



# ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА



# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

⇒ *Вектор* — это направленный прямолинейный отрезок, т. е. отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление. Если  $A$  — начало вектора, а  $B$  — его конец, то вектор обозначается символом  $\overline{AB}$  или  $\vec{a}$ . Вектор  $\overline{BA}$  (у него начало в точке  $B$ , а конец в точке  $A$ ) называется *противоположным* вектору  $\overline{AB}$ . Вектор, противоположный вектору  $\vec{a}$ , обозначается  $-\vec{a}$ .

*Длиной* или *модулем* вектора  $\overline{AB}$  называется длина отрезка и обозначается  $|\overline{AB}|$ . Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым вектором* и обозначается  $\vec{0}$ . Нулевой вектор направления не имеет.

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным* вектором и обозначается через  $\vec{e}$ . Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора  $\vec{a}$ , называется *ортом* вектора  $\vec{a}$  и обозначается  $\vec{a}^0$ .

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным* вектором и обозначается через  $\bar{e}$ . Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора  $\bar{a}$ , называется *ортом* вектора  $\bar{a}$  и обозначается  $\bar{a}^0$ .

⇒ Векторы  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых; записывают  $\bar{a} \parallel \bar{b}$ .

Коллинеарные векторы могут быть направлены одинаково или противоположно.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

⇒ Два вектора  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  называются **равными** ( $\bar{a} = \bar{b}$ ), если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые длины.

Из определения равенства векторов следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, а начало вектора помещать в любую точку  $O$  пространства.

На рисунке 1 векторы образуют прямоугольник. Справедливо равенство  $\vec{b} = \vec{d}$ , но  $\vec{a} \neq \vec{c}$ . Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{c}$  — противоположные,  $\vec{a} = -\vec{c}$ .

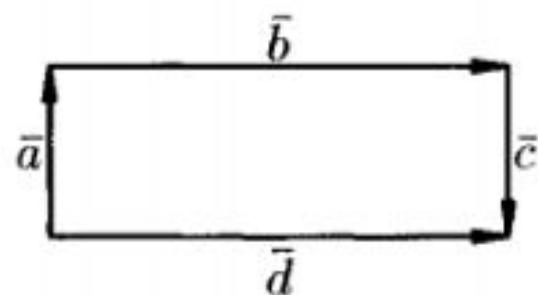


Рис. 1

Равные векторы называют также *свободными*.

☞ Три вектора в пространстве называются **компланарными**, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Если среди трех векторов хотя бы один нулевой или два любые коллинеарны, то такие векторы компланарны.

# ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

☉ Под линейными операциями над векторами понимают операции сложения и вычитания векторов, а также умножение вектора на число.

Пусть  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  — два произвольных вектора. Возьмем произвольную точку  $O$  и построим вектор  $\vec{OA} = \vec{a}$ . От точки  $A$  отложим вектор  $\vec{AB} = \vec{b}$ . Вектор  $\vec{OB}$ , соединяющий начало первого вектора с концом второго, называется *суммой* векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ :  $\vec{OB} = \vec{a} + \vec{b}$  (см. рис. 2).

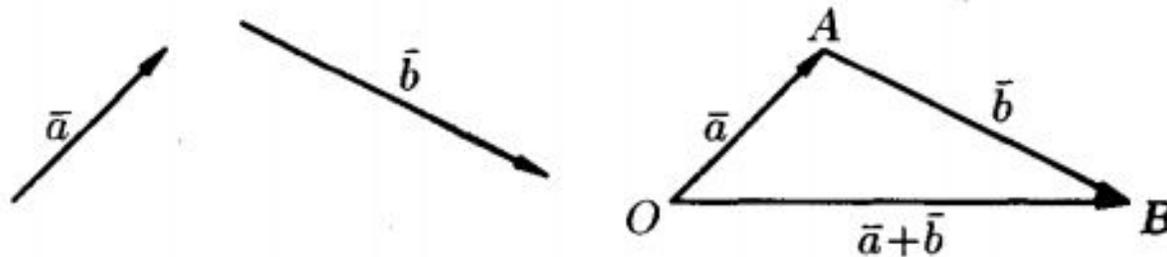


Рис. 2

Это правило сложения векторов называют *правилом треугольника*.

Сумму двух векторов можно построить также по *правилу параллелограмма* (см. рис. 3).

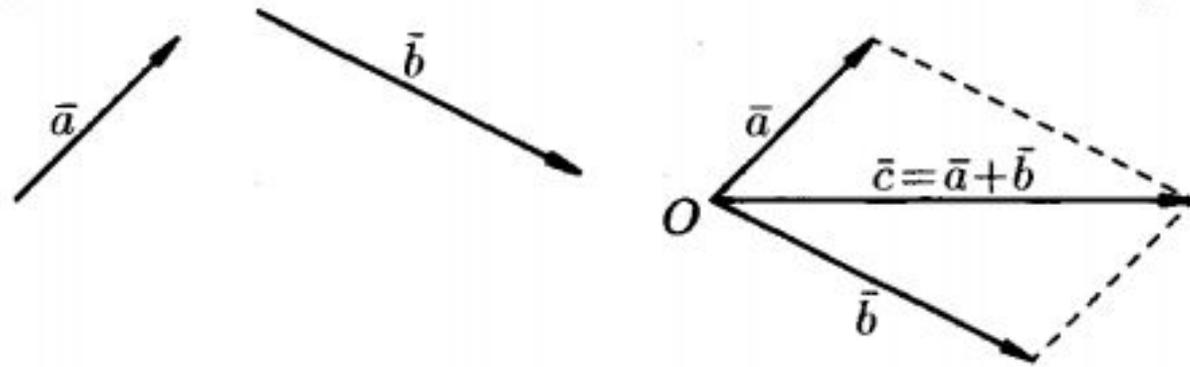


Рис. 3

На рисунке 4 показано сложение трех векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ .

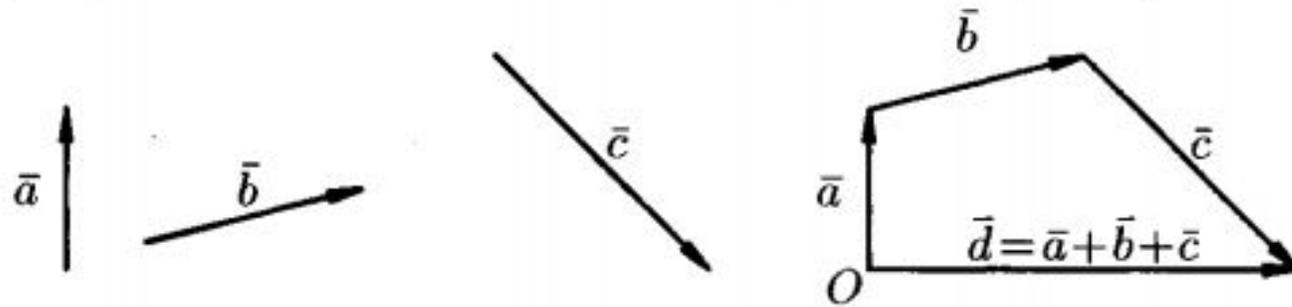


Рис. 4

Под *разностью* векторов  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  понимается вектор  $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$  такой, что  $\bar{b} + \bar{c} = \bar{a}$  (см. рис. 5).



Рис. 5

Отметим, что в параллелограмме, построенном на векторах  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ , одна направленная диагональ является суммой векторов  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ , а другая — разностью (см. рис. 6).

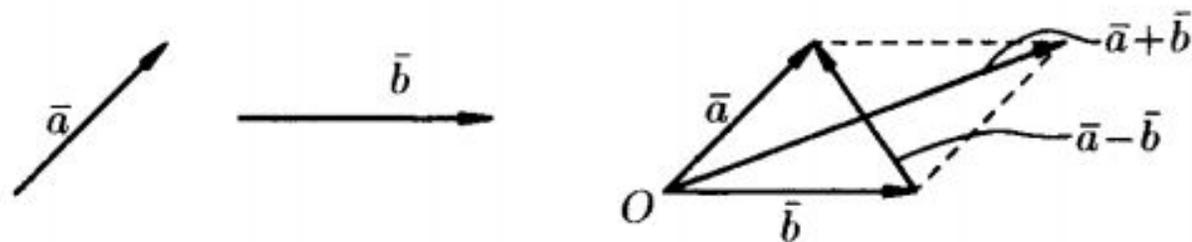


Рис. 6

Можно вычитать векторы по правилу:  $\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$ , т. е. вычитание векторов заменить сложением вектора  $\bar{a}$  с вектором, противоположным вектору  $\bar{b}$ .

 Произведением вектора  $\bar{a}$  на скаляр (число)  $\lambda$  называется вектор  $\lambda \cdot \bar{a}$  (или  $\bar{a} \cdot \lambda$ ), который имеет длину  $|\lambda| \cdot |\bar{a}|$ , коллинеарен вектору  $\bar{a}$ , имеет направление вектора  $\bar{a}$ , если  $\lambda > 0$  и противоположное направление, если  $\lambda < 0$ . Например, если дан вектор  $\xrightarrow{\bar{a}}$ , то векторы  $3\bar{a}$  и  $-2\bar{a}$  будут иметь вид  $\xrightarrow{3\bar{a}}$  и  $\xleftarrow{-2\bar{a}}$ .

Из определения произведения вектора на число следуют свойства этого произведения:

1) если  $\bar{b} = \lambda \cdot \bar{a}$ , то  $\bar{b} \parallel \bar{a}$ . Наоборот, если  $\bar{b} \parallel \bar{a}$ , ( $\bar{a} \neq \bar{0}$ ), то при некотором  $\lambda$  верно равенство  $\bar{b} = \lambda \bar{a}$ ;

2) всегда  $\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \bar{a}^0$ , т. е. каждый вектор равен произведению его модуля на орт.

Линейные операции над векторами обладают следующими свойствами:

$$1. \bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a},$$

$$2. (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}),$$

$$3. \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \bar{a}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \bar{a},$$

$$4. (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \bar{a} = \lambda_1 \cdot \bar{a} + \lambda_2 \cdot \bar{a},$$

$$5. \lambda \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = \lambda \cdot \bar{a} + \lambda \cdot \bar{b}.$$

# ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСЬ

Пусть в пространстве задана ось  $l$ , т. е. направленная прямая.

Проекцией точки  $M$  на ось  $l$  называется основание  $M_1$  перпендикуляра  $MM_1$ , опущенного из точки на ось.

Точка  $M_1$  есть точка пересечения оси  $l$  с плоскостью, проходящей через точку  $M$  перпендикулярно оси (см. рис. 7).

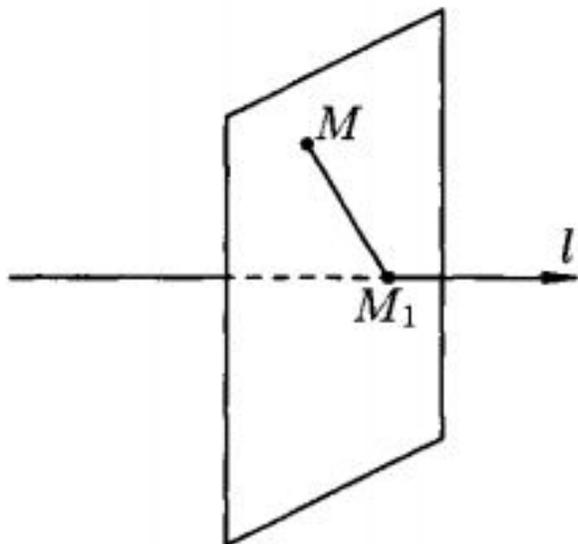


Рис. 7

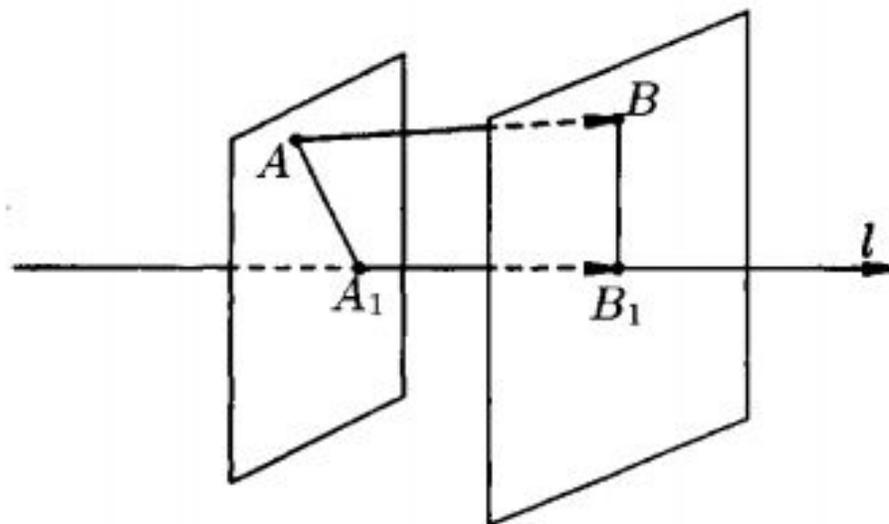


Рис. 8

Если точка  $M$  лежит на оси  $l$ , то проекция точки  $M$  на ось совпадает с  $M$ .

Пусть  $\overline{AB}$  — произвольный вектор ( $\overline{AB} \neq \overline{0}$ ). Обозначим через  $A_1$  и  $B_1$  проекции на ось  $l$  соответственно начала  $A$  и конца  $B$  вектора  $\overline{AB}$  и рассмотрим вектор  $\overline{A_1B_1}$ .

*Проекцией вектора  $\overline{AB}$  на ось  $l$  называется положительное число  $|\overline{A_1B_1}|$ , если вектор  $\overline{A_1B_1}$  и ось  $l$  одинаково направлены и отрицательное число  $-|\overline{A_1B_1}|$ , если вектор  $\overline{A_1B_1}$  и ось  $l$  противоположно направлены (см. рис. 8). Если точки  $A_1$  и  $B_1$  совпадают ( $\overline{A_1B_1} = \overline{0}$ ), то проекция вектора  $\overline{AB}$  равна 0.*

Проекция вектора  $\overline{AB}$  на ось  $l$  обозначается так:  $\text{пр}_l \overline{AB}$ . Если  $\overline{AB} = \overline{0}$  или  $\overline{AB} \perp l$ , то  $\text{пр}_l \overline{AB} = 0$ .

Угол  $\varphi$  между вектором  $\bar{a}$  и осью  $l$  (или угол между двумя векторами) изображен на рисунке 9. Очевидно,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ .

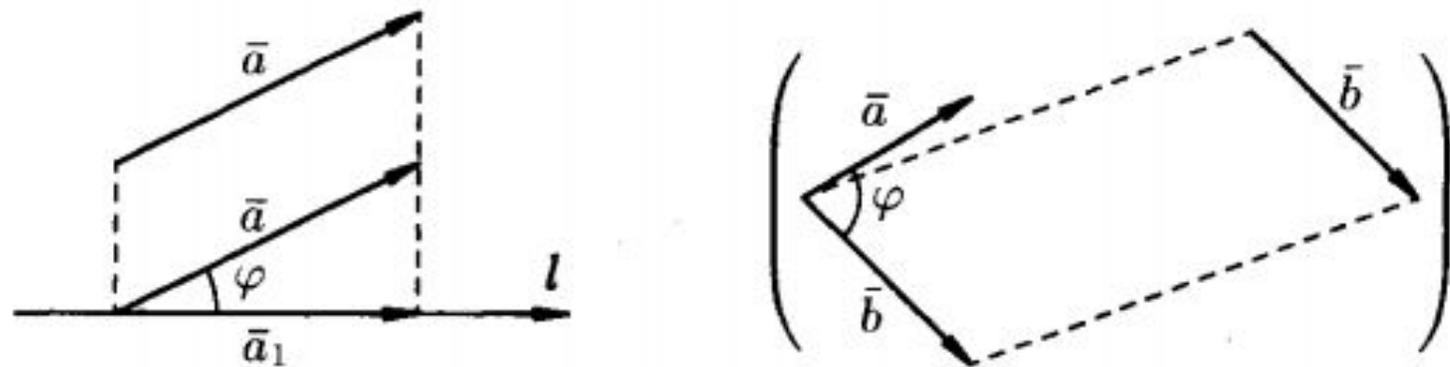


Рис. 9

# СВОЙСТВА ПРОЕКЦИЙ

*Свойство 1.* Проекция вектора  $\bar{a}$  на ось  $l$  равна произведению модуля вектора  $\bar{a}$  на косинус угла  $\varphi$  между вектором и осью, т. е.  $\text{пр}_l \bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos \varphi$ .

□ Если  $\varphi = (\widehat{\bar{a}, l}) < \frac{\pi}{2}$ , то  $\text{пр}_l \bar{a} = +|\bar{a}_1| = |\bar{a}| \cdot \cos \varphi$ .

Если  $\varphi > \frac{\pi}{2}$  ( $\varphi \leq \pi$ ), то  $\text{пр}_l \bar{a} = -|\bar{a}_1| = -|\bar{a}| \cdot \cos(\pi - \varphi) = |\bar{a}| \cdot \cos \varphi$  (см. рис. 10).

Если  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , то  $\text{пр}_l \bar{a} = 0 = |\bar{a}| \cos \varphi$ .

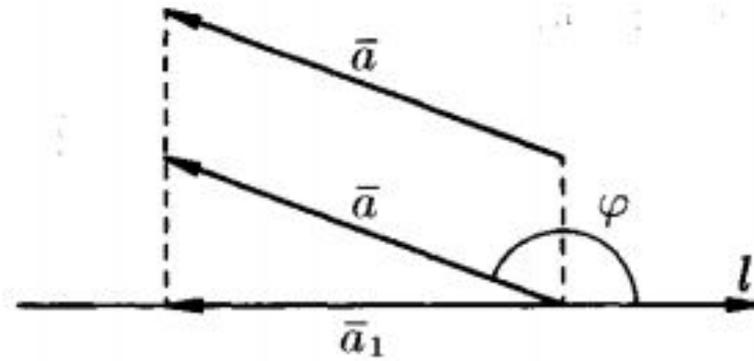


Рис. 10

**Следствие 1.** Проекция вектора на ось положительна (отрицательна), если вектор образует с осью острый (тупой) угол, и равна нулю, если этот угол — прямой.

**Следствие 2.** Проекции равных векторов на одну и ту же ось равны между собой.

*Свойство 2.* Проекция суммы нескольких векторов на одну и ту же ось равна сумме их проекций на эту ось.

□ Пусть, например,  $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ . Имеем  $\text{пр}_l \vec{d} = +|\vec{d}_1| = +|\vec{a}_1| + |\vec{b}_1| - |\vec{c}_1|$ , т. е.  $\text{пр}_l(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \text{пр}_l \vec{a} + \text{пр}_l \vec{b} + \text{пр}_l \vec{c}$  (см. рис. 11). ■

*Свойство 3.* При умножении вектора  $\vec{a}$  на число  $\lambda$  его проекция на ось также умножается на это число, т. е.

$$\text{пр}_l(\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot \text{пр}_l \vec{a}.$$

□ При  $\lambda > 0$  имеем  $\text{пр}_l(\lambda \cdot \vec{a}) = |\lambda \vec{a}| \cdot \cos \varphi =$   
(свойство 1)

$$= \lambda \cdot |\vec{a}| \cdot \cos \varphi = \lambda \cdot \text{пр}_l \vec{a}.$$

При  $\lambda < 0$ :  $\text{пр}_l(\lambda \cdot \vec{a}) = |\lambda \vec{a}| \cdot \cos(\pi - \varphi) =$   
 $= -\lambda \cdot |\vec{a}| \cdot (-\cos \varphi) = \lambda \cdot \vec{a} \cdot \cos \varphi = \lambda \cdot \text{пр}_l \vec{a}.$

Свойство справедливо, очевидно, и при  $\lambda = 0$ . ■

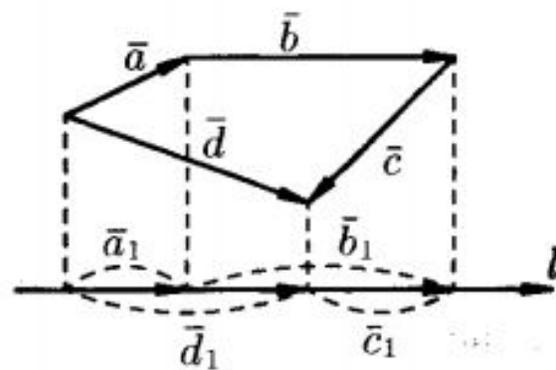


Рис. 11

Таким образом, линейные операции над векторами приводят к соответствующим линейным операциям над проекциями этих векторов.

# РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО ОРТАМ КООРДИНАТНЫХ ОСЕЙ

Рассмотрим в пространстве прямоугольную систему координат  $Oxyz$ . Выделим на координатных осях  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  единичные векторы (орты), обозначаемые  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$  соответственно (см. рис. 12).

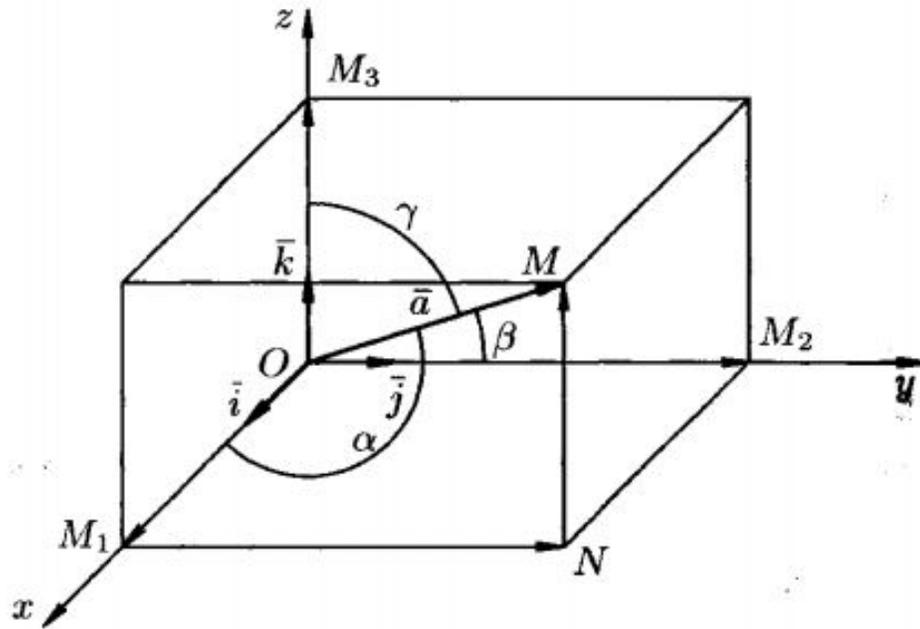


Рис. 12

Выберем произвольный вектор  $\bar{a}$  пространства и совместим его начало с началом координат:  $\bar{a} = \overline{OM}$ .

Найдем проекции вектора  $\bar{a}$  на координатные оси. Проведем через конец вектора  $\overline{OM}$  плоскости, параллельные координатным плоскостям. Точки пересечения этих плоскостей с осями обозначим соответственно через  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$ . Получим прямоугольный параллелепипед, одной из диагоналей которого является вектор  $\overline{OM}$ . Тогда  $\text{пр}_x \bar{a} = |\overline{OM}_1|$ ,  $\text{пр}_y \bar{a} = |\overline{OM}_2|$ ,  $\text{пр}_z \bar{a} = |\overline{OM}_3|$ . По определению суммы нескольких векторов находим  $\bar{a} = \overline{OM}_1 + \overline{M_1N} + \overline{NM}$ .

А так как  $\overline{M_1N} = \overline{OM}_2$ ,  $\overline{NM} = \overline{OM}_3$ , то

$$\bar{a} = \overline{OM}_1 + \overline{OM}_2 + \overline{OM}_3. \quad (1)$$

Но

$$\overline{OM}_1 = |\overline{OM}_1| \cdot \bar{i}, \quad \overline{OM}_2 = |\overline{OM}_2| \cdot \bar{j}, \quad \overline{OM}_3 = |\overline{OM}_3| \cdot \bar{k}. \quad (2)$$

Обозначим проекции вектора  $\bar{a} = \overline{OM}$  на оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  соответственно через  $a_x$ ,  $a_y$  и  $a_z$ , т. е.  $|\overline{OM}_1| = a_x$ ,  $|\overline{OM}_2| = a_y$ ,  $|\overline{OM}_3| = a_z$ . Тогда из равенств (1) и (2) получаем

$$\boxed{\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}.} \quad (3)$$

☞ Эта формула является основной в векторном исчислении и называется *разложением вектора по ортам координатных осей*.

Числа  $a_x, a_y, a_z$  называются **координатами вектора  $\bar{a}$** , т. е. координаты вектора есть его проекции на соответствующие координатные оси.

Векторное равенство (3) часто записывают в символическом виде:  $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$ .

Зная проекции вектора  $\bar{a}$ , можно легко найти выражение для модуля вектора. На основании теоремы о длине диагонали прямоугольного параллелепипеда можно написать  $|\overline{OM}|^2 = |\overline{OM}_1|^2 + |\overline{OM}_2|^2 + |\overline{OM}_3|^2$ , т. е.

$$|\bar{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2. \quad (4)$$

Отсюда

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

☞ т. е. **модуль вектора равен квадратному корню из суммы квадратов его проекций на оси координат.**

# НАПРАВЛЯЮЩИЕ КОСИНУСЫ ВЕКТОРА

Пусть углы вектора  $\vec{a}$  с осями  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  соответственно равны  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . По свойству проекции вектора на ось, имеем

$$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos \alpha, \quad a_y = |\vec{a}| \cdot \cos \beta, \quad a_z = |\vec{a}| \cdot \cos \gamma. \quad (5)$$

Или, что то же самое,

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Числа  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  называются *направляющими косинусами* вектора  $\vec{a}$ .

Подставим выражения (5) в равенство (4), получаем

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot \cos^2 \alpha + |\vec{a}|^2 \cdot \cos^2 \beta + |\vec{a}|^2 \cdot \cos^2 \gamma.$$

Сократив на  $|\vec{a}|^2 \neq 0$ , получим соотношение

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

⇒ т. е. *сумма квадратов направляющих косинусов ненулевого вектора равна единице.*

☉ Легко заметить, что координатами единичного вектора  $\vec{e}$  являются числа  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$ , т. е.  $\vec{e} = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$ .

# ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕКТОРАМИ, ЗАДААННЫМИ ПРОЕКЦИЯМИ

Пусть векторы  $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$  и  $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$  заданы своими проекциями на оси координат  $Ox, Oy, Oz$  или, что то же самое

$$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}, \quad \bar{b} = b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_z \cdot \bar{k}.$$

## Линейные операции над векторами

Так как линейные операции над векторами сводятся к соответствующим линейным операциям над проекциями этих векторов, то можно записать:

1.  $\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x)\bar{i} + (a_y \pm b_y)\bar{j} + (a_z \pm b_z)\bar{k}$ , или кратко  $\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z)$ . То есть при сложении (вычитании) векторов их одноименные координаты складываются (вычитаются).

2.  $\lambda\bar{a} = \lambda a_x \cdot \bar{i} + \lambda a_y \cdot \bar{j} + \lambda a_z \cdot \bar{k}$  или короче  $\lambda\bar{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z)$ . То есть при умножении вектора на скаляр координаты вектора умножаются на этот скаляр.

## Равенство векторов

Из определения вектора как направленного отрезка, который можно передвигать в пространстве параллельно самому себе, следует, что *два вектора  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  равны* тогда и только тогда, когда выполняются равенства:  $a_x = b_x$ ,  $a_y = b_y$ ,  $a_z = b_z$ , т. е.

$$\bar{a} = \bar{b} \iff \begin{cases} a_x = b_x, \\ a_y = b_y, \\ a_z = b_z. \end{cases}$$

## Коллинеарность векторов

Выясним условия коллинеарности векторов  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ , заданных своими координатами.

Так как  $\bar{a} \parallel \bar{b}$ , то можно записать  $\bar{a} = \lambda \cdot \bar{b}$ , где  $\lambda$  — некоторое число. То есть

$$a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k} = \lambda(b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_z \cdot \bar{k}) = \lambda b_x \cdot \bar{i} + \lambda b_y \cdot \bar{j} + \lambda b_z \cdot \bar{k}.$$

Отсюда

$$a_x = \lambda b_x, \quad a_y = \lambda b_y, \quad a_z = \lambda b_z,$$

т. е. 
$$\frac{a_x}{b_x} = \lambda, \quad \frac{a_y}{b_y} = \lambda, \quad \frac{a_z}{b_z} = \lambda \quad \text{или} \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

☉ Таким образом, проекции коллинеарных векторов пропорциональны. Верно и обратное утверждение: векторы, имеющие пропорциональные координаты, коллинеарны.

## ПРИМЕР

При каких значениях  $\alpha$  и  $\beta$  векторы  $\bar{a} = -2\bar{i} + 3\bar{j} + \alpha\bar{k}$  и  $\bar{b} = \beta\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}$  коллинеарны?

○ Так как  $\bar{a} \parallel \bar{b}$ , то  $-\frac{2}{\beta} = \frac{3}{-6} = \frac{\alpha}{2}$

Отсюда находим, что  $\alpha = -1, \beta = 4$ .

## Координаты точки

Пусть в пространстве задана прямоугольная декартова система координат  $Oxyz$ . Для любой точки  $M$  координаты вектора  $\overline{OM}$  называются *координатами точки  $M$* . Вектор  $\overline{OM}$  называется *радиус-вектором* точки  $M$ , обозначается  $\vec{r}$ , т. е.  $\overline{OM} = \vec{r}$ . Следовательно, координаты точки — это координаты ее радиус-вектора

$$\vec{r} = (x; y; z) \quad \text{или} \quad \vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}.$$

Координаты точки  $M$  записываются в виде  $M(x; y; z)$ .

## Координаты вектора

Найдем координаты вектора  $\vec{a} = \overline{AB}$ , если известны координаты точек  $A(x_1; y_1; z_1)$  и  $B(x_2; y_2; z_2)$ . Имеем (см. рис. 13):

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \overline{OB} - \overline{OA} = (x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j} + z_2 \cdot \vec{k}) - (x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j} + z_1 \cdot \vec{k}) = \\ &= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}.\end{aligned}$$

Следовательно, координаты вектора равны разностям соответствующих координат его конца и начала:  $\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ .

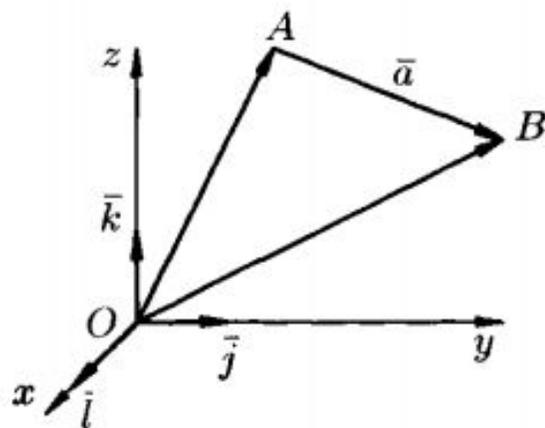


Рис. 13

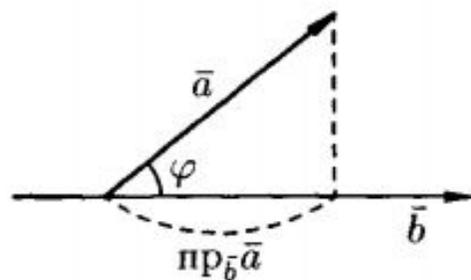


Рис. 14

# СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ И ЕГО СВОЙСТВА

⇒ *Скалярным произведением* двух ненулевых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется *число*, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Обозначается  $\vec{a}\vec{b}$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  (или  $(\vec{a}, \vec{b})$ ). Итак, по определению,

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi,} \quad (1)$$

где  $\varphi = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$ .

Формуле (1) можно придать иной вид. Так как  $|\vec{a}| \cos \varphi = \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}$ , (см. рис. 14), а  $|\vec{b}| \cos \varphi = \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b}$ , то получаем:

$$\boxed{\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a},} \quad (2)$$

т. е. скалярное произведение двух векторов равно модулю одного из них, умноженному на проекцию другого на ось, сонаправленную с первым вектором.

# СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

1. Скалярное произведение обладает переместительным свойством:  
 $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ .

□  $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ , а  $\vec{b}\vec{a} = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(\widehat{\vec{b}, \vec{a}})$ . И так как  $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}|$ , как произведение чисел и  $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \cos(\widehat{\vec{b}, \vec{a}})$ , то  $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ . ■

2. Скалярное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя:  $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a}\vec{b})$ .

□  $(\lambda\vec{a})\vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_{\vec{b}} \lambda\vec{a} = \lambda \cdot |\vec{b}| \cdot \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \lambda(\vec{a}\vec{b})$ . ■

3. Скалярное произведение обладает распределительным свойством:  $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$ .

□  $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| \cdot (\text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} + \text{пр}_{\vec{a}} \vec{c}) = |\vec{a}| \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} + |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{c} = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$ . ■

4. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины:  $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ .

□  $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2$ . ■

В частности:  $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ .

☹ Если вектор  $\vec{a}$  возвести скалярно в квадрат и затем извлечь корень, то получим не первоначальный вектор, а его модуль  $|\vec{a}|$ , т. е.  $\sqrt{\vec{a}^2} = |\vec{a}|$  ( $\sqrt{\vec{a}^2} \neq \vec{a}$ ).

**Пример 1.** Найти длину вектора  $\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{3}$ .

○ Решение:

$$\begin{aligned} |\vec{c}| &= \sqrt{\vec{c}^2} = \sqrt{(3\vec{a} - 4\vec{b})^2} = \sqrt{9\vec{a}^2 - 24\vec{a}\vec{b} + 16\vec{b}^2} = \\ &= \sqrt{9 \cdot 4 - 24 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + 16 \cdot 9} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}. \quad \bullet \end{aligned}$$

5. Если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  (ненулевые) взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю, т. е. если  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , то  $\vec{a}\vec{b} = 0$ . Справедливо и обратное утверждение: если  $\vec{a}\vec{b} = 0$  и  $\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$ , то  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

□ Так как  $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{2}$ , то  $\cos \varphi = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ . Следовательно,

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 = 0$ . Если же  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  и  $|\vec{a}| \neq 0$ ,  $|\vec{b}| \neq 0$ , то  $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$ .

Отсюда  $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 90^\circ$ , т. е.  $\vec{a} \perp \vec{b}$ . В частности:

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0. \quad \blacksquare$$

5. Если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  (ненулевые) взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю, т. е. если  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , то  $\vec{a}\vec{b} = 0$ . Справедливо и обратное утверждение: если  $\vec{a}\vec{b} = 0$  и  $\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$ , то  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

□ Так как  $\varphi = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{\pi}{2}$ , то  $\cos \varphi = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ . Следовательно,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 = 0$ . Если же  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  и  $|\vec{a}| \neq 0$ ,  $|\vec{b}| \neq 0$ , то  $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$ . Отсюда  $\varphi = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 90^\circ$ , т. е.  $\vec{a} \perp \vec{b}$ . В частности:

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0. \quad \blacksquare$$

# СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ, ЗАДАННЫХ В КООРДИНАТНОЙ ФОРМЕ

Пусть заданы два вектора

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k} \quad \text{и} \quad \bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}.$$

Найдем скалярное произведение векторов, перемножая их как многочлены (что законно в силу свойств линейности скалярного произведения) и пользуясь таблицей скалярного произведения векторов  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$ :

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	1	0	0
$\bar{j}$	0	1	0
$\bar{k}$	0	0	1

$$\begin{aligned}
\bar{a} \cdot \bar{b} &= (a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}) \cdot (b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}) = \\
&= a_x b_x \bar{i}\bar{i} + a_x b_y \bar{i}\bar{j} + a_x b_z \bar{i}\bar{k} + \\
&+ a_y b_x \bar{j}\bar{i} + a_y b_y \bar{j}\bar{j} + a_y b_z \bar{j}\bar{k} + \\
&+ a_z b_x \bar{k}\bar{i} + a_z b_y \bar{k}\bar{j} + a_z b_z \bar{k}\bar{k} = \\
&= a_x b_x + 0 + 0 + 0 + a_y b_y + 0 + 0 + 0 + a_z b_z,
\end{aligned}$$

т. е.

$$\boxed{\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.}$$

Итак, скалярное произведение векторов равно сумме произведений их одноименных координат.

**Пример 2.** Доказать, что диагонали четырехугольника, заданного координатами вершин  $A(-4; -4; 4)$ ,  $B(-3; 2; 2)$ ,  $C(2; 5; 1)$ ,  $D(3; -2; 2)$ , взаимно перпендикулярны.

○ Решение: Составим вектора  $\overline{AC}$  и  $\overline{BD}$ , лежащие на диагоналях данного четырехугольника. Имеем:  $\overline{AC} = (6; 9; -3)$  и  $\overline{BD} = (6; -4; 0)$ . Найдем скалярное произведение этих векторов:

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = 36 - 36 - 0 = 0.$$

Отсюда следует, что  $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ . Диагонали четырехугольника  $ABCD$  взаимно перпендикулярны. ●

# ПРИЛОЖЕНИЯ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

## Угол между векторами

Определение угла  $\varphi$  между ненулевыми векторами  $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$  и  $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$ :

$$\cos \varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}, \quad \text{т. е.} \quad \cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Отсюда следует условие перпендикулярности ненулевых векторов  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ :

$$\bar{a} \perp \bar{b} \iff a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

## Проекция вектора на заданное направление

Нахождение проекции вектора  $\bar{a}$  на направление, заданное вектором  $\bar{b}$ , может осуществляться по формуле

$$\text{пр}_{\bar{b}} \bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} \quad \left( \text{пр}_{\bar{a}} \bar{b} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}|} \right), \quad \text{т. е.} \quad \text{пр}_{\bar{b}} \bar{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

# ПРИМЕР 1.

Даны вершины треугольника  $A(2; 3; -1)$ ,  $B(4; 1; -2)$  и  $C(1; 0; 2)$ .

Найти:

а) внутренний угол при вершине  $C$ ;

б)  $\text{пр}_{\overline{CA}} \overline{CB}$ .

○ а) Угол  $\varphi$  при вершине  $C$  есть угол между векторами  $\overline{CB}$  и  $\overline{CA}$ . Определим координаты этих векторов:

$$\overline{CB} = (4 - 1; 1 - 0; -2 - 2) = (3; 1; -4),$$

$$\overline{CA} = (2 - 1; 3 - 0; -1 - 2) = (1; 3; -3).$$

Найдем их модули:

$$|\overline{CB}| = \sqrt{9 + 1 + 16} = \sqrt{26}, \quad |\overline{CA}| = \sqrt{1 + 9 + 9} = \sqrt{19}.$$

Согласно формуле

$$\cos \varphi = \frac{\overline{CB} \cdot \overline{CA}}{|\overline{CB}| \cdot |\overline{CA}|} = \frac{3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + (-4) \cdot (-3)}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{19}} = \frac{18}{\sqrt{494}},$$

$$\varphi = \arccos \frac{18}{\sqrt{494}}.$$

б) Согласно формуле

$$\text{пр}_{\overline{CA}} \overline{CB} = \frac{\overline{CB} \cdot \overline{CA}}{|\overline{CA}|} = \frac{18}{\sqrt{19}}.$$

# ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ И ЕГО СВОЙСТВА

Три некопланарных вектора  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ , взятые в указанном порядке, образуют *правую тройку*, если с конца третьего вектора  $\vec{c}$  кратчайший поворот от первого вектора  $\vec{a}$  ко второму вектору  $\vec{b}$  виден совершающимся против часовой стрелки, и *левую*, если по часовой (см. рис. 16).

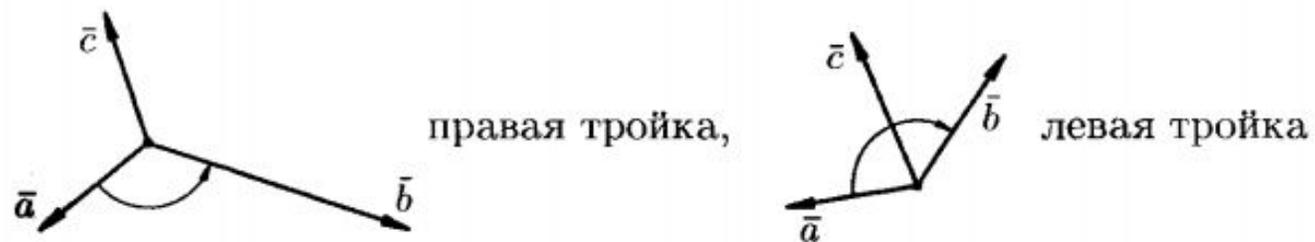


Рис. 16

☞ **Векторным произведением** вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c}$ , который:

- 1) перпендикулярен векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , т. е.  $\vec{c} \perp \vec{a}$  и  $\vec{c} \perp \vec{b}$ ;
- 2) имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  как на сторонах (см. рис. 17), т. е.

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi, \quad \text{где } \varphi = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})};$$

- 3) векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  образуют правую тройку.

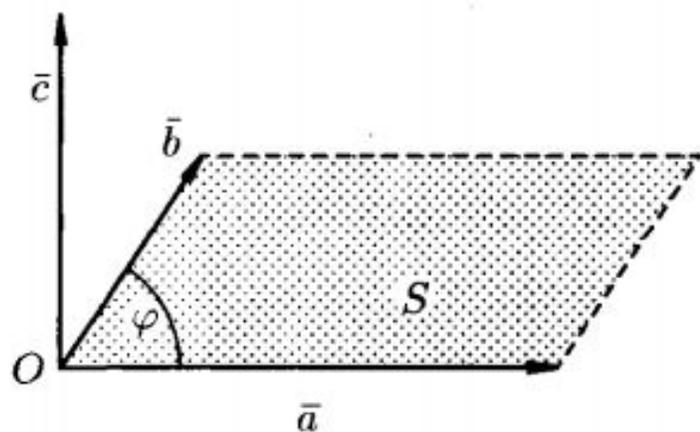


Рис. 17

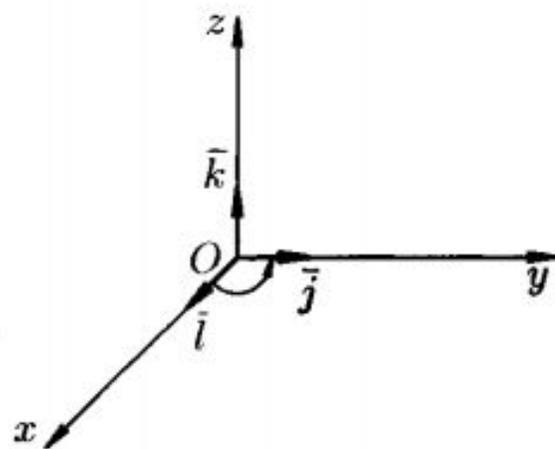


Рис. 18

Векторное произведение обозначается  $\bar{a} \times \bar{b}$  или  $[\bar{a}, \bar{b}]$ .

Из определения векторного произведения непосредственно вытекают следующие соотношения между ортами  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$  и  $\bar{k}$  (см. рис. 18):

$$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}, \quad \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}, \quad \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}.$$

Докажем, например, что  $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$ .

1)  $\bar{k} \perp \bar{i}, \bar{k} \perp \bar{j}$ ;

2)  $|\bar{k}| = 1$ , но  $|\bar{i} \times \bar{j}| = |\bar{i}| \cdot |\bar{j}| \cdot \sin 90^\circ = 1$ ;

3) векторы  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$  и  $\bar{k}$  образуют правую тройку (см. рис. 16).

# СВОЙСТВА ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

1. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак, т. е.  $\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$  (см. рис. 19).

□ Векторы  $\bar{a} \times \bar{b}$  и  $\bar{b} \times \bar{a}$  коллинеарны, имеют одинаковые модули (площадь параллелограмма остается неизменной), но противоположно направлены (тройки  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{a} \times \bar{b}$  и  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{b} \times \bar{a}$  противоположной ориентации). Стало быть,  $\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$ . ■

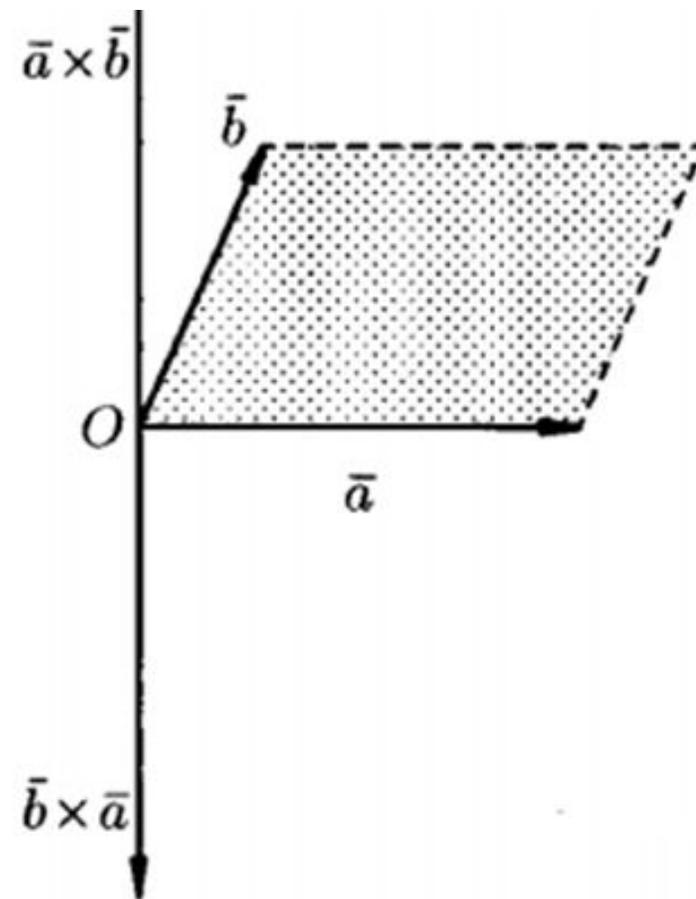


Рис. 19

2. Векторное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя, т. е.  $\lambda(\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda\bar{b})$ .

□ Пусть  $\lambda > 0$ . Вектор  $\lambda(\bar{a} \times \bar{b})$  перпендикулярен векторам  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ . Вектор  $(\lambda\bar{a}) \times \bar{b}$  также перпендикулярен векторам  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  (векторы  $\bar{a}$ ,  $\lambda\bar{a}$  лежат в одной плоскости). Значит, векторы  $\lambda(\bar{a} \times \bar{b})$  и  $(\lambda\bar{a}) \times \bar{b}$  коллинеарны. Очевидно, что и направления их совпадают. Имеют одинаковую длину:

$$|\lambda(\bar{a} \times \bar{b})| = \lambda|\bar{a} \times \bar{b}| = \lambda|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$$

и

$$|(\lambda\bar{a}) \times \bar{b}| = |\lambda\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin(\widehat{\lambda\bar{a}, \bar{b}}) = \lambda|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}).$$

Поэтому  $\lambda(\bar{a} \times \bar{b}) = \lambda\bar{a} \times \bar{b}$ . Аналогично доказывается при  $\lambda < 0$ . ■

3. Два ненулевых вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору, т. е.  $\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ .

□ Если  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , то угол между ними равен  $0^\circ$  или  $180^\circ$ . Но тогда  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$ . Значит,  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ .

Если же  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ , то  $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi = 0$ . Но тогда  $\varphi = 0^\circ$  или  $\varphi = 180^\circ$ , т. е.  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ . ■

☉ В частности,  $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$ .

4. Векторное произведение обладает распределительным свойством:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

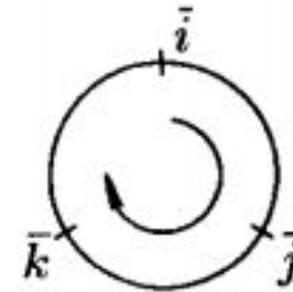
Примем без доказательства.

# ВЫРАЖЕНИЕ ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЧЕРЕЗ КООРДИНАТЫ

Мы будем использовать таблицу векторного произведения векторов  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  и  $\vec{k}$ :

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

Чтобы не ошибиться со знаком, удобно пользоваться схемой:



если направление кратчайшего пути от первого вектора к второму совпадает с направлением стрелки, то произведение равно третьему вектору, если не совпадает — третий вектор берется со знаком «минус».

Пусть заданы два вектора  $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$  и  $\bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}$ . Найдем векторное произведение этих векторов, перемножая их как многочлены (согласно свойств векторного произведения):

$$\begin{aligned}\bar{a} \times \bar{b} &= (a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}) \times (b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}) = \\ &= a_x b_x (\bar{i} \times \bar{i}) + a_x b_y (\bar{i} \times \bar{j}) + a_x b_z (\bar{i} \times \bar{k}) + a_y b_x (\bar{j} \times \bar{i}) + a_y b_y (\bar{j} \times \bar{j}) + \\ &\quad + a_y b_z (\bar{j} \times \bar{k}) + a_z b_x (\bar{k} \times \bar{i}) + a_z b_y (\bar{k} \times \bar{j}) + a_z b_z (\bar{k} \times \bar{k}) = \\ &= \bar{0} + a_x b_y \bar{k} - a_x b_z \bar{j} - a_y b_x \bar{k} + \bar{0} + a_y b_z \bar{i} + a_z b_x \bar{j} - a_z b_y \bar{i} + \bar{0} = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \bar{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \bar{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \bar{k} = \\ &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \bar{k},\end{aligned}$$

т. е.

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \bar{k}. \quad (1)$$

Полученную формулу можно записать еще короче:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad (2)$$

так как правая часть равенства (1) соответствует разложению определителя третьего порядка по элементам первой строки. Равенство (2) легко запоминается.

# ПРИЛОЖЕНИЯ ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

## Установление коллинеарности векторов

Если  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , то  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$  (и наоборот), т. е.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{0} \iff \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \iff \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

## Нахождение площади параллелограмма и треугольника

Согласно определению векторного произведения векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$   $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$ , т. е.  $S_{\text{пар}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$ . И, значит,  $S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$ .

## ПРИМЕР 1.

Даны два вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , для которых  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 6$ ,  $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{5}{6}\pi$ . Найти

а)  $\vec{a} \times \vec{b}$ ;

б)  $|(2\vec{a} + 3\vec{b}) \times (\vec{a} - 4\vec{b})|$ .

○ а) По формуле находим модуль векторного произведения:  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 6$ . По формуле получаем  $\vec{a} \times \vec{b} = 6 \cdot \vec{e}$ , где  $\vec{e}$  — единичный вектор направления  $\vec{a} \times \vec{b}$ ;

б) Согласно свойствам векторного произведения получаем:

$$\begin{aligned}(2\vec{a} + 3\vec{b}) \times (\vec{a} - 4\vec{b}) &= 2(\vec{a} \times \vec{a}) - 8(\vec{a} \times \vec{b}) + 3(\vec{b} \times \vec{a}) - 12(\vec{b} \times \vec{b}) = \\ &= -8(\vec{a} \times \vec{b}) - 3(\vec{a} \times \vec{b}) = -11(\vec{a} \times \vec{b}).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$|(2\vec{a} + 3\vec{b}) \times (\vec{a} - 4\vec{b})| = |-11(\vec{a} \times \vec{b})| = 11 \cdot |\vec{a} \times \vec{b}| = 11 \cdot 6 = 66. \bullet$$

## ПРИМЕР 2.

Найти площадь треугольника с вершинами  $A(1; 2; 0)$ ,  $B(3; 2; 1)$ ,  $C(-2; 1; 2)$ .

○ Площадь  $S$  треугольника  $ABC$  равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$ , т.е.  $S = \frac{1}{2}|\overline{AB} \times \overline{AC}|$ . Имеем:  $\overline{AB} = (2; 0; 1)$ ,  $\overline{AC} = (-3; -1; 2)$ . Тогда

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \left( \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \right),$$

т.е.  $\overline{AB} \times \overline{AC} = (1; -7; -2)$ . Следовательно,  $S = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 49 + 4}$ ,

$$S = \frac{3\sqrt{6}}{2}. \quad \bullet$$

# СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Рассмотрим произведение векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ , составленное следующим образом:  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ . Здесь первые два вектора перемножаются векторно, а их результат скалярно на третий вектор. Такое произведение называется *векторно-скалярным*, или *смешанным*, произведением трех векторов. Смешанное произведение представляет собой некоторое число.

Выясним геометрический смысл выражения  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ . Построим параллелепипед, ребрами которого являются векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  и вектор  $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$  (см. рис. 22).

Имеем:  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{d} \cdot \vec{c} = |\vec{d}| \cdot \text{пр}_{\vec{d}} \vec{c}$ ,  $|\vec{d}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = S$ , где  $S$  — площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ,  $\text{пр}_{\vec{d}} \vec{c} = H$  для правой тройки векторов и  $\text{пр}_{\vec{d}} \vec{c} = -H$  для левой, где  $H$  — высота параллелепипеда. Получаем:  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = S \cdot (\pm H)$ , т. е.  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \pm V$ , где  $V$  — объем параллелепипеда, образованного векторами  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ .

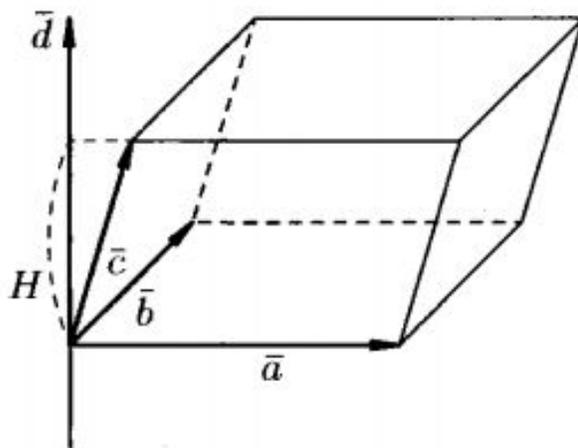


Рис. 22

Таким образом, смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком «плюс», если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком «минус», если они образуют левую тройку.

# СВОЙСТВА СМЕШАННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

1. Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его сомножителей, т. е.  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$ .

Действительно, в этом случае не изменяется ни объем параллелепипеда, ни ориентация его ребер.

2. Смешанное произведение не меняется при перемене местами знаков векторного и скалярного умножения, т. е.  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ .

Действительно,  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \pm V$  и  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = \pm V$ . Знак в правой части этих равенств берем один и тот же, так как тройки векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  и  $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$  — одной ориентации.

Следовательно,  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ . Это позволяет записывать смешанное произведение векторов  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$  в виде  $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$  без знаков векторного, скалярного умножения.

3. Смешанное произведение меняет свой знак при перемене мест любых двух векторов-сомножителей, т. е.  $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{a}\bar{c}\bar{b}$ ,  $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{b}\bar{a}\bar{c}$ ,  $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{c}\bar{b}\bar{a}$ .

Действительно, такая перестановка равносильна перестановке сомножителей в векторном произведении, меняющей у произведения знак.

4. Смешанное произведение ненулевых векторов  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  и  $\bar{c}$  равно нулю тогда и только тогда, когда они компланарны.

□ Если  $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$ , то  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  — компланарны.

Допустим, что это не так. Можно было бы построить параллелепипед с объемом  $V \neq 0$ . Но так как  $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \pm V$ , то получили бы, что  $\bar{a}\bar{b}\bar{c} \neq 0$ . Это противоречит условию:  $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$ .

Обратно, пусть векторы  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  — компланарны. Тогда вектор  $\bar{d} = \bar{a} \times \bar{b}$  будет перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$ , и, следовательно,  $\bar{d} \perp \bar{c}$ . Поэтому  $\bar{d} \cdot \bar{c} = 0$ , т. е.  $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$ . ■

## ВЫРАЖЕНИЕ СМЕШАННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЧЕРЕЗ КООРДИНАТЫ

Пусть заданы векторы  $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$ ,  $\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$ ,  $\bar{c} = c_x\bar{i} + c_y\bar{j} + c_z\bar{k}$ . Найдем их смешанное произведение, используя выражения в координатах для векторного и скалярного произведений:

$$\begin{aligned}(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot (c_x\bar{i} + c_y\bar{j} + c_z\bar{k}) = \\ &= \left( \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \bar{k} \right) \cdot (c_x\bar{i} + c_y\bar{j} + c_z\bar{k}) = \\ &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot c_z. \quad (1)\end{aligned}$$

Полученную формулу можно записать короче:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

так как правая часть равенства (1) представляет собой разложение определителя третьего порядка по элементам третьей строки.

# ПРИЛОЖЕНИЯ СМЕШАННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

## Определение взаимной ориентации векторов в пространстве

Определение взаимной ориентации векторов  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  и  $\bar{c}$  основано на следующих соображениях. Если  $\bar{a}\bar{b}\bar{c} > 0$ , то  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  — правая тройка; если  $\bar{a}\bar{b}\bar{c} < 0$ , то  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  — левая тройка.

## Установление компланарности векторов

Векторы  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  и  $\bar{c}$  компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю ( $\bar{a} \neq \bar{0}$ ,  $\bar{b} \neq \bar{0}$ ,  $\bar{c} \neq \bar{0}$ ):

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0 \iff \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \iff \text{векторы } \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \text{ компланарны.}$$

### Определение объемов параллелепипеда и треугольной пирамиды

Нетрудно показать, что объем параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  вычисляется как  $V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$ , а объем треугольной пирамиды, построенной на этих же векторах, равен  $V = \frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$ .

**Пример 1.** Вершинами пирамиды служат точки  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(0; -1; 1)$ ,  $C(2; 5; 2)$  и  $D(3; 0; -2)$ . Найти объем пирамиды.

○ Решение: Находим векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ :

$$\vec{a} = \overline{AB} = (-1; -3; -2), \quad \vec{b} = \overline{AC} = (1; 3; -1), \quad \vec{c} = \overline{AD} = (2; -2; -5).$$

Находим  $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ :

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-17) + 3 \cdot (-3) - 2 \cdot (-8) = 17 - 9 + 16 = 24.$$

Следовательно,  $V = \frac{1}{6} \cdot 24 = 4$ . ●