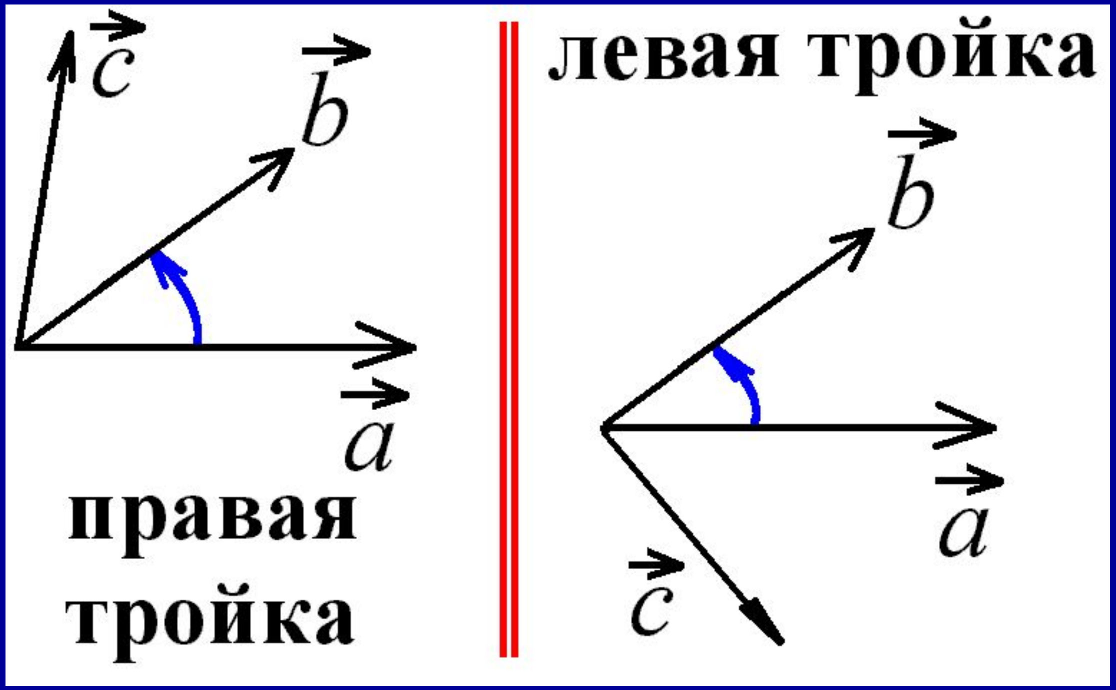
1. $\vec{c} \perp \vec{a}\ ,\ \ \vec{c} \perp \vec{b}$;
2. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — правая тройка векторов;
3. $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$



Определение.

Тройка векторов называется **правой**, если кратчайший поворот от первого вектора ко второму из конца третьего вектора наблюдается **против хода часовой стрелки**.

Тройка векторов называется **левой**, если кратчайший поворот от первого вектора ко второму из конца третьего вектора наблюдается **по ходу часовой стрелки**.



Теорема. **Свойства векторного произведения**. *Имеют место следующие соотношения:*

1. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{O}$, если $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$;
2. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$;
3. $\lambda[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}] = (\lambda\overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \times (\lambda\overrightarrow{b})$, λ — число;
4. $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$;
5. $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = S_{\Diamond ABCD}$;
6. $\{a_1; a_2; a_3\} \times \{b_1; b_2; b_3\} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

6. Вид векторного произведения через координаты сомножителей – **правило для запоминания**

$$\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}, \quad \vec{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} = \begin{vmatrix} \boxed{\vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k}} \\ a_1 \quad a_2 \quad a_3 \\ b_1 \quad b_2 \quad b_3 \end{vmatrix} =$$

определитель нужно раскрыть по первой строке

$$= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + (-1)\vec{j} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

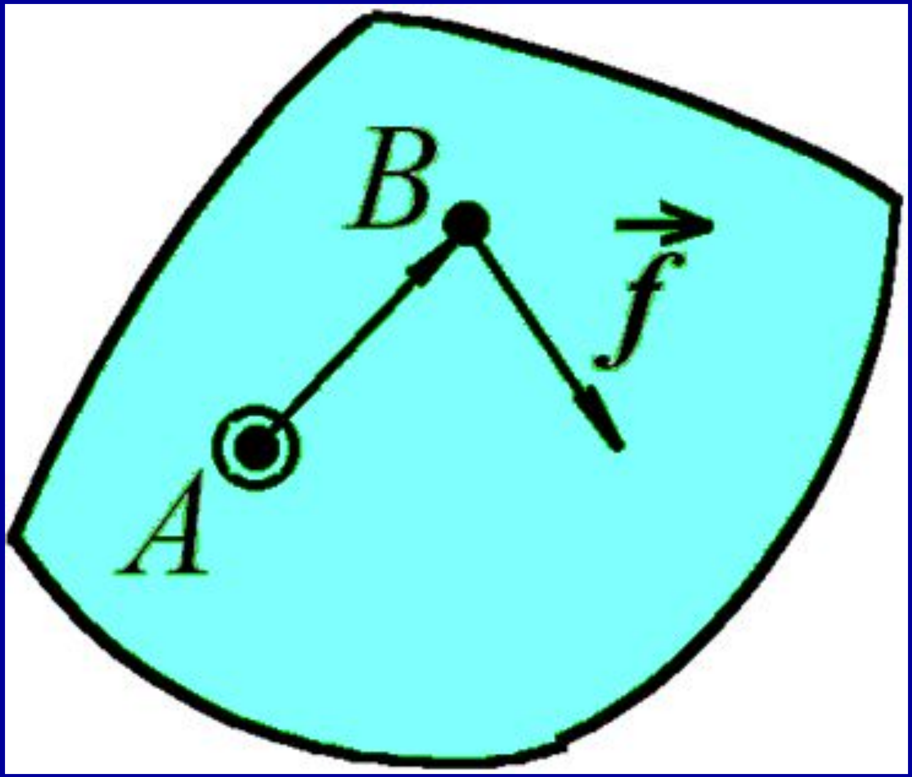
$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{k} =$$

$$= c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k} = \{c_1; c_2; c_3\} = \vec{c}$$

Механический смысл векторного произведения. Тело закреплено в точке A, в точке B приложена сила $\vec{f}$, поэтому тело крутится.

$$M_A \vec{f} = \overrightarrow{AB} \times \vec{f}$$

$\overrightarrow{AB}$ – вектор-плечо



Смешанное произведение

Определение. $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{d}$ – вектор; $\vec{d} \cdot \vec{c}$ – число;

результат смешанного произведения – **число, скаляр**

Вид через координаты сомножителей

Пусть $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, $\vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$

$$(\vec{a} \times \vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \boxed{c_1 \; c_2 \; c_3} \end{vmatrix} = c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3 = \vec{d} \cdot \vec{c};$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{d} = \{d_1\, d_2, d_3\} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Свойства смешанного произведения:

1.

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$$

Если определитель раскрыть по первой строке, то

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{f} = \overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$$

2.

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} = -\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c} = \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}\,\overrightarrow{a}$$

по свойству определителей.

3. $\quad \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \pm V_{\text{пар}} = \pm 6V_{\text{пир}}$

$V_{\text{пар}}$ – объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{d}\,\vec{c} = |\vec{d}||\vec{c}|\cos\varphi = S_{\Diamond ABCD}\cdot(\pm H) = \pm V_{\text{пар}}$$