Пирамида, её основание, вершина, боковые рёбра, высота, боковая поверхность.

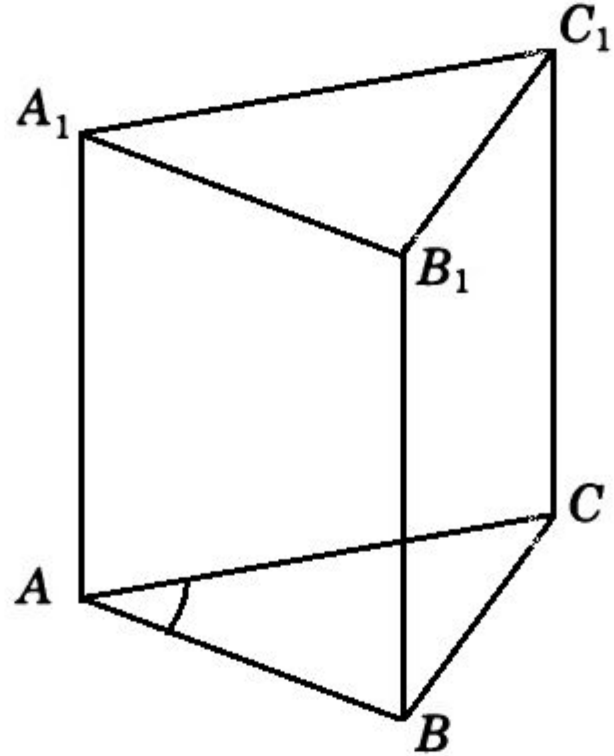
Правильная пирамида, апофема, площадь боковой поверхности правильной пирамиды.

Повторение

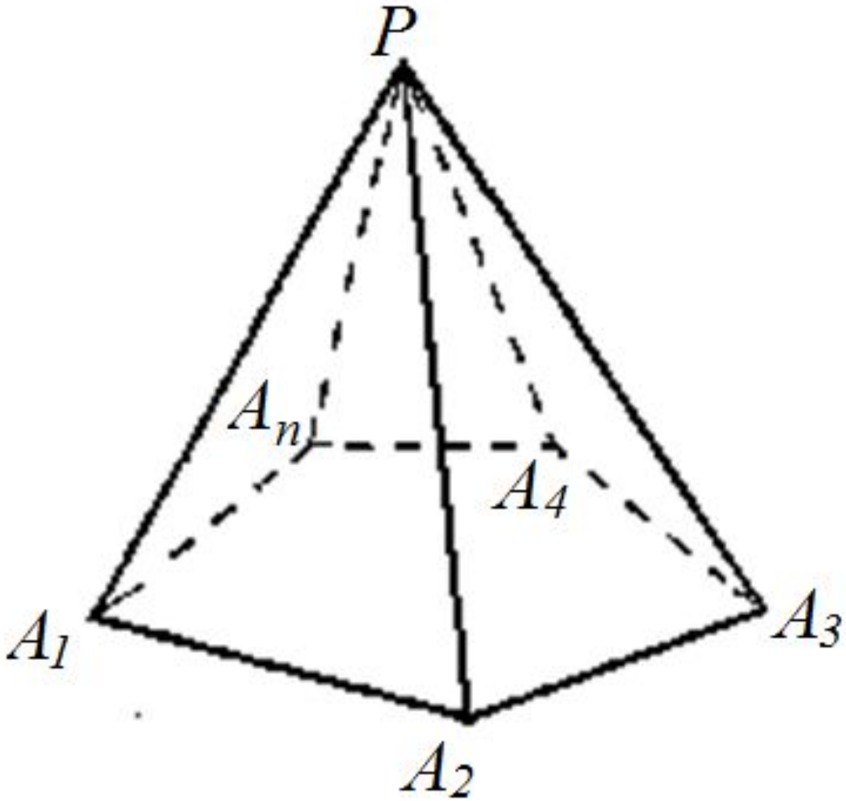
1. Что такое призма?
2. Что может являться в основании призмы?
3. Что является боковой стороной призмы?
4. Призма имеет *n* граней. Какой многоугольник лежит в её основании?
5. Какая призма называется прямой?
6. Является ли призма прямой, если две её смежные боковые грани перпендикулярны к плоскости основания?
7. В какой призме боковые рёбра параллельны и равны её высоте?
8. Какая призма называется правильной?
9. Является ли призма правильной, если все её рёбра равны друг другу?
10. Может ли высота одной из боковых граней наклонной призмы являться и высотой призмы?
11. Чему равна диагональ параллелепипеда?
12. Как найти площадь боковой поверхности призмы?
13. Как найти площадь полной поверхности призмы?

Задача № 1.

Основание прямой призмы – треугольник со сторонами 5 см и 3 см и углом в 120° между ними. Наибольшая из площадей боковых граней равна 35 см². Найдите площади боковой и полной поверхности призмы.



Изучение нового материала

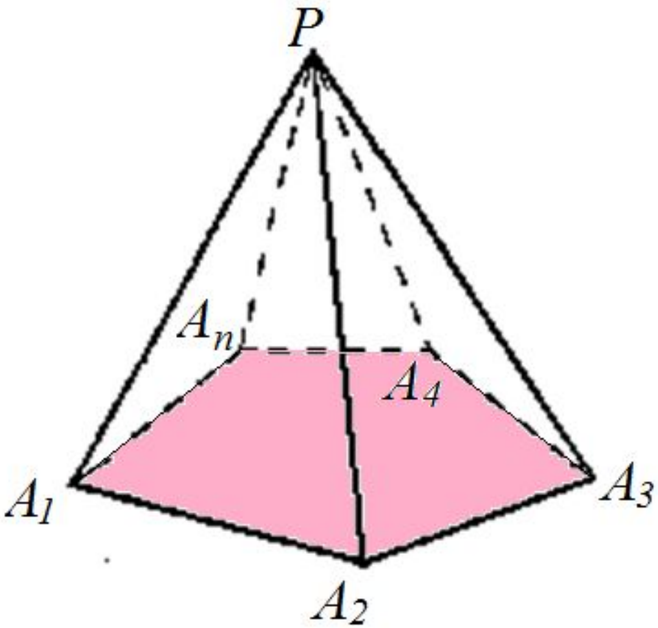


Рассмотрим многоугольник $A_1A_2A_3\ldots A_n$ и точку P, не лежащую в плоскости этого многоугольника. Соединим точку P с вершинами многоугольника.
Получим *n* треугольников: PA_1A_2, PA_2A_3, … , PA_nA_1.

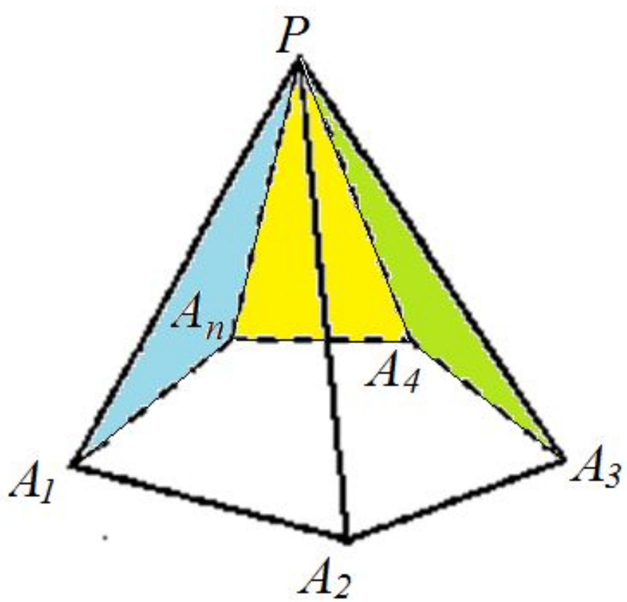
Многогранник, составленный из n-угольника $A_1A_2A_3\ldots A_n$ и *n* треугольников PA_1A_2, PA_2A_3, … , PA_nA_1 называется **пирамидой**.

Точка P – называется **вершиной** пирамиды.

Отрезки PA_1, PA_2, … , Pa_n называются **боковыми рёбрами** пирамиды.

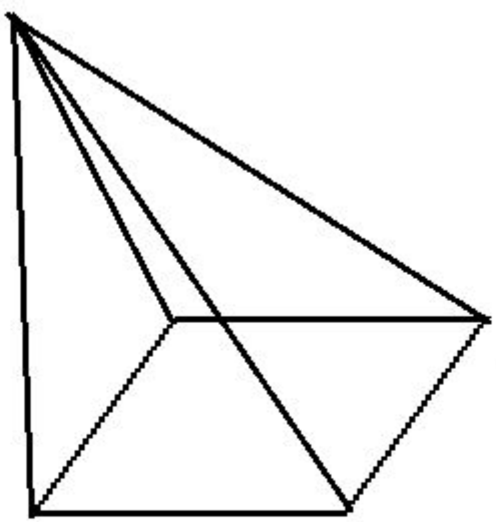


Многоугольник $A_1A_2A_3…A_n$ называется **основанием** пирамиды.

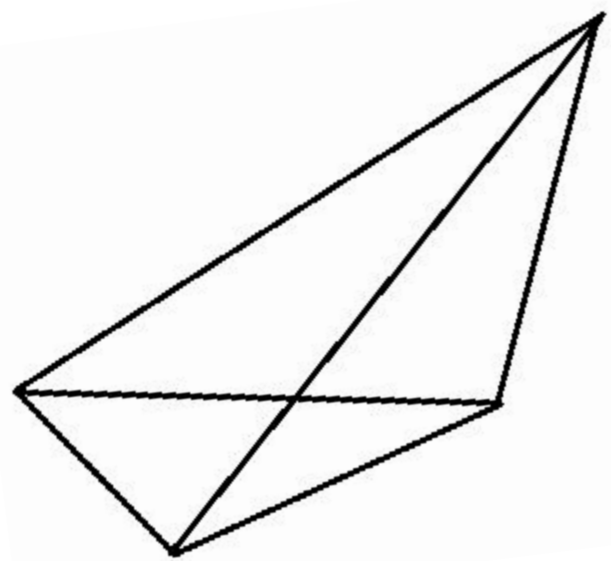


Треугольники PA_1A_2, PA_2A_3, … , PA_nA_1 называются **боковыми гранями** пирамиды.

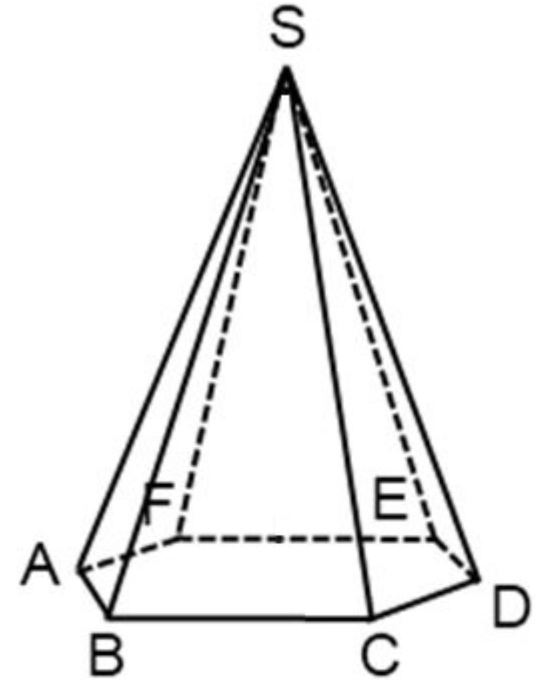
Виды пирамид



Четырёхугольная



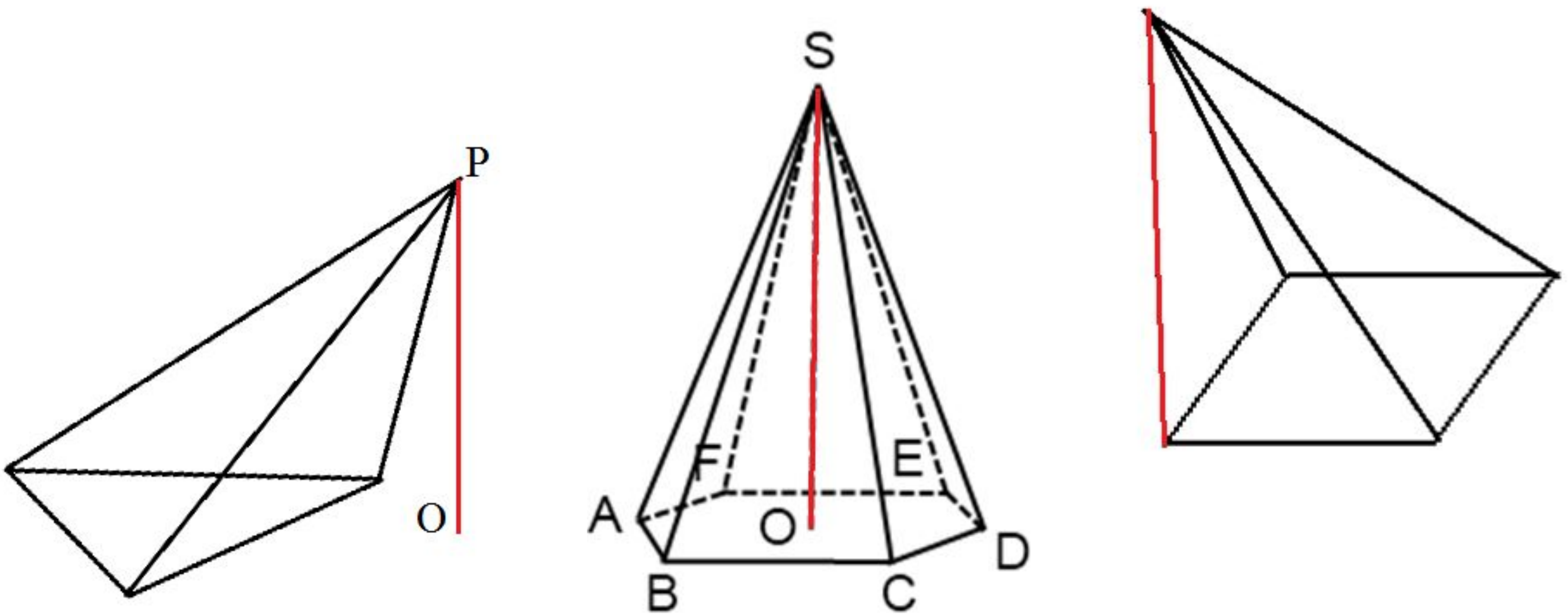
Треугольная



Шестиугольная

Высота пирамиды.

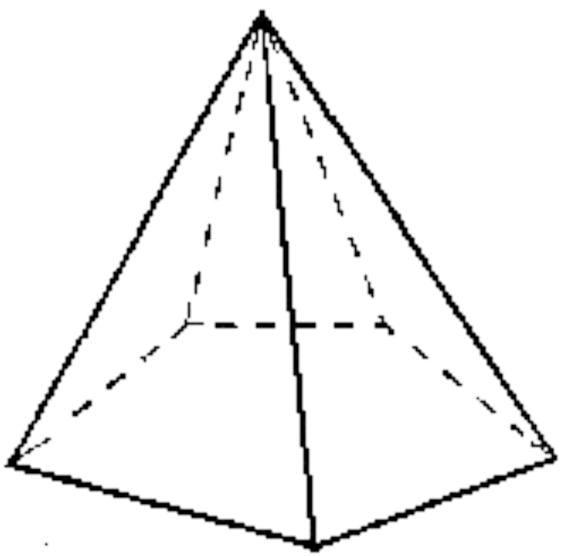
Высотой пирамиды называется перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.



Площадь полной поверхности пирамиды

Площадью полной поверхности пирамиды называется сумма всех её граней, то есть основания и боковых граней.

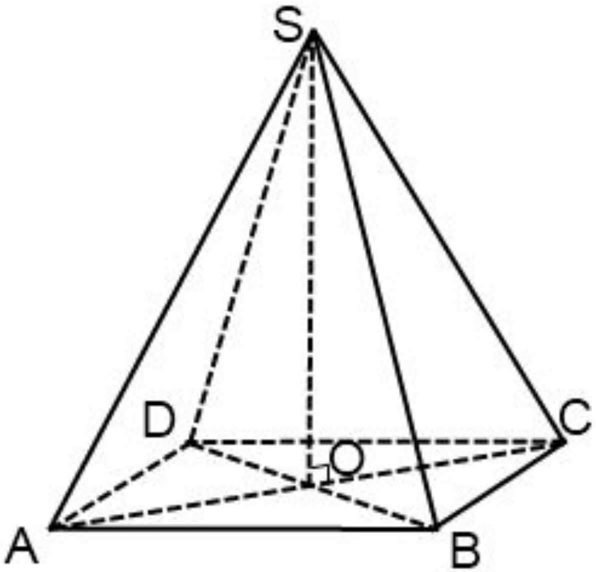
$$S_{полн} = S_{осн} + S_{бок}$$

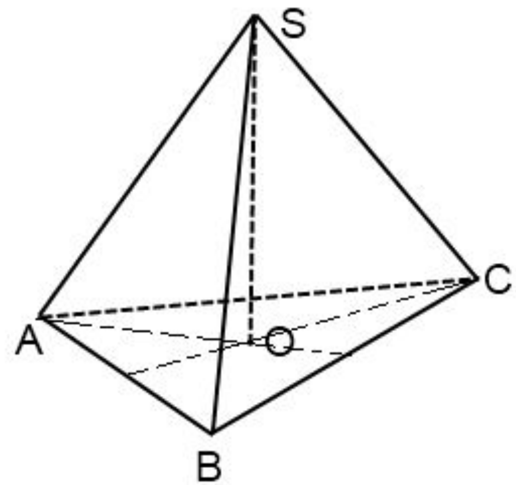


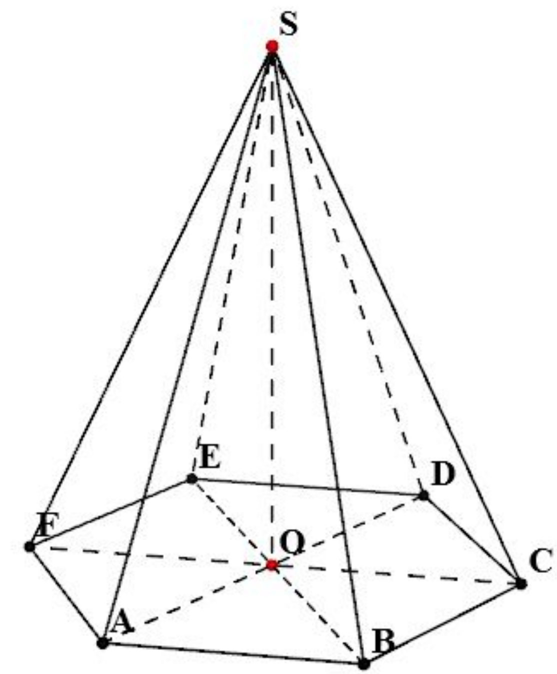
Площадью боковой поверхности пирамиды называется сумма площадей её боковых граней.

Правильная пирамида

Пирамида называется **правильной**, если её основание – правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является её высотой.



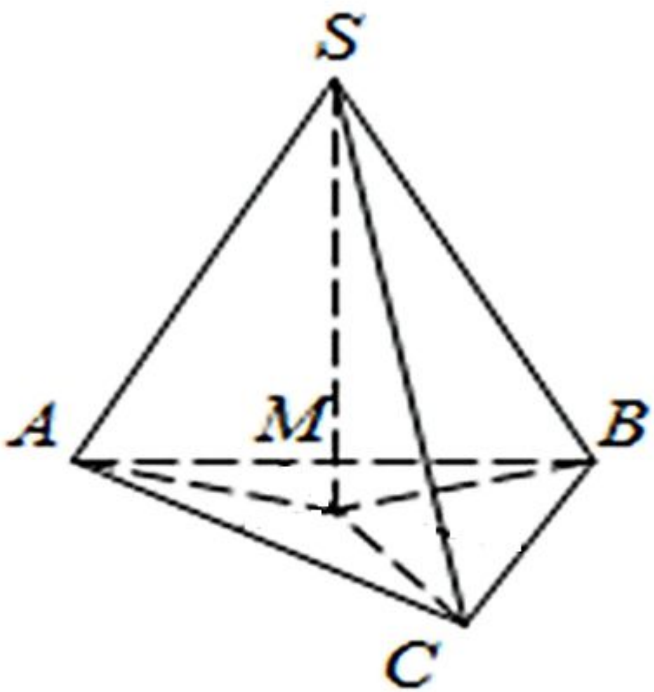




Все боковые рёбра правильной пирамиды равны, а боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками.

Теорема

Все боковые рёбра правильной пирамиды равны, а боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками



Доказательство.

Докажем на примере правильной треугольной пирамиды SABCD.

1) Рассмотрим треугольники SMA, SMC и SMB. AM=BM=CM (как радиусы описанной окружности), SM – общая высота, значит, треугольники равны по двум катетам.

Следовательно, AS=BS=CS.

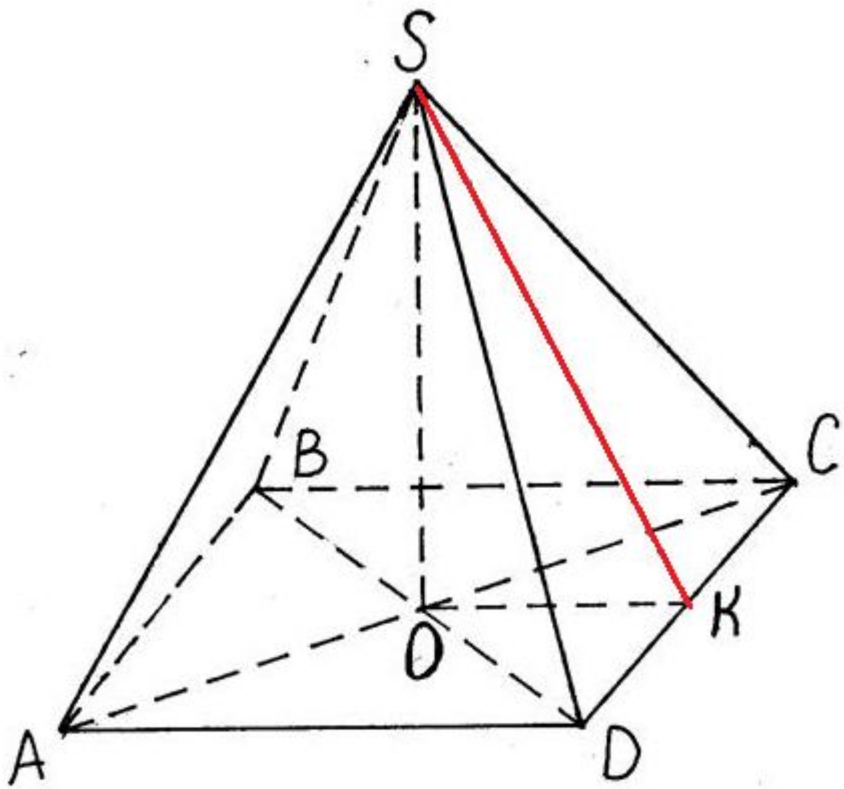
2) Рассмотрим треугольники SCA, SCB и SAB. По доказанному выше AS=BS=CS (значит, они являются равнобедренными), с другой стороны AC=BC=AB (так как в основании правильный треугольник), следовательно, треугольники SCA, SCB и SAB равны по трём сторонам.

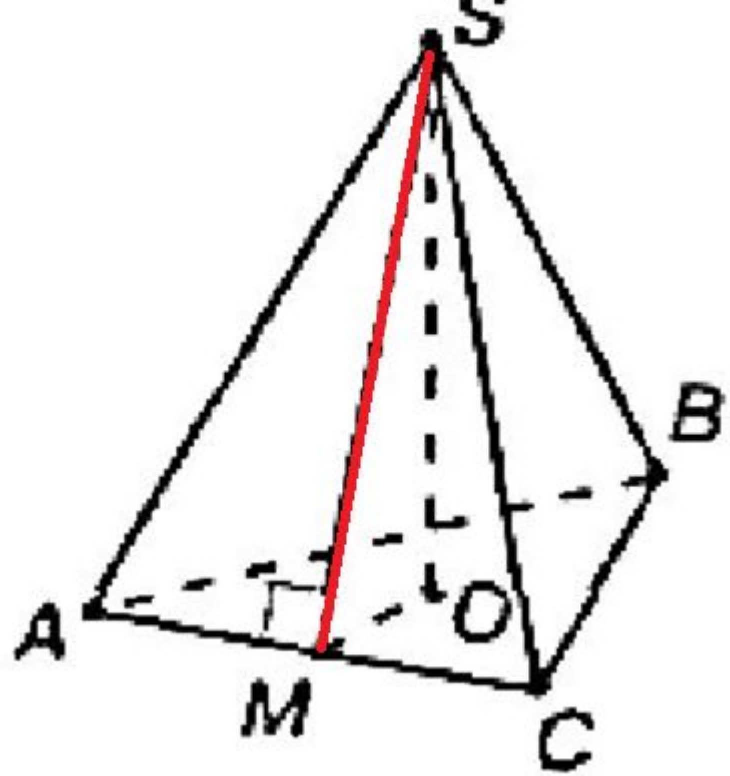
ЧТД.

Аналогично доказывается для любой правильной пирамиды.

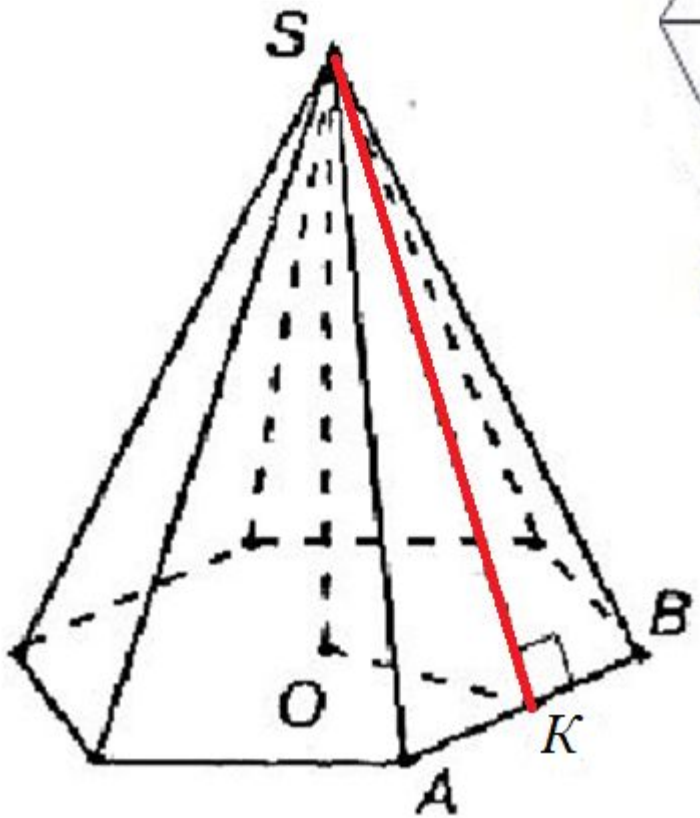
Апофема правильной пирамиды.

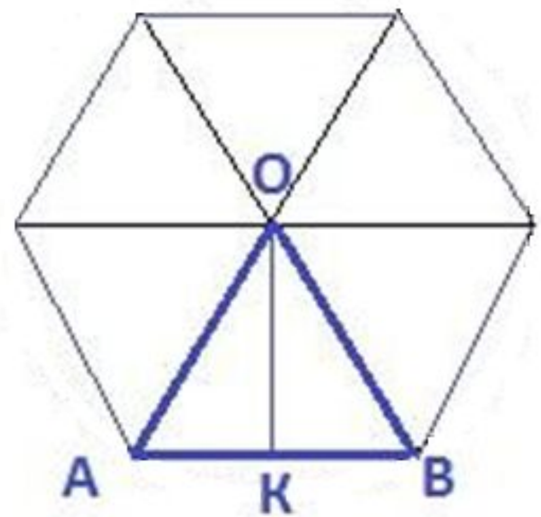
Высота боковой грани правильной пирамиды, проведённая из её вершины, называется **апофемой**

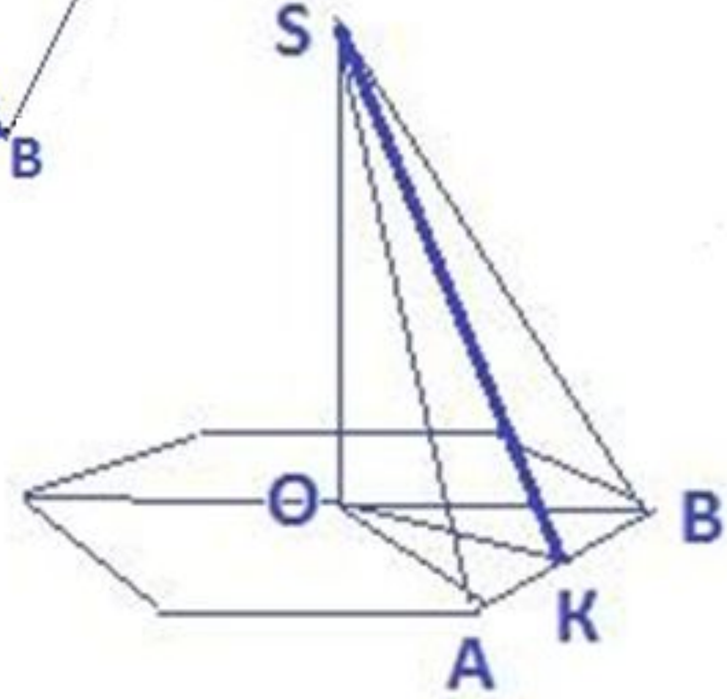




Апофема правильной пирамиды.



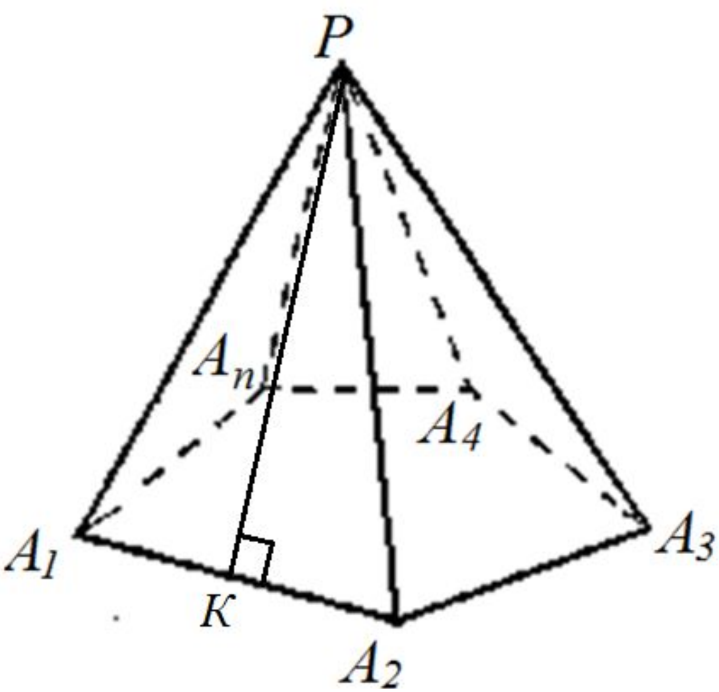




Площадь боковой поверхности правильной пирамиды

Теорема. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.

$$S = \frac{1}{2} \cdot P_{осн} \cdot l \quad P_{осн} \text{ – периметр основания, } l \text{ – апофема.}$$



Доказательство.

Докажем на примере произвольной пирамиды $PA_1A_2\ldots A_n$.

1) Рассмотрим боковую грань PA_1A_2. Это равнобедренный треугольник с основанием A_1A_2. Площадь этого треугольника равна:

$$S = \frac{1}{2} \cdot PK \cdot A_1A_2,$$ где PK – апофема,

A_1A_2 – сторона основания.

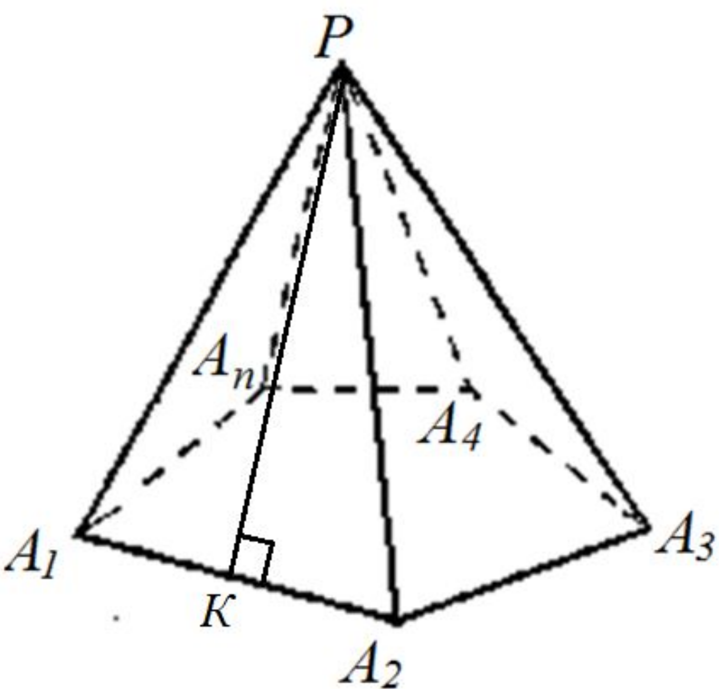
Аналогично площади других граней будут

вычисляться по формуле $S = \frac{1}{2} \cdot апофема \cdot A_mA_n$

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды

Теорема. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.

$$S = \frac{1}{2} \cdot P_{осн} \cdot l \quad P_{осн} \text{ – периметр основания, } l \text{ – апофема.}$$



Доказательство (продолжение).

$$S_{бок} = S_{PA_1A_2} + S_{PA_2A_3} + \ldots + S_{PA_{n-1}A_m} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot l \cdot A_1A_2 + \frac{1}{2} \cdot l \cdot A_2A_3 + \ldots + \frac{1}{2} \cdot l \cdot A_{n-1}A_n =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot l \cdot \left(A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n\right) = \frac{1}{2} \cdot l \cdot P$$

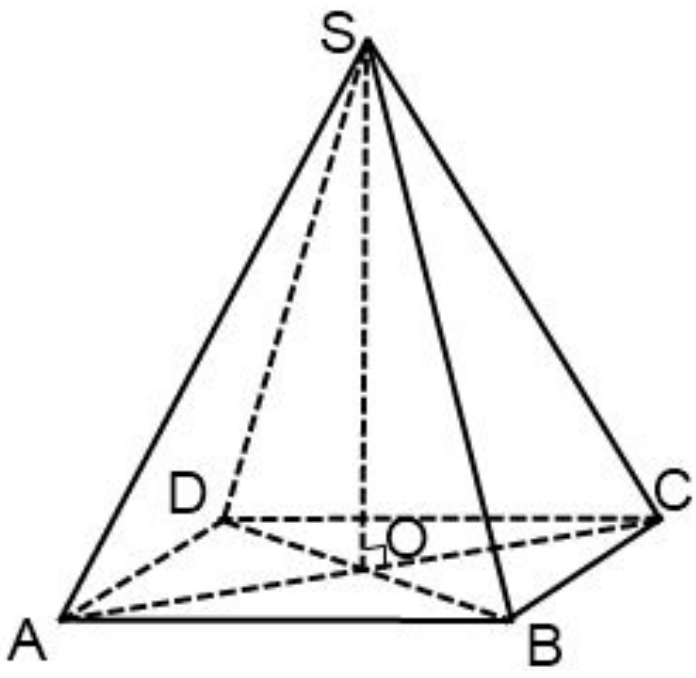
ЧТД

Закрепление

1. Что такое пирамида?
2. Что такое основание пирамиды?
3. Что может лежать в основании пирамиды?
4. Из какой фигуры всегда состоит боковая грань пирамиды?
5. Что такое высота пирамиды?
6. Чему равна площадь полной поверхности пирамиды?
7. Какая пирамида называется правильной?
8. Каким свойством обладают боковые рёбра и грани правильной пирамиды?
9. Как называется отрезок, соединяющий вершину пирамиды с серединой стороны основания правильной пирамиды?
10. Как найти площадь боковой поверхности правильной пирамиды?
11. Решить задачу № 240.

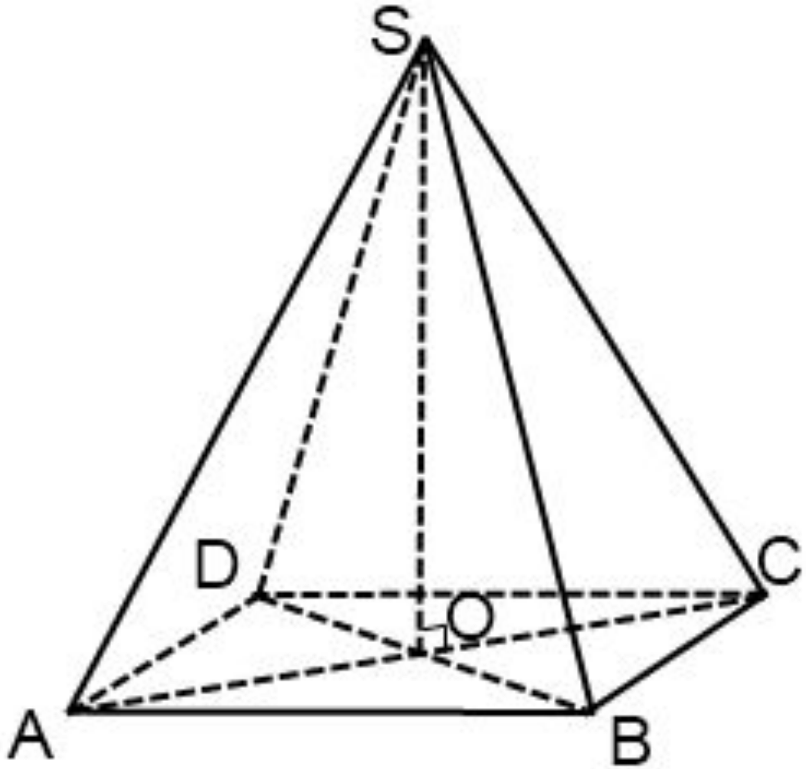
Задача № 240.

Основанием пирамиды является параллелограмм, стороны которого равны 20 см и 36 см, а площадь равна 360 см². Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 12 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.



Дано: SABCD – пирамида,
ABCD – параллелограмм,
AB=36 см, AD =20 см, S_{ABCD}=360 см²,
SO – высота, SO =12 см.
Найти: $S_{бок}$.

Задача № 240.



1. Найдите угол A и угол D.
2. Найдите BD.
3. Найдите SD и SB.
4. Найдите AC.
5. Найдите SA и SC.
6. по формуле Герона найдите площади боковых граней (подумайте, какие из них одинаковые).
7. Найдите площадь полной поверхности.

Домашнее задание

1) Прочитать пункты 32 – 33, выучить все определения и
   две теоремы с доказательствами.
2) Решить задачи № 239, 241.