

Тема «Системы счисления»

Введение

Современный человек в повседневной жизни постоянно сталкивается с числами и цифрами - они с нами везде. Различные системы счисления используются всегда, когда появляется потребность в числовых расчётах, начиная с вычислений учениками младших классов, выполняемых карандашом на бумаге, заканчивая вычислениями, выполняемыми на суперкомпьютерах.

История систем счисления

Система счисления – это определённый способ представления чисел и соответствующие ему правила действия над ними.

```
graph TD; A[Системы счисления] --> B[Позиционные]; A --> C[Непозиционные];
```

Системы счисления

Позиционные

Непозиционные

Цель создания системы счисления- выработка наиболее удобного способа записи количественной информации.

Древние системы счисления:

- Единичная система
- Древнегреческая нумерация
- Славянская нумерация
- Римская нумерация

Позиционные и непозиционные системы счисления

Непозиционные системы

От положения цифры в записи числа не зависит величина, которую она обозначает.

Позиционные системы

Величина, обозначаемая цифрой в записи числа, зависит от ее позиции.

Основание – количество используемых цифр.

Позиция – место каждой цифры.

Запись числа в позиционной системе счисления

Любое целое число в позиционной системе можно записать в форме многочлена:

$$X_s = A_n \cdot S^{n-1} + A_{n-1} \cdot S^{n-2} + A_{n-2} \cdot S^{n-3} + \dots + A_2 \cdot S^1 + A_1 \cdot S^0$$

где S - основание системы счисления, A - цифры числа, записанного в данной системе счисления, n - количество разрядов числа.

Так, например число 6293_{10} запишется в форме многочлена следующим образом:

$$6293_{10} = 6 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

Примеры позиционных систем счисления:

Двоичная

Система счисления с основанием 2, используются два символа - 0 и 1.

Восьмеричная

Система счисления с основанием 8, используются цифры от 0 до 7.

Десятичная

Система с основанием 10, наиболее распространённая система счисления в мире.

Двенадцатеричная

Система с основанием 12. Используются цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, А, В.

Шестнадцатеричная

С основанием 16, используются цифры от 0 до 9 и латинские буквы от А до F для обозначения цифр от 10 до 15.

Шестидесятеричная

Система с основанием 60, используется в измерении углов и, в частности, долготы и широты.

ИСТОРИЯ ДВОИЧНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Двоичная система счисления была придумана математиками и философами ещё до появления компьютеров (XVII — XIX вв.).

Пропагандистом двоичной системы был знаменитый Г.В. Лейбниц. Он отмечал особую простоту алгоритмов арифметических действий в двоичной арифметике в сравнении с другими системами и придавал ей определенный философский смысл.

В 1936 — 1938 годах американский инженер и математик Клод Шеннон нашёл замечательные применения двоичной системы при конструировании электронных схем.

Двоичная система счисления

Двоичная система счисления (бинарная система счисления, binary) — позиционная система счисления с основанием 2.



Неудобством этой системы счисления является необходимость перевода исходных данных из десятичной системы в двоичную при вводе их в машину и обратного перевода из двоичной в десятичную при выводе результатов вычислений.

Главное достоинство двоичной системы — простота алгоритмов сложения, вычитания, умножения и деления.

Сложение, вычитание, умножение и деление в двоичной системе счисления

Сложение	Вычитание	Умножение	Деление
$0 + 0 = 0;$	$0 - 0 = 0;$	$0 \cdot 1 = 0;$	$0 / 1 = 0;$
$0 + 1 = 1;$	$1 - 0 = 1;$	$1 \cdot 1 = 1.$	$1 / 1 = 1.$
$1 + 0 = 1;$	$1 - 1 = 0;$		
$1 + 1 = 10.$	$10 - 1 = 1.$		

Двоичное кодирование в компьютере

В конце XX века, века компьютеризации, человечество пользуется двоичной системой ежедневно, так как вся информация, обрабатываемая современными ЭВМ, хранится в них в двоичном виде.



В современные компьютеры мы можем вводить текстовую информацию, числовые значения, а также графическую и звуковую информацию. Количество информации, хранящейся в ЭВМ, измеряется ее «длиной» (или «объемом»), которая выражается в битах (от английского binary digit – двоичная цифра).

Перевод чисел из одной системы счисления в другую

$2 \rightarrow 10$	$10 \rightarrow 8$	$8 \rightarrow 2$
$8 \rightarrow 10$	$10 \rightarrow 16$	$16 \rightarrow 2$
$16 \rightarrow 10$	$2 \rightarrow 8$	$8 \leftrightarrow 16$
$10 \rightarrow 2$	$2 \rightarrow 16$	

Заключение

- Высшим достижением древней арифметики является открытие позиционного принципа представления чисел.
- Нужно признать важность не только самой распространенной системы, которой мы пользуемся ежедневно. Но и каждой по отдельности. Ведь в разных областях используются разные системы счисления, со своими особенностями и характерными свойствами.

Десятичная	Двоичная	Восьмеричная	Шестнадцатеричная
1	001	1	1
2	010	2	2
3	011	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10

Перевод двоичного числа в десятичное

Для перевода *двоичного числа в десятичное* необходимо его записать в виде многочлена, состоящего из произведений цифр числа и соответствующей степени числа 2, и вычислить по правилам десятичной арифметики:

$$X_{10} = A_n \cdot 2^{n-1} + A_{n-1} \cdot 2^{n-2} + A_{n-2} \cdot 2^{n-3} + \dots + A_2 \cdot 2^1 + A_1 \cdot 2^0$$

ПЕРЕВОД ВОСЬМЕРИЧНОГО ЧИСЛА В ДЕСЯТИЧНОЕ

Для перевода *восьмеричного числа в десятичное* необходимо его записать в виде многочлена, состоящего из произведений цифр числа и соответствующей степени числа 8, и вычислить по правилам десятичной арифметики:

$$X_{10} = A_n \cdot 8^{n-1} + A_{n-1} \cdot 8^{n-2} + A_{n-2} \cdot 8^{n-3} + \dots + A_2 \cdot 8^1 + A_1 \cdot 8^0$$

шестнадцатеричного числа в десятичное

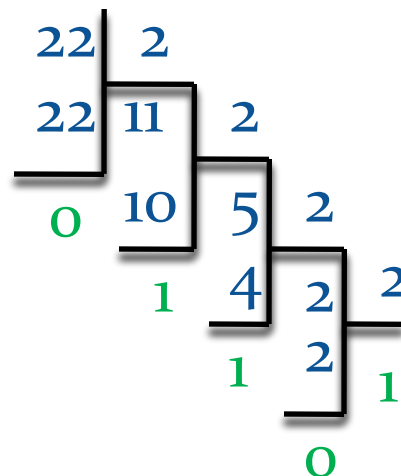
Для перевода *шестнадцатеричного числа в десятичное* необходимо его записать в виде многочлена, состоящего из произведений цифр числа и соответствующей степени числа 16, и вычислить по правилам десятичной арифметики:

$$X_{10} = A_n \cdot 16^{n-1} + A_{n-1} \cdot 16^{n-2} + A_{n-2} \cdot 16^{n-3} + \dots + A_2 \cdot 16^1 + A_1 \cdot 16^0$$

Перевод десятичного числа в двоичную систему

Для перевода десятичного числа в двоичную систему его необходимо последовательно делить на 2 до тех пор, пока не останется остаток, меньший или равный 1. Число в двоичной системе записывается как последовательность последнего результата деления и остатков от деления в обратном порядке.

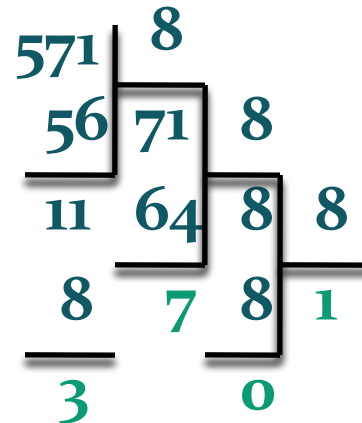
Пример: Число 22_{10} перевести в двоичную систему счисления: $22_{10} = 10110_2$



Перевод десятичного числа в восьмеричную систему

Для перевода десятичного числа в восьмеричную систему его необходимо последовательно делить на 8 до тех пор, пока не останется остаток, меньший или равный 7. Число в восьмеричной системе записывается как последовательность цифр последнего результата деления и остатков от деления в обратном порядке.

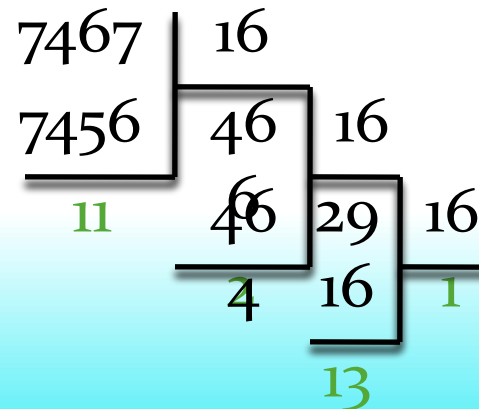
Пример: Число 571_{10} перевести в восьмеричную систему счисления: $571_{10} = 1073_8$



Перевод десятичного числа в шестнадцатеричную систему

Для перевода десятичного числа в шестнадцатеричную систему его необходимо последовательно делить на 16 до тех пор, пока не останется остаток, меньший или равный 15. Число в шестнадцатеричной системе записывается как последовательность цифр последнего результата деления и остатков от деления в обратном порядке.

Пример: Число 7467_{10} перевести в шестнадцатеричную систему счисления: $7467_{10} = 1D2B_{16}$



ПЕРЕВОД ЧИСЕЛ ИЗ ДВОИЧНОЙ СИСТЕМЫ В ВОСЬМЕРИЧНУЮ

Чтобы перевести число из *двоичной системы* в *восьмеричную*, его нужно разбить на триады (тройки цифр), начиная с младшего разряда, в случае необходимости дополнив старшую триаду нулями, и каждую триаду заменить соответствующей восьмеричной цифрой. При переводе необходимо пользоваться двоично-восьмеричной таблицей:

2-ная	000	001	010	011	100	101	110	111
8-ная	0	1	2	3	4	5	6	7

Пример: Число 1001011_2 перевести в восьмеричную систему счисления:

$$001 \ 001 \ 011_2 = 113_8$$

Перевод из двоичной системы в шестнадцатеричную

Чтобы перевести число из *двоичной системы в шестнадцатеричную*, его нужно разбить на тетрады (четверки цифр).

Двоично-шестнадцатеричная таблица:

2-ная	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
16-ная	0	1	2	3	4	5	6	7
2-ная	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
16-ная	8	9	A	B	C	D	E	F

шестнадцатеричную систему счисления:

$$0010 \ 1110 \ 0011_2 = 2E3_{16}$$

Перевод восьмеричного числа в двоичное

Для перевода *восьмеричного* числа в двоичное необходимо каждую цифру заменить эквивалентной ей двоичной триадой.

2- ная	000	001	010	011	100	101	110	111
8- ная	0	1	2	3	4	5	6	7

счисления:

$$531_8 = 101\ 011\ 001_2$$

Перевод шестнадцатеричного числа в двоичное

Для перевода *шестнадцатеричного числа в двоичное* необходимо каждую цифру заменить эквивалентной ей двоичной тетрадой.

2- ная	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
16- ная	0	1	2	3	4	5	6	7
2- ная	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
16- ная	8	9	A	B	C	D	E	F

Перевод из восьмеричной системы счисления в шестнадцатеричную и обратно

При переходе из *восьмеричной системы счисления в шестнадцатеричную* и обратно, необходим промежуточный перевод чисел в двоичную систему.

Пример 1: Число FEA_{16} перевести в восьмеричную систему счисления:

$$FEA_{16} = 111111101010_2 = 111\ 111\ 101\ 010_2 = 7752_8$$

Пример 2: Число 6635_8 перевести в шестнадцатеричную систему счисления:

$$6635_8 = 110110011101_2 = 1101\ 1001\ 1101_2 = D9D_{16}$$

Единичная система

В древние времена, когда появилась потребность в записи чисел, количество предметов, изображалось нанесением черточек или засечек на какой-либо твердой поверхности.

Археологами найдены такие «записи» при раскопках культурных слоев, относящихся к периоду палеолита (10–11 тысяч лет до н.э.).

В такой системе применялся только один вид знаков – палочка. Каждое число обозначалось с помощью строки, составленной из палочек, количество которых равнялось обозначаемому числу.

ДРЕВНЕГРЕЧЕСКАЯ НУМЕРАЦИЯ

В древнейшее время в Греции была распространена *аттическая* нумерация.

I, II, III, IIII, Г, ГI, ГII, ГIII,
ГIII...Δ... Η...Χ...Μ

Аттическая нумерация

В третьем веке до н.э. аттическая нумерация была вытеснена *ионийской* системой.

Ионийская система

СЛАВЯНСКАЯ НУМЕРАЦИЯ

В России славянская нумерация сохранилась до конца XVII века. Южные и восточные славянские народы для записи чисел пользовались алфавитной нумерацией. Славянская нумерация сохранялась только в богослужебных книгах. Над буквой, обозначающей цифру, ставился специальный значок: («титло»). Для обозначения тысяч перед числом (слева внизу) ставился особый знак



Римская нумерация

Древние римляне пользовались нумерацией, которая сохраняется до настоящего времени под именем «римской нумерации». Мы пользуемся ей для обозначения веков, юбилейных дат, наименования съездов и конференций, для нумерации глав книги или строф стихотворения.

Запись цифр в римской нумерации:

I - 1	V - 5	X - 10	L - 50	C - 100	D - 500	M - 1000
-------	-------	--------	--------	---------	---------	----------

ОБОЗНАЧЕНИЕ ЧИСЕЛ В ИОНИЙСКОЙ СИСТЕМЕ НУМЕРАЦИИ

Обозначение	Название	Значение	Обозначение	Название	Значение	Обозначение	Название	Значение
α	Альфа	1	ι	Йота	10	ρ	Ро	100
β	Бета	2	κ	Каппа	20	σ	Сигма	200
γ	Гамма	3	λ	Лямбда	30	τ	Тау	300
δ	Дельта	4	μ	Мю	40	υ	Ипсилон	400
ϵ	Эпсилон	5	ν	Ню	50	ϕ	Фи	500
	Фау	6	ξ	Кси	60	χ	Хи	600
ζ	Дзета	7	\omicron	Омикрон	70	ψ	Пси	700
η	Эта	8	π	Пи	80	ω	Омега	800
θ	Тэта	9		Коппа	90		Сампи	900

ОБОЗНАЧЕНИЕ ЧИСЕЛ В ДРЕВНЕСЛАВЯНСКОЙ СИСТЕМЕ НУМЕРАЦИИ

Обозначение	Название	Значение	Обозначение	Название	Значение	Обозначение	Название	Значение
А	Аз	1	І	И	10	Ѡ	Рцы	100
В	Веди	2	К	Како	20	С	Слово	200
Г	Глаголь	3	Л	Люди	30	Т	Твердо	300
Д	Добро	4	М	Мыслите	40	У	Ук	400
Е	Есть	5	Н	Наш	50	Ф	Ферт	500
З	Зело	6	Ѣ	Кси	60	Х	Хер	600
З	Земля	7	Ѧ	Он	70	Ѩ	Пси	700
И	Иже	8	П	Покой	80	Ѡ	Омега	800
Ѡ	Фита	9	Ч	Червь	90	Ц	Цы	900