Тема «Системы счисления»

Введение

Современный человек в повседневной жизни постоянно сталкивается с числами и цифрами - они с нами везде. Различные системы счисления используются всегда, когда появляется потребность в числовых расчётах, начиная с вычислений учениками младших классов, выполняемых карандашом на бумаге, заканчивая вычислениями, выполняемыми на суперкомпьютерах.

История систем счисления

Система счисления – это определённый способ представления чисел и соответствующие ему правила действия над ними.

Цель создания системы счисления- выработка наиболее удобного способа записи количественной информации.

Древние системы счисления:

- Единичная система
- Древнегреческая нумерация
- Славянская нумерация
- Римская нумерация

Позиционные и непозиционные системы счисления

Непозиционные системы	Позиционные системы
От положения цифры в записи числа <u>не зависит</u> величина, которую она обозначает.	Величина, обозначаемая цифрой в записи числа, <u>зависит</u> от ее позиции. ***<u>Основание</u>*** – количество используемых цифр. ***<u>Позиция</u>*** – место каждой цифры.

Запись числа в позиционной системе счисления

Любое целое число в позиционной системе можно записать в форме многочлена:

$$X_s = A_n \cdot S^{n-1} + A_{n-1} \cdot S^{n-2} + A_{n-2} \cdot S^{n-3} + \ldots + A_2 \cdot S^1 + A_1 \cdot S^0$$

где S - основание системы счисления, A – цифры числа, записанного в данной системе счисления, n - количество разрядов числа.

Так, например число 6293_{10} запишется в форме многочлена следующим образом:

$$6293_{10} = 6 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

Примеры позиционных систем счисления:

Двоичная	Система счисления с основанием 2, используются два символа - 0 и 1.
Восьмеричная	Система счисления с основанием 8, используются цифры от 0 до 7.
Десятичная	Система с основанием 10, наиболее распространённая система счисления в мире.
Двенадцатеричная	Система с основанием 12. Используются цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B.
Шестнадцатеричная	С основанием 16, используются цифры от 0 до 9 и латинские буквы от A до F для обозначения цифр от 10 до 15.
Шестидесятеричная	Система с основанием 60, используется в измерении углов и, в частности, долготы и широты.

ИСТОРИЯ ДВОИЧНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Двоичная система счисления была придумана математиками и философами ещё до появления компьютеров (XVII — XIX вв.).

Пропагандистом двоичной системы был знаменитый Г.В. Лейбниц. Он отмечал особую простоту алгоритмов арифметических действий в двоичной арифметике в сравнении с другими системами и придавал ей определенный философский смысл.

В 1936 — 1938 годах американский инженер и математик Клод Шеннон нашёл замечательные применения двоичной системы при конструировании электронных схем.

Двоичная система счисления

Двоичная система счисления (бинарная система счисления, binary) — позиционная система счисления с основанием 2.

Неудобством этой системы счисления является необходимость перевода исходных данных из десятичной системы в двоичную при вводе их в машину и обратного перевода из двоичной в десятичную при выводе результатов вычислений.

Главное достоинство двоичной системы — простота алгоритмов сложения, вычитания, умножения и деления.

Сложение, вычитание, умножение и деление в двоичной системе счисления

Сложение	Вычитание	Умножение	Деление
0 + 0 = 0; 0 + 1 = 1; 1 + 0 = 1; 1 + 1 = 10.	0 - 0 = 0; 1 - 0 = 1; 1 - 1 = 0; 10 - 1 = 1.	0 · 1 = 0; 1 · 1 = 1.	0 / 1 = 0; 1 / 1 = 1.

Двоичное кодирование в компьютере

В конце XX века, века компьютеризации, человечество пользуется двоичной системой ежедневно, так как вся информация, обрабатываемая современными ЭВМ, хранится в них в двоичном виде.

В современные компьютеры мы можем вводить текстовую информацию, числовые значения, а также графическую и звуковую информацию. Количество информации, хранящейся в ЭВМ, измеряется ее «длиной» (или «объемом»), которая выражается в битах (от английского binary digit – двоичная цифра).

Перевод чисел из одной системы счисления в другую

2 → 10	10 → 8	8 → 2
8 → 10	10 → 16	16 → 2
16 → 10	2 → 8	8 ⇄ 16
10 → 2	2 → 16	

Заключение

- Высшим достижением древней арифметики является открытие позиционного принципа представления чисел.
- Нужно признать важность не только самой распространенной системы, которой мы пользуемся ежедневно. Но и каждой по отдельности. Ведь в разных областях используются разные системы счисления, со своими особенностями и характерными свойствами.

Десятичная	Двоичная	Восьмеричная	Шестнадцатеричная
1	001	1	1
2	010	2	2
3	011	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10

Перевод двоичного числа в десятичное

Для перевода ***двоичного числа в десятичное*** необходимо его записать в виде многочлена, состоящего из произведений цифр числа и соответствующей степени числа 2, и вычислить по правилам десятичной арифметики:

$$X_{10} = A_n \cdot 2^{n-1} + A_{n-1} \cdot 2^{n-2} + A_{n-2} \cdot 2^{n-3} + \ldots + A_2 \cdot 2^1 + A_1 \cdot 2^0$$

ПЕРЕВОД ВОСЬМЕРИЧНОГО ЧИСЛА В ДЕСЯТИЧНОЕ

Для перевода ***восьмеричного числа в десятичное*** необходимо его записать в виде многочлена, состоящего из произведений цифр числа и соответствующей степени числа 8, и вычислить по правилам десятичной арифметики:

$$X_{10} = A_n \cdot 8^{n-1} + A_{n-1} \cdot 8^{n-2} + A_{n-2} \cdot 8^{n-3} + \ldots + A_2 \cdot 8^1 + A_1 \cdot 8^0$$

Перевод шестнадцатеричного числа в десятичное

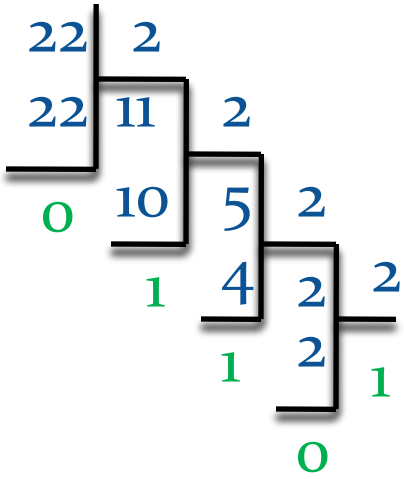
Для перевода ***шестнадцатеричного числа в десятичное*** необходимо его записать в виде многочлена, состоящего из произведений цифр числа и соответствующей степени числа 16, и вычислить по правилам десятичной арифметики:

$$X_{10} = A_n \cdot 16^{n-1} + A_{n-1} \cdot 16^{n-2} + A_{n-2} \cdot 16^{n-3} + \ldots + A_2 \cdot 16^1 + A_1 \cdot 16^0$$

Перевод десятичного числа в двоичную систему

Для перевода ***десятичного числа в двоичную*** систему его необходимо последовательно делить на 2 до тех пор, пока не останется остаток, меньший или равный 1. Число в двоичной системе записывается как последовательность последнего результата деления и остатков от деления в обратном порядке.

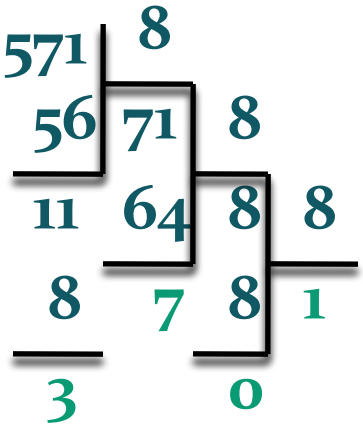
Пример: Число 22_{10} перевести в двоичную систему счисления: $22_{10}=10110_2$



Перевод десятичного числа в восьмеричную систему

Для перевода ***десятичного числа в восьмеричную*** систему его необходимо последовательно делить на 8 до тех пор, пока не останется остаток, меньший или равный 7. Число в восьмеричной системе записывается как последовательность цифр последнего результата деления и остатков от деления в обратном порядке.

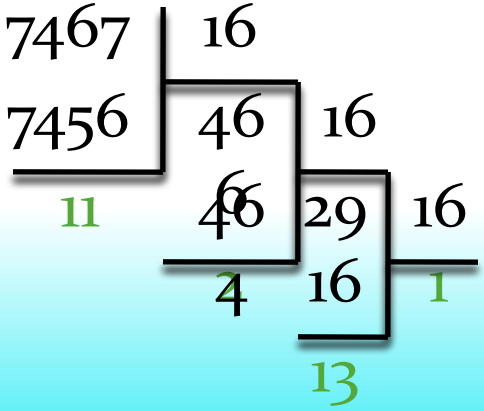
Пример: Число 571_{10} перевести в восьмеричную систему счисления: $571_{10}=1073_{8}$



Перевод десятичного числа в шестнадцатеричную систему

Для перевода ***десятичного числа в шестнадцатеричную*** систему его необходимо последовательно делить на 16 до тех пор, пока не останется остаток, меньший или равный 15. Число в шестнадцатеричной системе записывается как последовательность цифр последнего результата деления и остатков от деления в обратном порядке.

Пример: Число 7467_{10} перевести в шестнадцатеричную систему счисления: $7467_{10}=1D2B_{16}$



ПЕРЕВОД ЧИСЕЛ ИЗ ДВОИЧНОЙ СИСТЕМЫ В ВОСЬМЕРИЧНУЮ

Чтобы перевести число из ***двоичной системы в восьмеричную***, его нужно разбить на триады (тройки цифр), начиная с младшего разряда, в случае необходимости дополнив старшую триаду нулями, и каждую триаду заменить соответствующей восьмеричной цифрой. При переводе необходимо пользоваться двоично-восьмеричной таблицей:

2-ная	000	001	010	011	100	101	110	111
8-ная	0	1	2	3	4	5	6	7

Пример: Число 1001011_2 перевести в восьмеричную систему счисления:

$001\ \ 001\ \ 011_2=113_8$

Перевод из двоичной системы в шестнадцатеричную

Чтобы перевести число из ***двоичной системы в шестнадцатеричную***, его нужно разбить на тетрады (четверки цифр).

Двоично-шестнадцатеричная таблица:

2-ная	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
16-ная	0	1	2	3	4	5	6	7
2-ная	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
16-ная	8	9	A	B	C	D	E	F

шестнадцатеричную систему счисления:

$0010\ \ 1110\ \ 0011_2 = 2E3_{16}$

Перевод восьмеричного числа в двоичное

Для перевода ***восьмеричного числа в двоичное*** необходимо каждую цифру заменить эквивалентной ей двоичной триадой.

2-ная	000	001	010	011	100	101	110	111
8-ная	0	1	2	3	4	5	6	7

счисления:

$531_8 = 101\ \ 011\ \ 001_2$

Перевод шестнадцатеричного числа в двоичное

Для перевода ***шестнадцатеричного числа в двоичное*** необходимо каждую цифру заменить эквивалентной ей двоичной тетрадой.

2-ная	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
16-ная	0	1	2	3	4	5	6	7
2-ная	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
16-ная	8	9	A	B	C	D	E	F

сч

16 2

Перевод из восьмеричной системы счисления в шестнадцатеричную и обратно

При переходе из ***восьмеричной системы счисления в шестнадцатеричную*** и обратно, необходим промежуточный перевод чисел в двоичную систему.

Пример 1: Число FEA_{16} перевести в восьмеричную систему счисления:

$FEA_{16}=111111101010_2=111\ \ 111\ \ 101\ \ 010_2=7752_8$

Пример 2: Число 6635_8 перевести в шестнадцатеричную систему счисления:

$6635_8=110110011101_2=1101\ \ 1001\ \ 1101_2=D9D_{16}$

Единичная система

В древние времена, когда появилась потребность в записи чисел, количество предметов, изображалось нанесением черточек или засечек на какой-либо твердой поверхности.

Археологами найдены такие «записи» при раскопках культурных слоев, относящихся к периоду палеолита (10–11 тысяч лет до н.э.).

В такой системе применялся только один вид знаков – палочка. Каждое число обозначалось с помощью строки, составленной из палочек, количество которых равнялось обозначаемому числу.

ДРЕВНЕГРЕЧЕСКАЯ НУМЕРАЦИЯ

В древнейшее время в Греции была распространена *аттическая* нумерация.

I,II, III, IIII, Г, ГI, ГII, ГIII, ГIIII…Δ… H…X…M

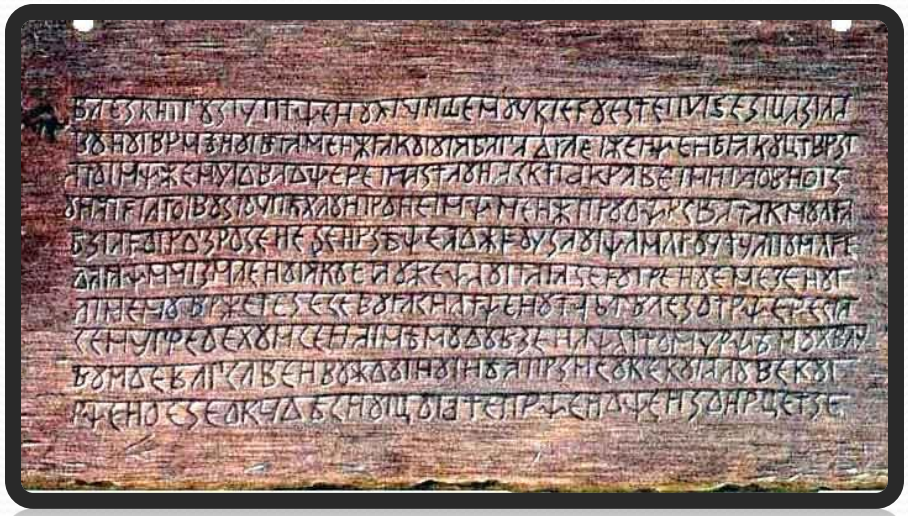
Аттическая нумерация

В третьем веке до н.э. аттическая нумерация была вытеснена *ионийской* системой.

Ионийская система

СЛАВЯНСКАЯ НУМЕРАЦИЯ

В России *славянская* нумерация сохранилась до конца XVII века. Южные и восточные славянские народы для записи чисел пользовались алфавитной нумерацией. Славянская нумерация сохранялась только в богослужебных книгах. Над буквой, обозначавшей цифру, ставился специальный значок: ҃ («титло»). Для обозначения тысяч перед числом (слева внизу) ставился особый знак ͵.



Римская нумерация

Древние римляне пользовались нумерацией, которая сохраняется до настоящего времени под именем «*римской нумерации*». Мы пользуемся ей для обозначения веков, юбилейных дат, наименования съездов и конференций, для нумерации глав книги или строф стихотворения.

Запись цифр в римской нумерации:

I - 1 V - 5 X - 10 L - 50 C - 100 D - 500 M - 1000

ОБОЗНАЧЕНИЕ ЧИСЕЛ В ИОНИЙСКОЙ СИСТЕМЕ НУМЕРАЦИИ

Обозначение	Название	Значение	Обозначение	Название	Значение	Обозначение	Название	Значение
α	Альфа	1	ι	Йота	10	ρ	Ро	100
β	Бета	2	κ	Каппа	20	σ	Сигма	200
γ	Гамма	3	λ	Лямбда	30	τ	Тау	300
δ	Дельта	4	μ	Мю	40	υ	Ипсилон	400
ε	Эпсилон	5	ν	Ню	50	ϕ	Фи	500
	Фау	6	ξ	Кси	60	χ	Хи	600
ζ	Дзета	7	ο	Омикрон	70	ψ	Пси	700
η	Эта	8	π	Пи	80	ω	Омега	800
θ	Тэта	9		Коппа	90		Сампи	900

ОБОЗНАЧЕНИЕ ЧИСЕЛ В ДРЕВНЕСЛАВЯНСКОЙ СИСТЕМЕ НУМЕРАЦИИ

Обозначение	Название	Значение	Обозначение	Название	Значение	Обозначение	Название	Значение
	Аз	1		И	10		Рцы	100
	Веди	2		Како	20		Слово	200
	Глаголь	3		Люди	30		Твердо	300
	Добро	4		Мыслите	40		Ук	400
	Есть	5		Наш	50		Ферт	500
	Зело	6		Кси	60		Хер	600
	Земля	7		Он	70		Пси	700
	Иже	8		Покой	80		Омега	800
	Фита	9		Червь	90		Цы	900