

## **Аналитическая геометрия**

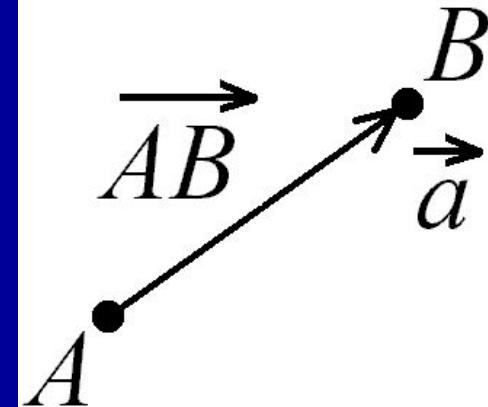
Геометрические объекты описывают формулами.  
Геометрические задачи решают не с помощью геометрических построений, а также с помощью формул.

# Векторы. Линейные операции над векторами.

## Разложение вектора по базису

Скалярная величина, скаляр – число.

Определение 4.1. Вектор – направленный отрезок  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{a}$ , а



Определение 4.2. Расстояние между начальной и конечной точками вектора называется **модулем** или **длиной** вектора:

$$|\overrightarrow{AB}|, |\vec{a}|$$

Определение 4.3. Вектор, у которого конец совпадает с началом, называется **нуль-вектором**:  $\vec{O}$ ,  $|\vec{O}| = 0$ .

По определению нуль-вектор параллелен любому вектору.

Определение 4.4. Вектор, имеющий длину равную единице, называется **единичным** вектором :  $|\vec{a}| = 1$ .

Определение 4.5. Параллельные векторы называются **коллинеарными**:  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ;

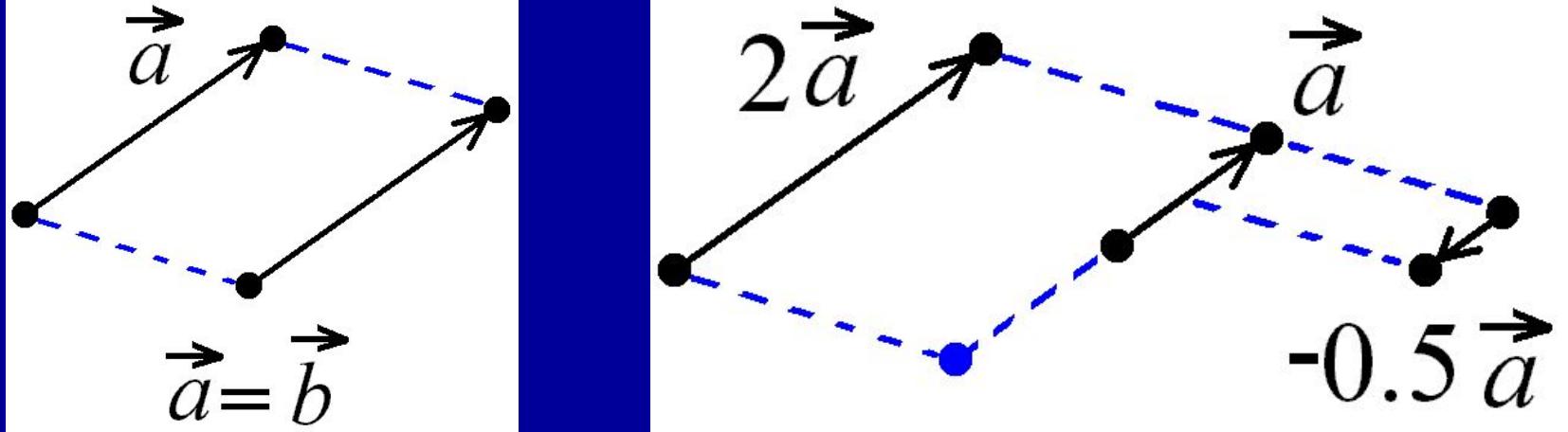
если коллинеарные векторы имеют одинаковые направления, то они называются **сонаправленными**:  $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ ;

если параллельные векторы имеют противоположные направления, то они называются **противоположно направленными**:  $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ .

Определение 4.6. Векторы, расположенные в одной плоскости называются **компланарными**.

### Линейные операции над векторами

Определение 4.7. Два вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называются **равными**:  $\vec{a} = \vec{b}$ , если они коллинеарны  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , сонаправлены  $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$  и имеют одинаковую длину  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ .



*вектор не меняется, если его переместить в пространстве параллельно самому себе*

**Определение 4.8.** Произведением вектора  $\vec{a}$  на число  $\lambda$  называется новый вектор  $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$ , параллельный данному, имеющий длину  $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$  и либо сонаправленный с вектором  $\vec{a}$ , если  $\lambda > 0$ , либо противоположно направленный с  $\vec{a}$ , если  $\lambda < 0$ .

**Теорема 4.1.** Если вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны и длина вектора  $\vec{a}$  не ноль, т.е.  $|\vec{a}| \neq 0$ , то существует единственное число  $\lambda$ , что

$$\vec{b} = \lambda \vec{a},$$

т.е. вектор  $\vec{b}$  линейно выражается через вектор  $\vec{a}$ .

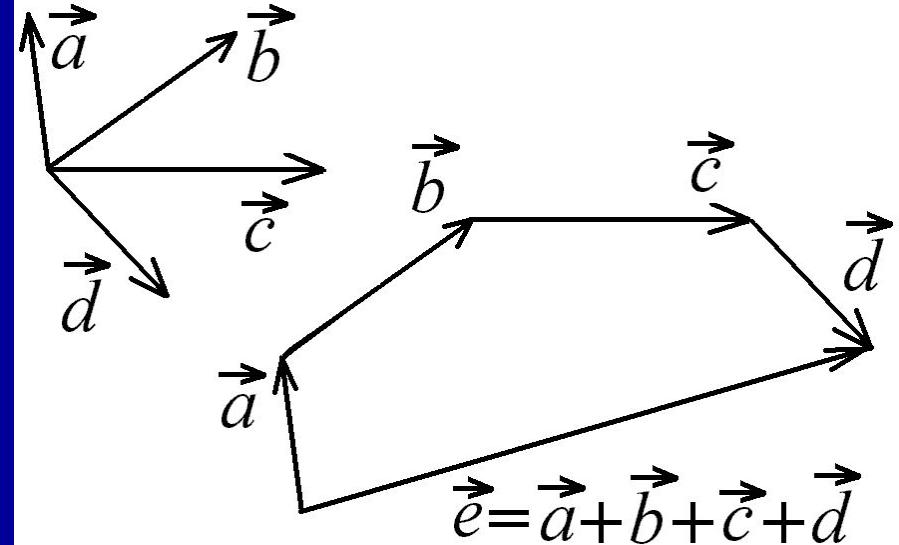
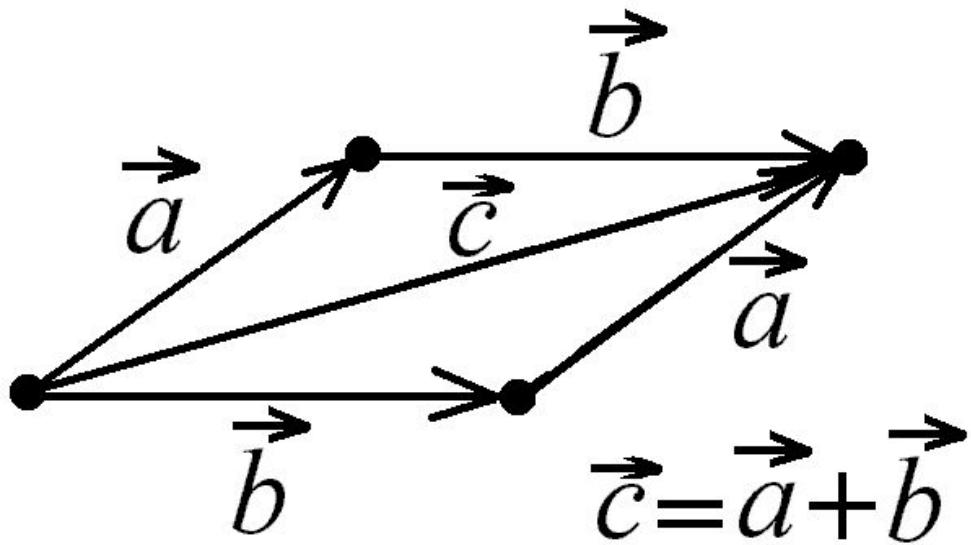
Доказательство: если параллельные векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  соноправлены, то  $\lambda = |\vec{b}| / |\vec{a}|$ . А если векторы противоположно направлены, то  $\lambda = -|\vec{b}| / |\vec{a}|$ .

**Определение 4.9.** Сумма векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  есть новый вектор  $\vec{c}$ :

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

к концу вектора  $\vec{a}$  подставляется начало вектора  $\vec{b}$  и из начала вектора  $\vec{a}$  в конец вектора  $\vec{b}$  проводится вектор  $\vec{c}$ .

Сумма  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$  определяется и по правилу параллелограмма.



Для сложения нескольких векторов надо к концу очередного слагаемого подставлять начало следующего слагаемого, а потом соединить начало самого первого слагаемого с концом последнего слагаемого.

Свойства сложения векторов

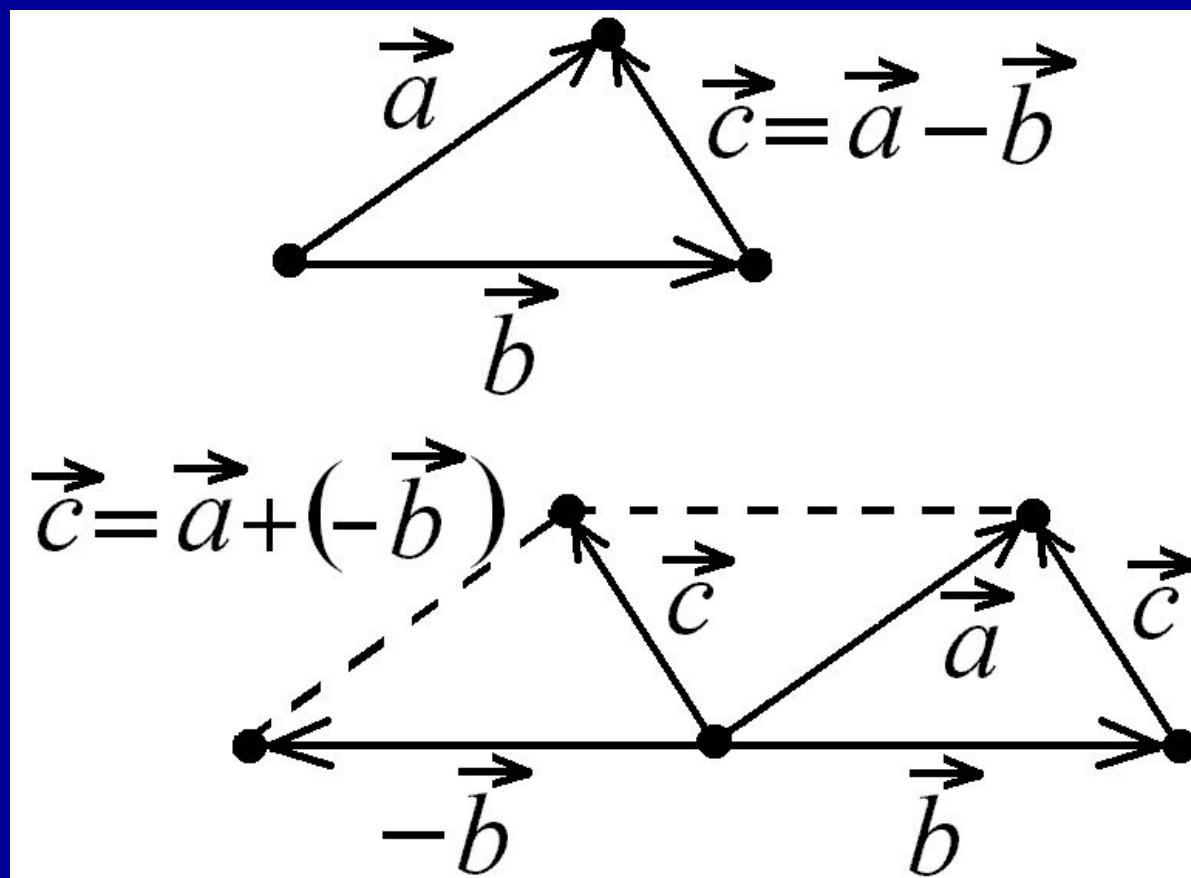
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

**Разность** векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ :

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b}$$

или с помощью второй диагонали параллелограмма:  
вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  должны иметь общее начало и проводить  $\vec{c}$   
из конца  $\vec{b}$  в конец вектора  $\vec{a}$ , т.к.  $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ .

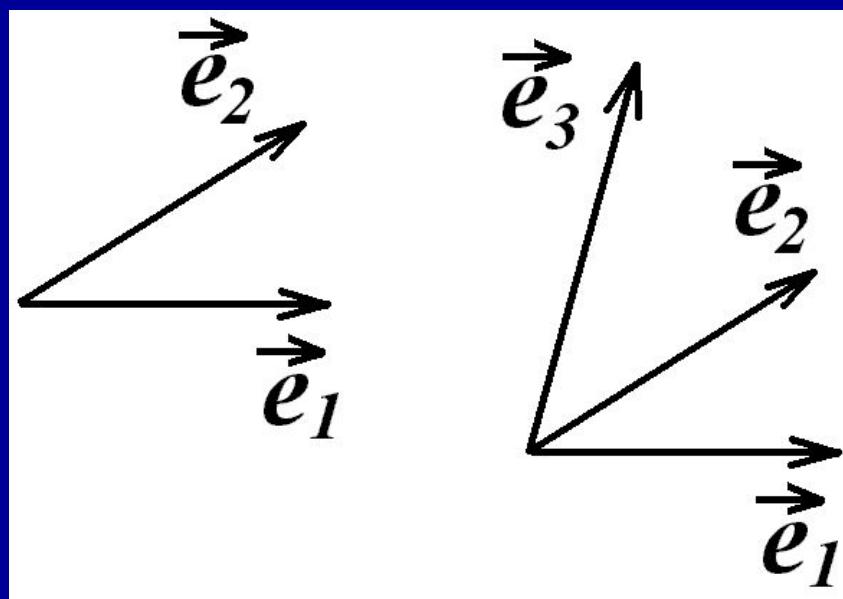


## Разложение вектора по базису

Определение 4.10. **Базисом на плоскости** называются любые два неколлинеарных вектора

$$\vec{e_1}, \vec{e_2} : \vec{e_1} \parallel \vec{e_2}$$

Определение 4.11. **Базисом в пространстве** называются любые три вектора  $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ , не лежащие в одной плоскости, т.е. не компланарные.



Из определений следует, что среди векторов, образующих базис, заведомо нет нулевых векторов:

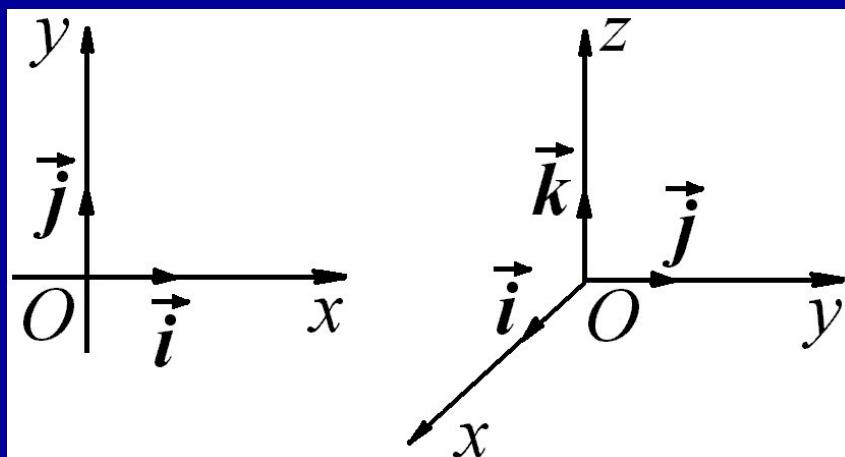
$$|\vec{e}_i| \neq 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Если  $|\vec{e}_i| = 1, i = 1, 2, 3$ , то базис называется **единичным**.  
Если

$$\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2, \quad \vec{e}_1 \perp \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3,$$

то базис называется **ортогональным** или **декартовым**.  
Векторы  $\vec{e}_1 = \vec{i}$ ,  $\vec{e}_2 = \vec{j}$ ,  $\vec{e}_3 = \vec{k}$  образуют единичный  
декартов базис на плоскости и в пространстве:

$$\vec{i}, \quad \vec{j}, \quad \vec{k} : \quad |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1, \quad \vec{i} \perp \vec{j}, \quad \vec{i} \perp \vec{k}, \quad \vec{j} \perp \vec{k}$$



Теорема 4.2. Любой вектор можно разложить по базису, причем единственным образом, т.е. для любого вектора  $\vec{d}$  существует единственный набор из трех чисел  $a_1, a_2, a_3$  такой, что справедливо равенство

$$\vec{d} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3, \quad (4.1)$$

вектор  $\vec{d}$  линейно выражается через векторы  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ .

Определение 4.11. Числа  $a_1, a_2, a_3$  – **координаты** вектора  $\vec{d}$ , представление (4.1) называется **разложением вектора  $\vec{d}$  по заданному базису  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$** ,

$$\vec{d} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = \{a_1; a_2; a_3\} \quad (4.2)$$

т.е. **вектор задан своими координатами**.

Вместо геометрического объекта – вектора рассматривается математический объект – упорядоченная тройка чисел **координаты вектора**.

Пусть базис декартов:  $\vec{e}_1 = \vec{i}$ ,  $\vec{e}_2 = \vec{j}$ ,  $\vec{e}_3 = \vec{k}$

$$a_1 = \text{пр}_{\vec{i}} \vec{d}, \quad a_2 = \text{пр}_{\vec{j}} \vec{d}, \quad a_3 = \text{пр}_{\vec{k}} \vec{d}$$

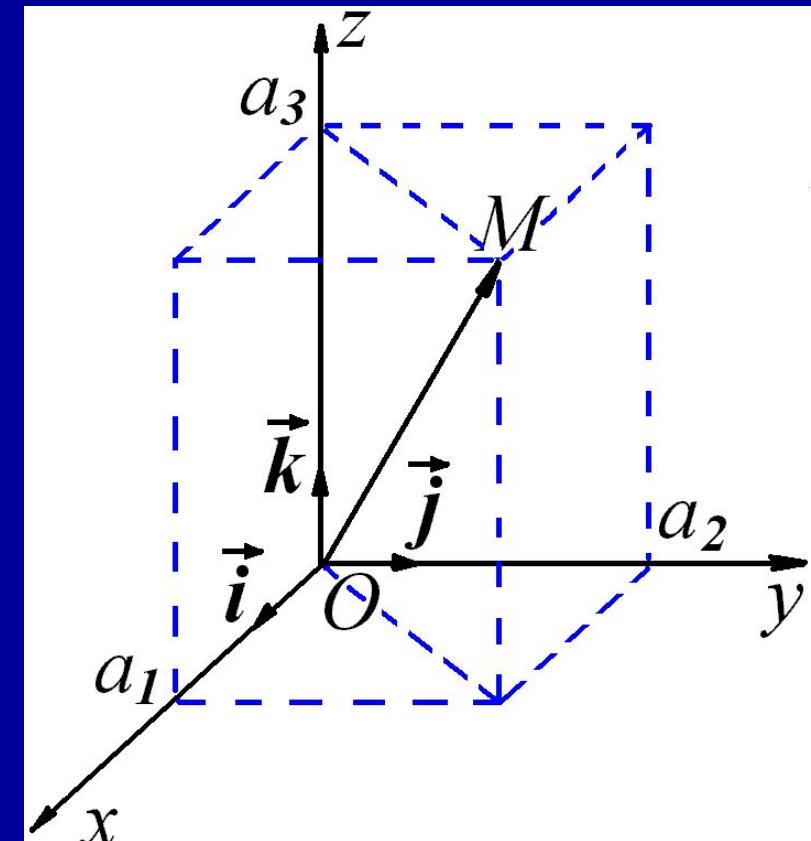
### Определение 4.12.

Если начало вектора  $\vec{d}$  помещено в **начало координат**  $O$ , то вектор  $\vec{d}$  называют **радиус-вектором**

$M(a_1, a_2, a_3)$  — точка;

$\overrightarrow{OM} = \{a_1; a_2; a_3\}$  — вектор по теореме Пифагора

$$|\overrightarrow{OM}| = |\vec{d}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$



## Линейные операции над векторами, заданными своими координатами

**Теорема 4.3. Равенство векторов.** Вектор  $\vec{d} = \{a_1; a_2; a_3\}$  равен вектору  $\vec{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$  тогда и только тогда, когда равны соответствующие координаты этих векторов

$$\vec{d} = \vec{b} \iff a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad a_3 = b_3$$

Доказательство:

$$\vec{d} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3; \quad \vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3$$

по условию теоремы

$$a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3$$

из единственности разложения вектора по базису

$$a_1 = b_1; \quad a_2 = b_2; \quad a_3 = b_3$$

**Теорема 4.4. Умножение вектора на число.** Чтобы вектор  $\vec{d} = \{a_1; a_2; a_3\}$  умножить на число  $\lambda$ , надо каждую координату исходного вектора умножить на это число

$$\lambda \vec{d} = \{\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3\}$$

$$\vec{b} = \{\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3\} \parallel \vec{d}$$

**Теорема 4.5. Параллельность векторов.** Векторы  $\vec{d} = \{a_1; a_2; a_3\}$  и  $\vec{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$  параллельны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = \lambda$$

**Теорема 4.6. Сложение и вычитание векторов.** Чтобы сложить (вычесть) векторы  $\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$  и  $\vec{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$ , надо сложить (вычесть) соответствующие координаты

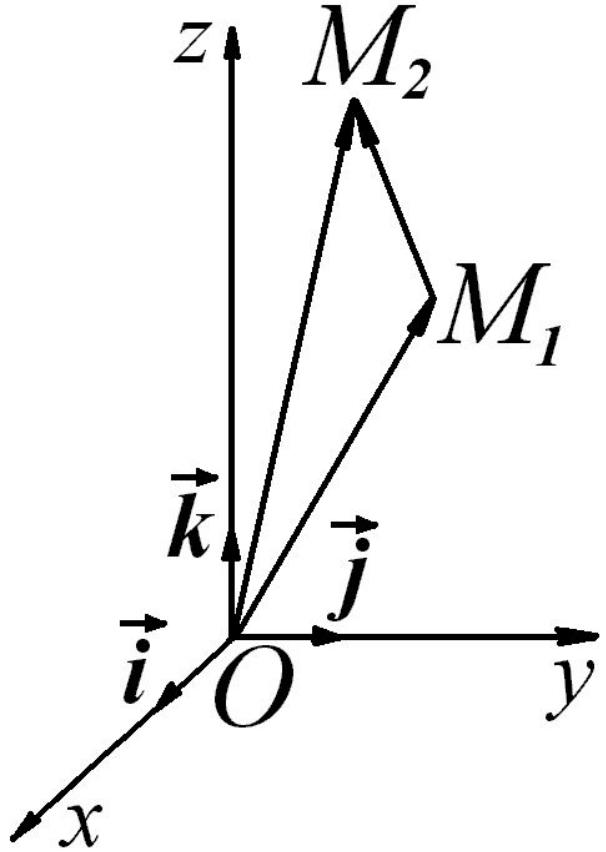
$$\vec{a} \pm \vec{b} = \{a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3\}$$

**Теорема 4.7. Определение вектора через координаты его начала и конца.** Если у вектора  $\overrightarrow{M_1 M_2}$  известны координаты начальной точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и конечной точки  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ , то для определения координат вектора  $\overrightarrow{M_1 M_2}$  надо из координат конца вектора вычесть соответствующие координаты начала вектора

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

Т.к.

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1},$$



Длина вектора

$$|\overrightarrow{M_1 M_2}| =$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

С векторами можно производить и **нелинейные** операции, например, различные умножения.

Из всех возможных произведений векторов ниже будут рассмотрены три:

**скалярное, векторное и смешанное.**

### Скалярное произведение векторов

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \vec{b}$$

Определение. Скалярное произведение двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  вычисляется по формуле

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos (\widehat{\vec{a}}, \widehat{\vec{b}})$$

$$(\widehat{\vec{a}}, \widehat{\vec{b}}) = \varphi - \text{угол между } \vec{a}, \vec{b}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$$

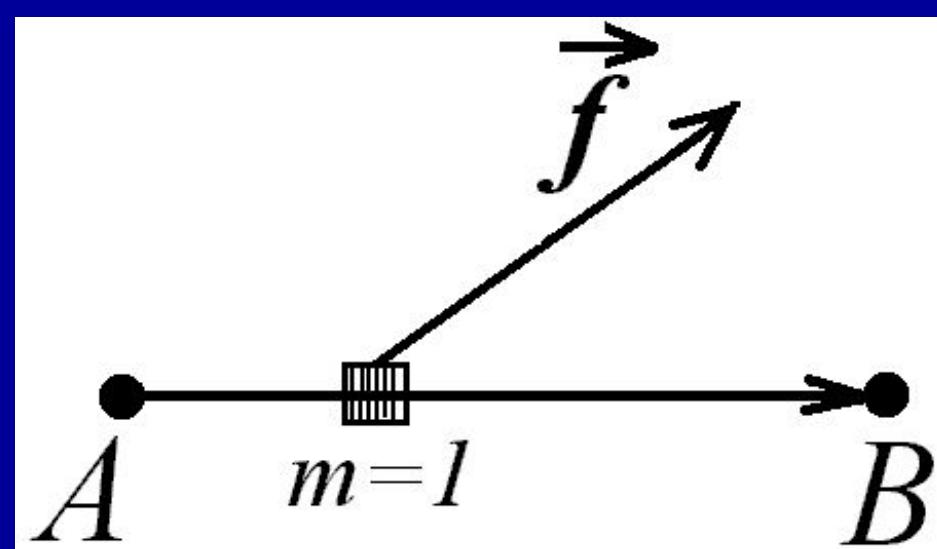
Результатом **скалярного** произведения является **число**, т.е. **скалярная величина**.

**Теорема. Свойства скалярного произведения. Имеют место следующие соотношения:**

1.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ , тогда и только тогда, когда  $\vec{a} \perp \vec{b}$ ;
2.  $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ ,  $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ ;
3.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ;
4.  $\lambda \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \lambda \vec{b}$ ,  $\lambda$  — число;
5.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} \cdot |\vec{b}| = \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} \cdot |\vec{a}|$ ;
6.  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ ;
7.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \{a_1; a_2; a_3\} \cdot \{b_1; b_2; b_3\} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$  ;  
вид скалярного произведения через координаты сомножителей;
8.  $\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

**Механический смысл скалярного произведения.** Если тело единичной массы под действием постоянной силы  $\vec{f}$  перемещается из точки  $A$  в точку  $B$  вдоль прямой, то совершаемая при этом работа  $W$  есть скалярное произведение вектора силы на вектор перемещения:

$$W = \vec{f} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{f}$$

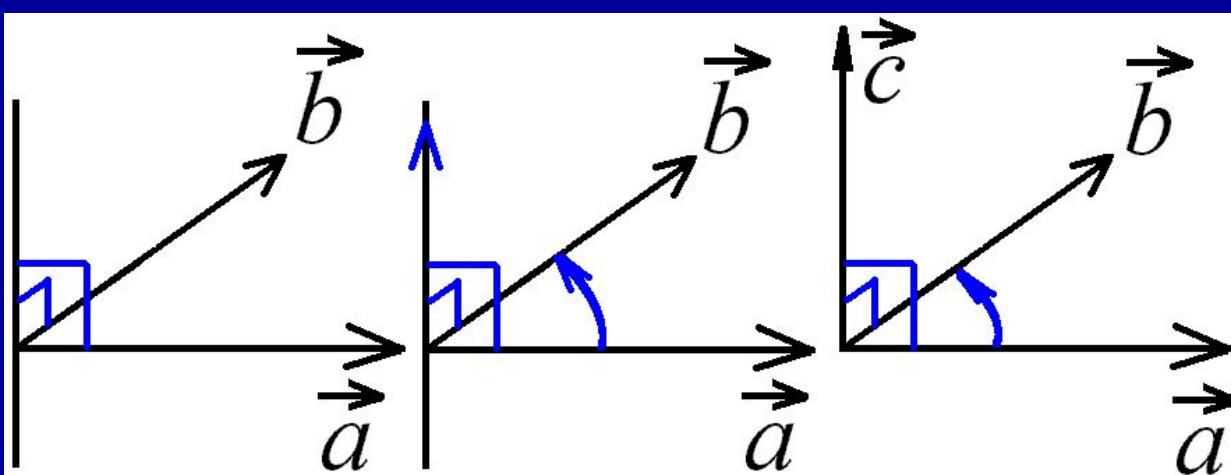


# Векторное произведение векторов

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b}$$

Определение. Результат векторного произведения двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  есть третий **вектор**  $\vec{c}$ :  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  — однозначно определяемый следующими тремя условиями:

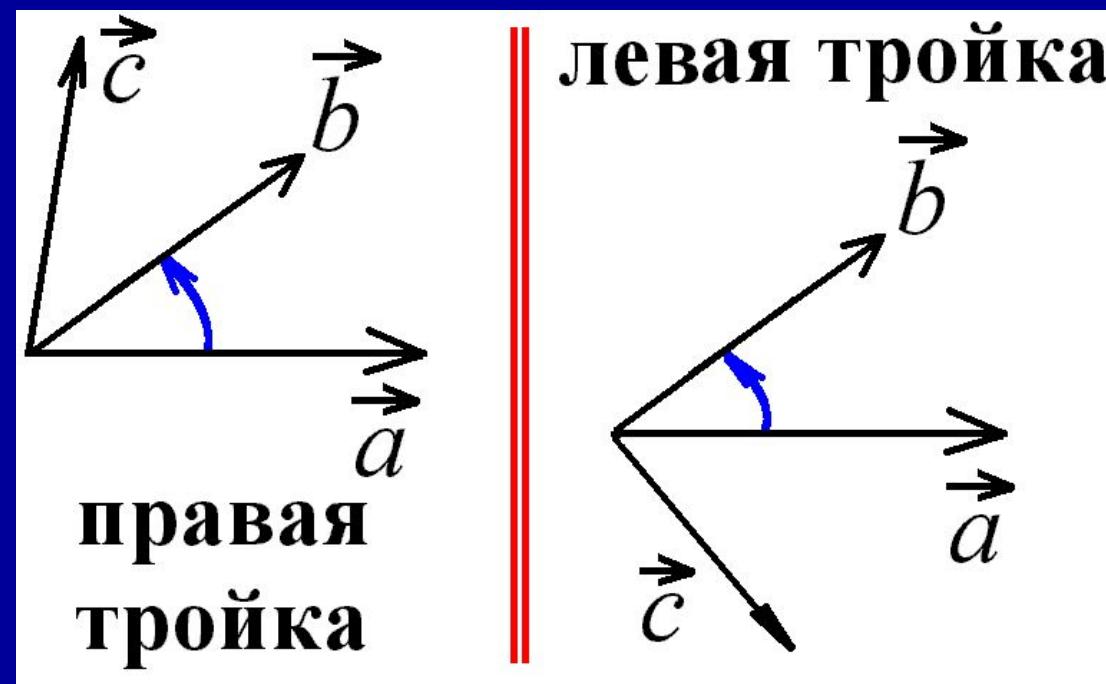
1.  $\vec{c} \perp \vec{a}$ ,  $\vec{c} \perp \vec{b}$ ;
2.  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  — правая тройка векторов;
3.  $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$



## Определение.

Тройка векторов называется **правой**, если кратчайший поворот от первого вектора ко второму из конца третьего вектора наблюдается **против хода часовой стрелки**.

Тройка векторов называется **левой**, если кратчайший поворот от первого вектора ко второму из конца третьего вектора наблюдается **по ходу часовой стрелки**.



**Теорема. Свойства векторного произведения. Имеют место следующие соотношения:**

1.  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ , если  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ;
2.  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ ;
3.  $\lambda[\vec{a}, \vec{b}] = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$ ,  $\lambda$  — число;
4.  $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ ;
5.  $|\vec{a} \times \vec{b}| = S_{\diamond ABCD}$ ;

$$6. \quad \{a_1; a_2; a_3\} \times \{b_1; b_2; b_3\} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

6. Вид векторного произведения через координаты сомножителей – **правило для запоминания**

$$\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}, \quad \vec{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

определитель нужно раскрыть по первой строке

$$= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + (-1) \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k} =$$

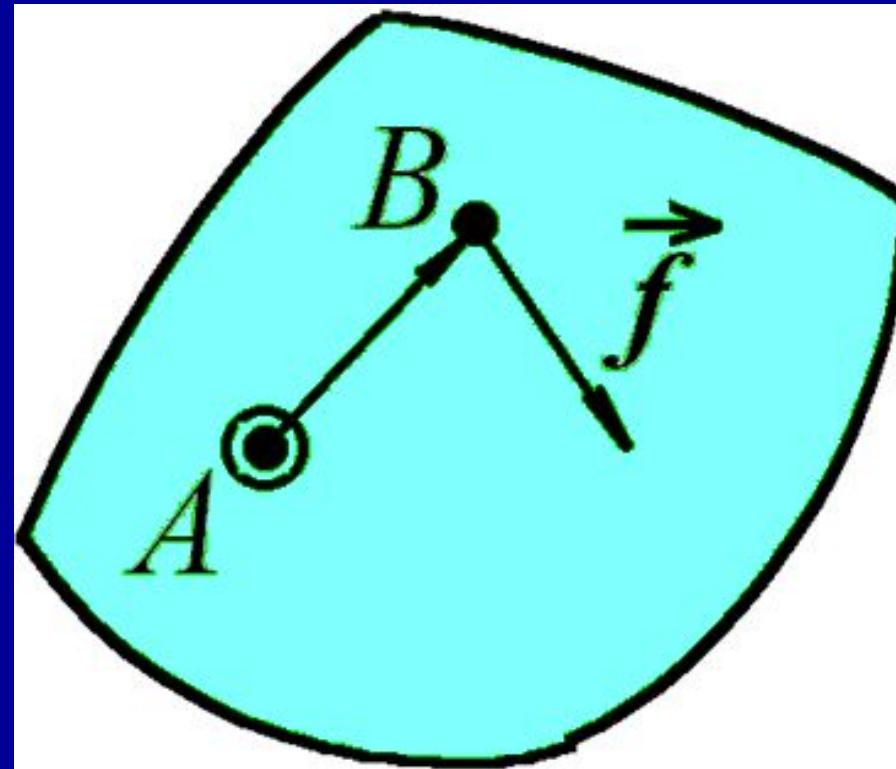
$$= c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k} = \{c_1; c_2; c_3\} = \vec{c}$$

## Механический смысл векторного произведения.

Тело закреплено в точке  $A$ , в точке  $B$  приложена сила  $\vec{f}$ , поэтому тело крутится.

$$M_A \vec{f} = \overrightarrow{AB} \times \vec{f}$$

$\overrightarrow{AB}$  – вектор-плечо



## Смешанное произведение

Определение.  $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{d}$  – вектор;  $\vec{d} \cdot \vec{c}$  – число;

**результат смешанного произведения – число, скаляр**

### Вид через координаты сомножителей

Пусть  $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ ,  $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ ,  $\vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \boxed{c_1} & \boxed{c_2} & \boxed{c_3} \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$
$$= c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3 = \vec{d} \cdot \vec{c};$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{d} = \{d_1, d_2, d_3\} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

## Свойства смешанного произведения:

1.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Если определитель раскрыть по первой строке, то

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{f} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

2.

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = -\vec{b} \vec{a} \vec{c} = \vec{b} \vec{c} \vec{a}$$

по свойству определителей.

$$3. \quad \vec{d} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \pm V_{\text{пар}} = \pm 6V_{\text{пир}}$$

$V_{\text{пар}}$  – объем параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$\vec{d} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{d} \cdot \vec{c} = |\vec{d}| |\vec{c}| \cos \varphi = S_{\triangle ABCD} \cdot (\pm H) = \pm V_{\text{пар}}$$

