ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Вектор — это направленный прямолинейный отрезок, т. е. отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление. Если A — начало вектора, а B — его конец, то вектор обозначается символом $\overline{AB}$ или $\bar{a}$. Вектор $\overline{BA}$ (у него начало в точке B, а конец в точке A) называется ***противоположным*** вектору $\overline{AB}$. Вектор, противоположный вектору $\bar{a}$, обозначается $-\bar{a}$.

Длиной или *модулем* вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка и обозначается $|\overline{AB}|$. Вектор, длина которого равна нулю, называется ***нулевым вектором*** и обозначается $\bar{0}$. Нулевой вектор направления не имеет.

Вектор, длина которого равна единице, называется ***единичным*** вектором и обозначается через $\bar{e}$. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, называется ***ортом*** вектора $\bar{a}$ и обозначается $\bar{a}^0$.

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным* вектором и обозначается через $\bar{e}$. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, называется *ортом* вектора $\bar{a}$ и обозначается $\bar{a}^0$.

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых; записывают $\bar{a} \parallel \bar{b}$.

Коллинеарные векторы могут быть направлены одинаково или противоположно.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются ***равными*** ($\bar{a} = \bar{b}$), если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые длины.

Из определения равенства векторов следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, а начало вектора помещать в любую точку O пространства.

На рисунке 1 векторы образуют прямоугольник. Справедливо равенство $\bar{b} = \bar{d}$, но $\bar{a} \neq \bar{c}$. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{c}$ — противоположные, $\bar{a} = -\bar{c}$.

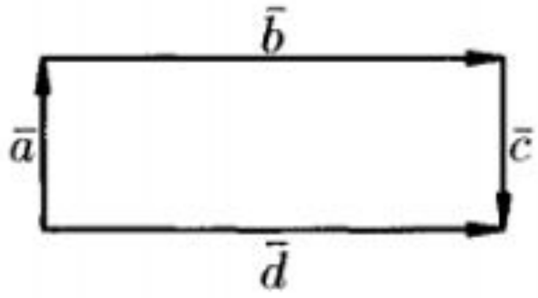


Рис. 1

Равные векторы называют также *свободными*.

Три вектора в пространстве называются ***компланарными***, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Если среди трех векторов хотя бы один нулевой или два любые коллинеарны, то такие векторы компланарны.

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Под линейными операциями над векторами понимают операции сложения и вычитания векторов, а также умножение вектора на число.

Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — два произвольных вектора. Возьмем произвольную точку O и построим вектор $\overline{OA} = \bar{a}$. От точки A отложим вектор $\overline{AB} = \bar{b}$. Вектор $\overline{OB}$, соединяющий начало первого вектора с концом второго, называется *суммой* векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $\overline{OB} = \bar{a} + \bar{b}$ (см. рис. 2).

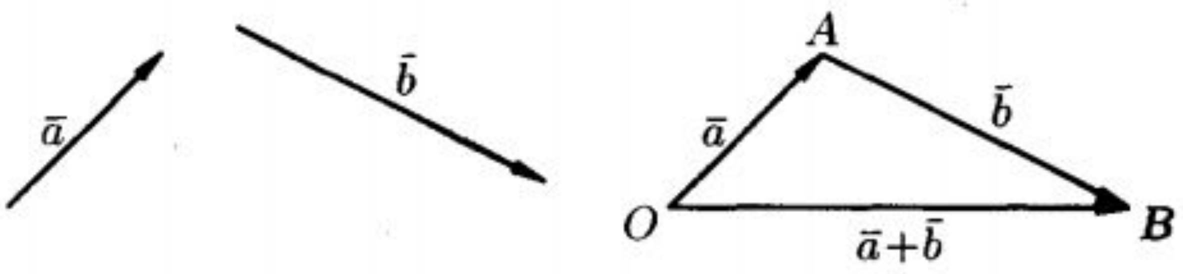


Рис. 2

Это правило сложения векторов называют *правилом треугольника.*

Сумму двух векторов можно построить также по *правилу параллелограмма* (см. рис. 3).

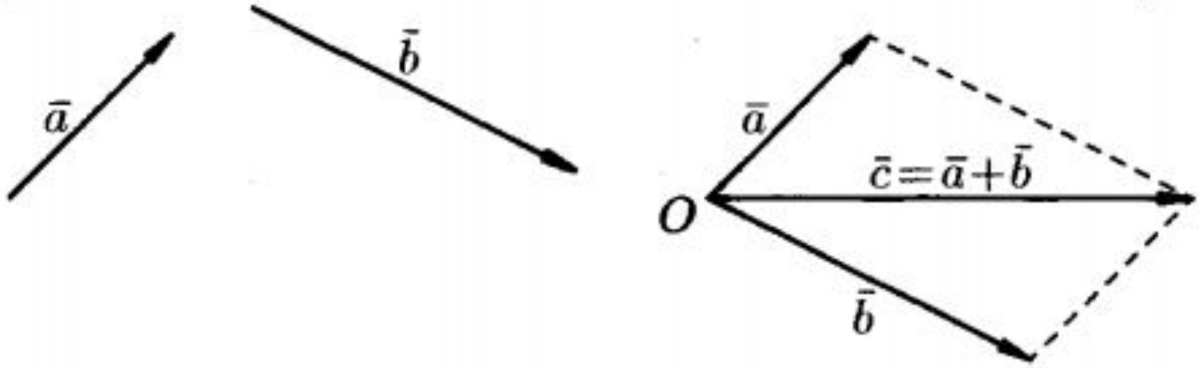


Рис. 3

На рисунке 4 показано сложение трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

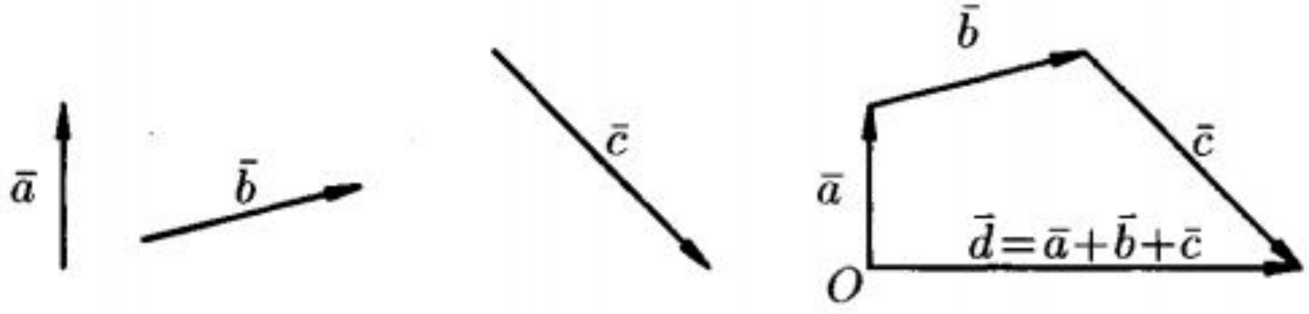


Рис. 4

Под *разностью* векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ понимается вектор $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$ такой, что $\bar{b} + \bar{c} = \bar{a}$ (см. рис. 5).

Рис. 5

Отметим, что в параллелограмме, построенном на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, одна направленная диагональ является суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, а другая — разностью (см. рис. 6).

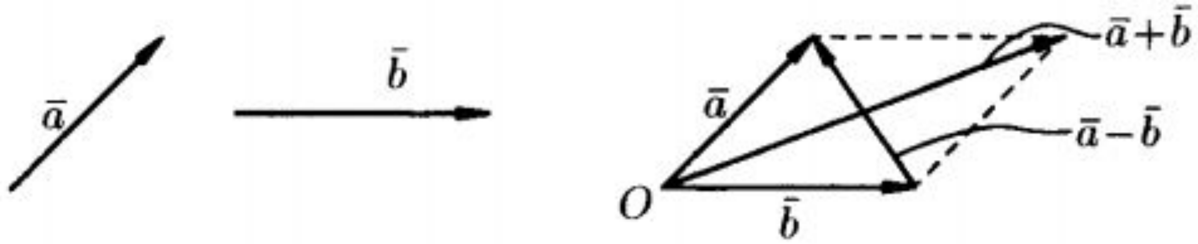


Рис. 6

Можно вычитать векторы по правилу: $\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$, т. е. вычитание векторов заменить сложением вектора $\bar{a}$ с вектором, противоположным вектору $\bar{b}$.

Произведением вектора $\bar{a}$ на скаляр (***число***) λ называется вектор $\lambda \cdot \bar{a}$ (или $\bar{a} \cdot \lambda$), который имеет длину $|\lambda| \cdot |\bar{a}|$, коллинеарен вектору $\bar{a}$, имеет направление вектора $\bar{a}$, если $\lambda > 0$ и противоположное направление, если $\lambda < 0$. Например, если дан вектор $\xrightarrow{\bar{a}}$, то векторы $3\bar{a}$ и $-2\bar{a}$ будут иметь вид $\xrightarrow{\quad 3\bar{a} \quad}$ и $\xleftarrow{\ -2\bar{a}\ }$.

Из определения произведения вектора на число следуют свойства этого произведения:

1) если $\bar{b} = \lambda \cdot \bar{a}$, то $\bar{b} \parallel \bar{a}$. Наоборот, если $\bar{b} \parallel \bar{a}$, ($\bar{a} \neq \bar{0}$), то при некотором λ верно равенство $\bar{b} = \lambda\bar{a}$;

2) всегда $\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \bar{a}^0$, т. е. каждый вектор равен произведению его модуля на орт.

Линейные операции над векторами обладают следующими свойствами:

1. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$,
2. $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$,
3. $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \bar{a}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \bar{a}$,
4. $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \bar{a} = \lambda_1 \cdot \bar{a} + \lambda_2 \cdot \bar{a}$,
5. $\lambda \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = \lambda \cdot \bar{a} + \lambda \cdot \bar{b}$.

ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСЬ

Пусть в пространстве задана ось l, т. е. направленная прямая.

Проекцией точки M на ось l называется основание M_1 перпендикуляра MM_1, опущенного из точки на ось.

Точка M_1 есть точка пересечения оси l с плоскостью, проходящей через точку M перпендикулярно оси (см. рис. 7).

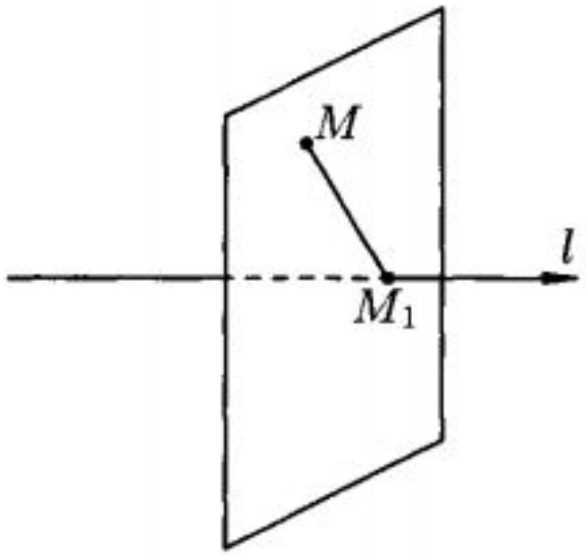


Рис. 7

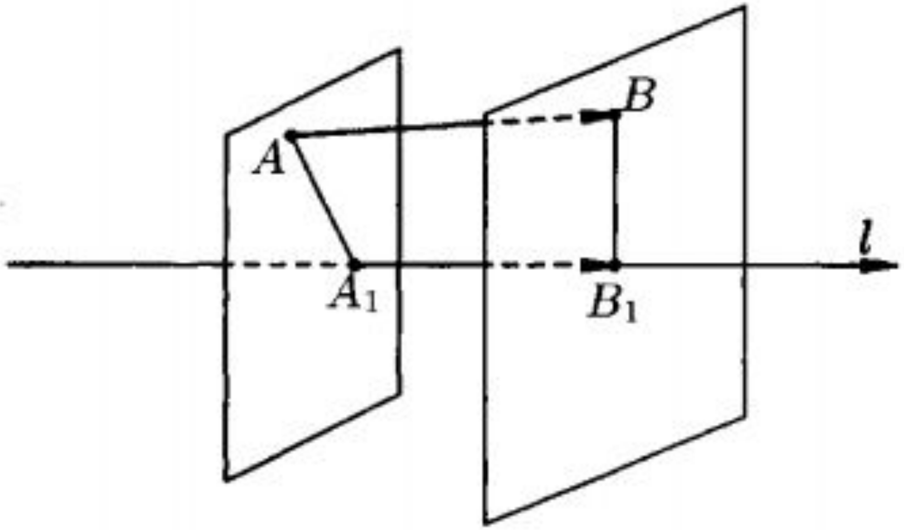


Рис. 8

Если точка M лежит на оси l, то проекция точки M на ось совпадает с M.

Пусть $\overline{AB}$ — произвольный вектор ($\overline{AB} \neq \overline{0}$). Обозначим через A_1 и B_1 проекции на ось l соответственно начала A и конца B вектора $\overline{AB}$ и рассмотрим вектор $\overline{A_1B_1}$.

Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l называется положительное число $|\overline{A_1B_1}|$, если вектор $\overline{A_1B_1}$ и ось l одинаково направлены и отрицательное число $-|\overline{A_1B_1}|$, если вектор $\overline{A_1B_1}$ и ось l противоположно направлены (см. рис. 8). Если точки A_1 и B_1 совпадают ($\overline{A_1B_1} = \overline{0}$), то проекция вектора $\overline{AB}$ равна 0.

Проекция вектора $\overline{AB}$ на ось l обозначается так: $\text{пр}_l\,\overline{AB}$. Если $\overline{AB} = \overline{0}$ или $\overline{AB} \perp l$, то $\text{пр}_l\,\overline{AB} = 0$.

Угол φ *между вектором* $\bar{a}$ и осью l (или угол между двумя векторами) изображен на рисунке 9. Очевидно, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

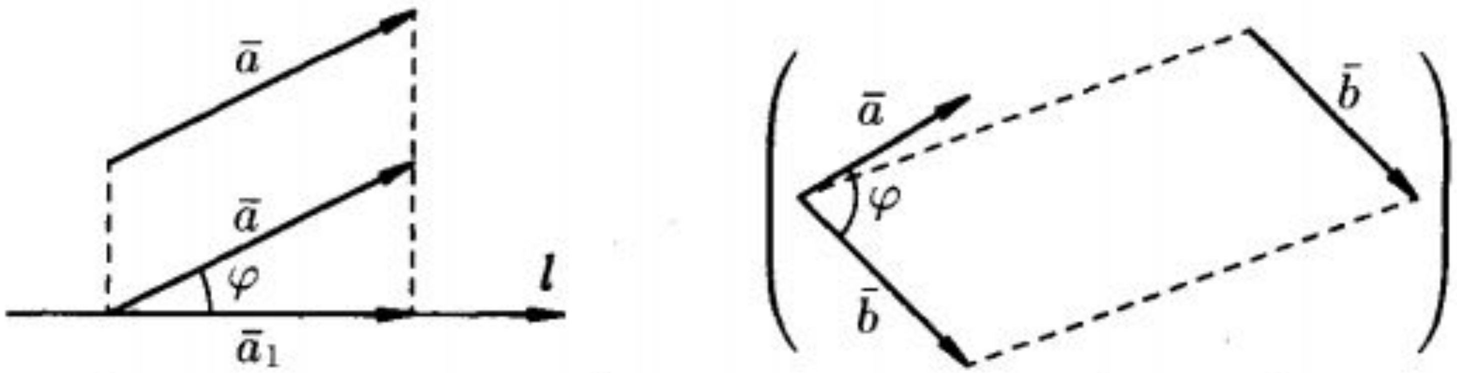


Рис. 9

СВОЙСТВА ПРОЕКЦИЙ

Свойство 1. Проекция вектора $\bar{a}$ на ось l равна произведению модуля вектора $\bar{a}$ на косинус угла φ между вектором и осью, т. е. $\text{пр}_l\,\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos\varphi$.

❑ Если $\varphi = (\widehat{\bar{a}, l}) < \frac{\pi}{2}$, то $\text{пр}_l\,\bar{a} = +|\bar{a}_1| = |\bar{a}| \cdot \cos\varphi$.

Если $\varphi > \frac{\pi}{2}$ $(\varphi \leqslant \pi)$, то $\text{пр}_l\,\bar{a} = -|\bar{a}_1| = -|\bar{a}| \cdot \cos(\pi - \varphi) = |\bar{a}| \cdot \cos\varphi$ (см. рис. 10).

Если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $\text{пр}_l\,\bar{a} = 0 = |a| \cos\varphi$. ■

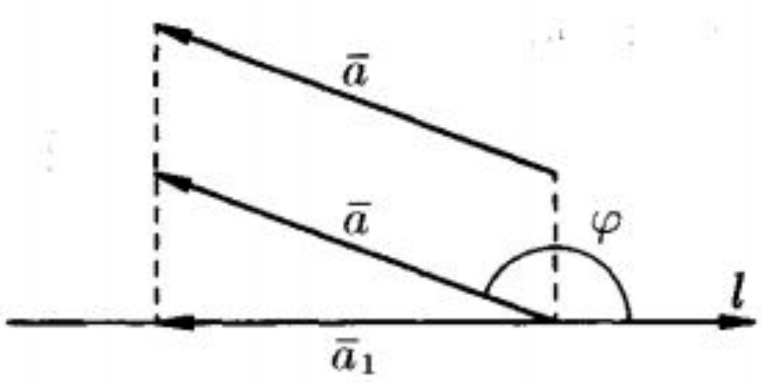


Рис. 10

Следствие 1. Проекция вектора на ось положительна (отрицательна), если вектор образует с осью острый (тупой) угол, и равна нулю, если этот угол — прямой.

Следствие 2. Проекции равных векторов на одну и ту же ось равны между собой.

Свойство 2. Проекция суммы нескольких векторов на одну и ту же ось равна сумме их проекций на эту ось.

❑ Пусть, например, $\bar{d} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$. Имеем $\text{пр}_l\,\bar{d} = +|\bar{d}_1| = +|\bar{a}_1| + |\bar{b}_1| - |\bar{c}_1|$, т. е. $\text{пр}_l(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) = \text{пр}_l\,\bar{a} + \text{пр}_l\,\bar{b} + \text{пр}_l\,\bar{c}$ (см. рис. 11). ■

Свойство 3. При умножении вектора $\bar{a}$ на число λ его проекция на ось также умножается на это число, т. е.

$$\text{пр}_l(\lambda \cdot \bar{a}) = \lambda \cdot \text{пр}_l\,\bar{a}.$$

❑ При $\lambda > 0$ имеем $\text{пр}_l(\lambda \cdot \bar{a}) = |\lambda \bar{a}| \cdot \cos\varphi \underset{\text{(свойство 1)}}{=}$ $= \lambda \cdot |\bar{a}| \cdot \cos\varphi = \lambda \cdot \text{пр}_l\,\bar{a}$.

При $\lambda < 0$: $\text{пр}_l(\lambda \cdot \bar{a}) = |\lambda \bar{a}| \cdot \cos(\pi - \varphi) = -\lambda \cdot |\bar{a}| \cdot (-\cos\varphi) = \lambda \cdot \bar{a} \cdot \cos\varphi = \lambda \cdot \text{пр}_l\,\bar{a}$. Свойство справедливо, очевидно, и при $\lambda = 0$. ■

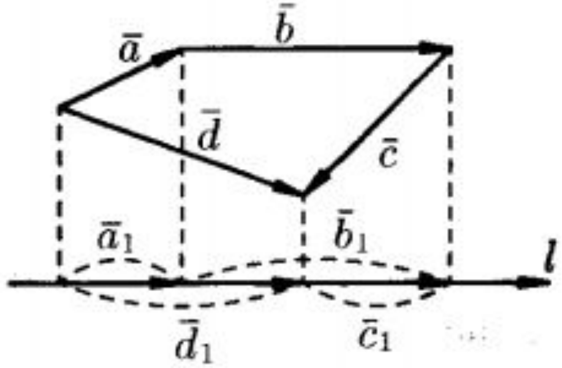


Рис. 11

Таким образом, линейные операции над векторами приводят к соответствующим линейным операциям над проекциями этих векторов.

РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО ОРТАМ КООРДИНАТНЫХ ОСЕЙ

Рассмотрим в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$. Выделим на координатных осях Ox, Oy и Oz единичные векторы (орты), обозначаемые $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ соответственно (см. рис. 12).

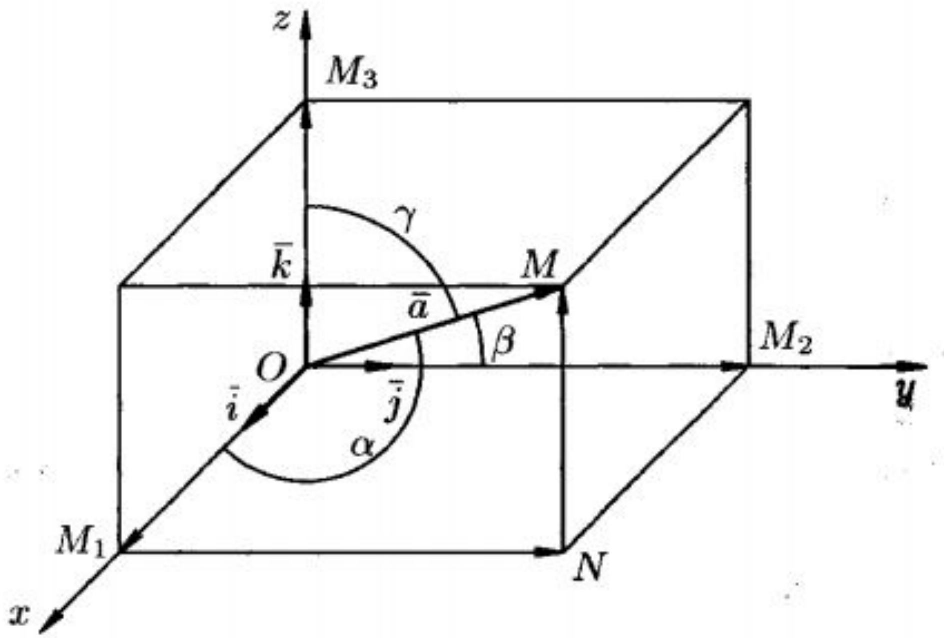


Рис. 12

Выберем произвольный вектор $\bar{a}$ пространства и совместим его начало с началом координат: $\bar{a} = \overline{OM}$.

Найдем проекции вектора $\bar{a}$ на координатные оси. Проведем через конец вектора $\overline{OM}$ плоскости, параллельные координатным плоскостям. Точки пересечения этих плоскостей с осями обозначим соответственно через M_1, M_2 и M_3. Получим прямоугольный параллелепипед, одной из диагоналей которого является вектор $\overline{OM}$. Тогда $\text{пр}_x\,\bar{a} = |\overline{OM}_1|$, $\text{пр}_y\,\bar{a} = |\overline{OM}_2|$, $\text{пр}_z\,\bar{a} = |\overline{OM}_3|$. По определению суммы нескольких векторов находим $\bar{a} = \overline{OM}_1 + \overline{M_1N} + \overline{NM}$.

А так как $\overline{M_1N} = \overline{OM}_2$, $\overline{NM} = \overline{OM}_3$, то

$$\bar{a} = \overline{OM}_1 + \overline{OM}_2 + \overline{OM}_3. \qquad (1)$$

Но

$$\overline{OM}_1 = |\overline{OM}_1| \cdot \bar{i}, \quad \overline{OM}_2 = |\overline{OM}_2| \cdot \bar{j}, \quad \overline{OM}_3 = |\overline{OM}_3| \cdot \bar{k}. \qquad (2)$$

Обозначим проекции вектора $\bar{a} = \overline{OM}$ на оси Ox, Oy и Oz соответственно через a_x, a_y и a_z, т. е. $|\overline{OM}_1| = a_x$, $|\overline{OM}_2| = a_y$, $|\overline{OM}_3| = a_z$. Тогда из равенств (1) и (2) получаем

$$\boxed{\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}.} \qquad (3)$$

Эта формула является основной в векторном исчислении и называется ***разложением вектора по ортам координатных осей.***

Числа a_x, a_y, a_z называются ***координатами вектора*** $\bar{a}$, т. е. координаты вектора есть его проекции на соответствующие координатные оси.

Векторное равенство (3) часто записывают в символическом виде: $\bar{a} = (a_x; a_y; z_z)$.

Зная проекции вектора $\bar{a}$, можно легко найти выражение для модуля вектора. На основании теоремы о длине диагонали прямоугольного параллелепипеда можно написать $|\overline{OM}|^2 = |\overline{OM_1}|^2 + |\overline{OM_2}|^2 + |\overline{OM_3}|^2$, т. е.

$$|\bar{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2. \tag{4}$$

Отсюда

$$\boxed{|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},}$$

т. е. ***модуль вектора равен квадратному корню из суммы квадратов его проекций на оси координат.***

НАПРАВЛЯЮЩИЕ КОСИНУСЫ ВЕКТОРА

Пусть углы вектора $\bar{a}$ с осями Ox, Oy и Oz соответственно равны α, β, γ. По свойству проекции вектора на ось, имеем

$$a_x = |\bar{a}| \cdot \cos\alpha, \quad a_y = |\bar{a}| \cdot \cos\beta, \quad a_z = |\bar{a}| \cdot \cos\gamma. \tag{5}$$

Или, что то же самое,

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}.$$

Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются ***направляющими косинусами* вектора** $\bar{a}$.

Подставим выражения (5) в равенство (4), получаем

$$|\bar{a}|^2 = |\bar{a}|^2 \cdot \cos^2\alpha + |\bar{a}|^2 \cdot \cos^2\beta + |\bar{a}|^2 \cdot \cos^2\gamma.$$

Сократив на $|\bar{a}|^2 \neq 0$, получим соотношение

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,}$$

т. е. ***сумма квадратов направляющих косинусов ненулевого вектора равна единице***.

Легко заметить, что координатами единичного вектора $\bar{e}$ являются числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, т. е. $\bar{e} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$.

ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕКТОРАМИ, ЗАДАННЫМИ ПРОЕКЦИЯМИ

Пусть векторы $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$ заданы своими проекциями на оси координат Ox, Oy, Oz или, что то же самое

$$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}, \quad \bar{b} = b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_z \cdot \bar{k}.$$

Линейные операции над векторами

Так как линейные операции над векторами сводятся к соответствующим линейным операциям над проекциями этих векторов, то можно записать:

1. $\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x)\bar{i} + (a_y \pm b_y)\bar{j} + (a_z \pm b_z)\bar{k}$, или кратко $\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z)$. То есть *при сложении (вычитании) векторов их одноименные координаты складываются (вычитаются).*

2. $\lambda\bar{a} = \lambda a_x \cdot \bar{i} + \lambda a_y \cdot \bar{j} + \lambda a_z \cdot \bar{k}$ или короче $\lambda\bar{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z)$. То есть *при умножении вектора на скаляр координаты вектора умножаются на этот скаляр.*

Равенство векторов

Из определения вектора как направленного отрезка, который можно передвигать в пространстве параллельно самому себе, следует, что *два вектора* $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ *равны* тогда и только тогда, когда выполняются равенства: $a_x = b_x$, $a_y = b_y$, $a_z = b_z$, т. е.

$$\boxed{\bar{a} = \bar{b} \iff \begin{cases} a_x = b_x, \\ a_y = b_y, \\ a_z = b_z. \end{cases}}$$

Коллинеарность векторов

Выясним условия коллинеарности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, заданных своими координатами.

Так как $\bar{a} \parallel \bar{b}$, то можно записать $\bar{a} = \lambda \cdot \bar{b}$, где λ — некоторое число. То есть

$$a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k} = \lambda(b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_z \cdot \bar{k}) = \lambda b_x \cdot \bar{i} + \lambda b_y \cdot \bar{j} + \lambda b_z \cdot \bar{k}.$$

Отсюда

$$a_x = \lambda b_x, \quad a_y = \lambda b_y, \quad a_z = \lambda b_z,$$

т. е.

$$\frac{a_x}{b_x} = \lambda, \quad \frac{a_y}{b_y} = \lambda, \quad \frac{a_z}{b_z} = \lambda \quad \text{или} \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Таким образом, *проекции коллинеарных векторов пропорциональны*. Верно и обратное утверждение: векторы, имеющие пропорциональные координаты, коллинеарны.

ПРИМЕР

При каких значениях α и β векторы $\bar{a} = -2\bar{i} + 3\bar{j} + \alpha\bar{k}$ и $\bar{b} = \beta\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}$ коллинеарны?

Так как $\bar{a} \parallel \bar{b}$, то $-\frac{2}{\beta} = \frac{3}{-6} = \frac{\alpha}{2}$

Отсюда находим, что $\alpha = -1$, $\beta = 4$.

Координаты точки

Пусть в пространстве задана прямоугольная декартова система координат $Oxyz$. Для любой точки M координаты вектора $\overline{OM}$ называются *координатами точки* M. Вектор $\overline{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M, обозначается $\bar{r}$, т. е. $\overline{OM} = \bar{r}$. Следовательно, координаты точки — это координаты ее радиус-вектора

$$\bar{r} = (x; y; z) \quad \text{или} \quad \bar{r} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}.$$

Координаты точки M записываются в виде $M(x; y; z)$.

Координаты вектора

Найдем координаты вектора $\bar{a} = \overline{AB}$, если известны координаты точек $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$. Имеем (см. рис. 13):

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (x_2 \cdot \bar{i} + y_2 \cdot \bar{j} + z_2 \cdot \bar{k}) - (x_1 \cdot \bar{i} + y_1 \cdot \bar{j} + z_1 \cdot \bar{k}) =$$
$$= (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}.$$

Следовательно, *координаты вектора равны разностям соответствующих координат его конца и начала:* $\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

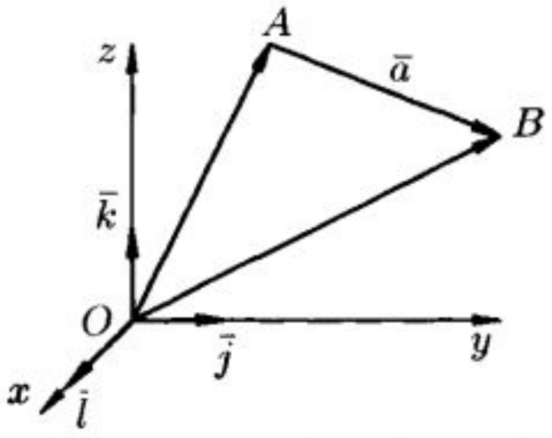


Рис. 13

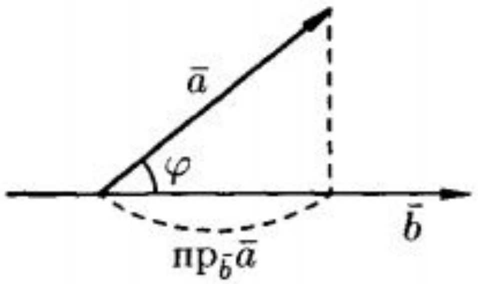


Рис. 14

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ И ЕГО СВОЙСТВА

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется ***число***, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Обозначается $\bar{a}\bar{b}$, $\bar{a}\cdot\bar{b}$ (или $(\bar{a},\bar{b})$). Итак, по определению,

$$\boxed{\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi,} \qquad (1)$$

где $\varphi = (\widehat{\bar{a},\bar{b}})$.

Формуле (1) можно придать иной вид. Так как $|\bar{a}|\cos\varphi = \text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a}$, (см. рис. 14), а $|\bar{b}|\cos\varphi = \text{пр}_{\bar{a}}\,\bar{b}$, то получаем:

$$\boxed{\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}|\cdot\text{пр}_{\bar{a}}\,\bar{b} = |\bar{b}|\cdot\text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a},} \qquad (2)$$

т. е. скалярное произведение двух векторов равно модулю одного из них, умноженному на проекцию другого на ось, сонаправленную с первым вектором.

СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

1. Скалярное произведение обладает переместительным свойством: $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$.

❏ $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$, а $\bar{b}\bar{a} = |\bar{b}| \cdot |\bar{a}| \cdot \cos(\widehat{\bar{b}, \bar{a}})$. И так как $|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| = |\bar{b}| \cdot |\bar{a}|$, как произведение чисел и $\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \cos(\widehat{\bar{b}, \bar{a}})$, то $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$. ■

2. Скалярное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя: $(\lambda\bar{a}) \cdot \bar{b} = \lambda(\bar{a}\bar{b})$.

❏ $(\lambda\bar{a})\bar{b} = |\bar{b}| \cdot \text{пр}_{\bar{b}}\, \lambda\bar{a} = \lambda \cdot |\bar{b}| \cdot \text{пр}_{\bar{b}}\, \bar{a} = \lambda(\bar{a}\bar{b})$. ■

3. Скалярное произведение обладает распределительным свойством: $\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}$.

❏ $\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) = |\bar{a}| \cdot \text{пр}_{\bar{a}}(\bar{b} + \bar{c}) = |\bar{a}| \cdot (\text{пр}_{\bar{a}}\, \bar{b} + \text{пр}_{\bar{a}}\, \bar{c}) = |\bar{a}|\, \text{пр}_{\bar{a}}\, \bar{b} + |\bar{a}| \cdot \text{пр}_{\bar{a}}\, \bar{c} =$ $= \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}$. ■

4. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины: $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$.

❏ $\bar{a}^2 = \bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}| \cdot |\bar{a}| \cos 0 = |\bar{a}| \cdot |\bar{a}| = |\bar{a}|^2$. ■

В частности: $\bar{i}^2 = \bar{j}^2 = \bar{k}^2 = 1$.

Если вектор $\bar{a}$ возвести скалярно в квадрат и затем извлечь корень, то получим не первоначальный вектор, а его модуль $|\bar{a}|$, т. е. $\sqrt{\bar{a}^2} = |\bar{a}|$ $(\sqrt{\bar{a}^2} \neq \bar{a})$.

Пример 1. Найти длину вектора $\bar{c} = 3\bar{a} - 4\bar{b}$, если $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 3$, $(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \frac{\pi}{3}$.

❍ Решение:

$$|\bar{c}| = \sqrt{\bar{c}^2} = \sqrt{(3\bar{a} - 4\bar{b})^2} = \sqrt{9\bar{a}^2 - 24\bar{a}\bar{b} + 16\bar{b}^2} =$$

$$= \sqrt{9 \cdot 4 - 24 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + 16 \cdot 9} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}. \quad ●$$

5. Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (ненулевые) взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю, т. е. если $\bar{a} \perp \bar{b}$, то $\bar{a}\bar{b} = 0$. Справедливо и обратное утверждение: если $\bar{a}\bar{b} = 0$ и $\bar{a} \neq \bar{0} \neq \bar{b}$, то $\bar{a} \perp \bar{b}$.

❑ Так как $\varphi = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \frac{\pi}{2}$, то $\cos\varphi = \cos\frac{\pi}{2} = 0$. Следовательно, $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot 0 = 0$. Если же $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ и $|\bar{a}| \neq 0$, $|\bar{b}| \neq 0$, то $\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = 0$. Отсюда $\varphi = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = 90°$, т. е. $\bar{a} \perp \bar{b}$. В частности:

$$\bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{j} \cdot \bar{k} = \bar{k} \cdot \bar{i} = 0. \quad ■$$

5. Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (ненулевые) взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю, т. е. если $\bar{a} \perp \bar{b}$, то $\bar{a}\bar{b} = 0$. Справедливо и обратное утверждение: если $\bar{a}\bar{b} = 0$ и $\bar{a} \neq \bar{0} \neq \bar{b}$, то $\bar{a} \perp \bar{b}$.

❑ Так как $\varphi = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \frac{\pi}{2}$, то $\cos\varphi = \cos\frac{\pi}{2} = 0$. Следовательно, $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot 0 = 0$. Если же $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ и $|\bar{a}| \neq 0$, $|\bar{b}| \neq 0$, то $\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = 0$. Отсюда $\varphi = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = 90°$, т. е. $\bar{a} \perp \bar{b}$. В частности:

$$\bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{j} \cdot \bar{k} = \bar{k} \cdot \bar{i} = 0. \qquad \blacksquare$$

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ, ЗАДАННЫХ В КООРДИНАТНОЙ ФОРМЕ

Пусть заданы два вектора

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} \quad \text{и} \quad \bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}.$$

Найдем скалярное произведение векторов, перемножая их как многочлены (что законно в силу свойств линейности скалярного произведения) и пользуясь таблицей скалярного произведения векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$:

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	1	0	0
$\bar{j}$	0	1	0
$\bar{k}$	0	0	1

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k})\cdot(b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}) =$$

$$\begin{aligned}
= \quad & a_xb_x\bar{i}\bar{i} + a_xb_y\bar{i}\bar{j} + a_xb_z\bar{i}\bar{k} + \\
+ \quad & a_yb_x\bar{j}\bar{i} + a_yb_y\bar{j}\bar{j} + a_yb_z\bar{j}\bar{k} + \\
+ \quad & a_zb_x\bar{k}\bar{i} + a_zb_y\bar{k}\bar{j} + a_zb_z\bar{k}\bar{k} =
\end{aligned}$$

$$= a_xb_x + 0 + 0 + 0 + a_yb_y + 0 + 0 + 0 + a_zb_z,$$

т. е.

$$\boxed{\bar{a}\cdot\bar{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.}$$

Итак, *скалярное произведение векторов равно сумме произведений их одноименных координат.*

***Пример* 2.** Доказать, что диагонали четырехугольника, заданного координатами вершин $A(-4;-4;4)$, $B(-3;2;2)$, $C(2;5;1)$, $D(3;-2;2)$, взаимно перпендикулярны.

○ Решение: Составим вектора $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$, лежащие на диагоналях данного четырехугольника. Имеем: $\overline{AC} = (6;9;-3)$ и $\overline{BD} = (6;-4;0)$. Найдем скалярное произведение этих векторов:

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = 36 - 36 - 0 = 0.$$

Отсюда следует, что $\overline{AC} \perp \overline{BD}$. Диагонали четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. ●

ПРИЛОЖЕНИЯ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Угол между векторами

Определение угла φ между ненулевыми векторами $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}, \quad \text{т. е.} \quad \cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Отсюда следует условие перпендикулярности ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\bar{a} \perp \bar{b} \iff a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

Проекция вектора на заданное направление

Нахождение проекции вектора $\bar{a}$ на направление, заданное вектором $\bar{b}$, может осуществляться по формуле

$$\text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} \quad \left(\text{пр}_{\bar{a}}\,\bar{b} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}|}\right), \qquad \text{т. е.} \qquad \text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

ПРИМЕР 1.

Даны вершины треугольника $A(2;3;-1)$, $B(4;1;-2)$ и $C(1;0;2)$.
Найти:

а) внутренний угол при вершине C;

б) $\text{пр}_{\overline{CA}}\overline{CB}$.

а) Угол φ при вершине C есть угол между векторами $\overline{CB}$ и $\overline{CA}$. Определим координаты этих векторов:

$$\overline{CB} = (4-1; 1-0; -2-2) = (3;1;-4),$$

$$\overline{CA} = (2-1; 3-0; -1-2) = (1;3;-3).$$

Найдем их модули:

$$|\overline{CB}| = \sqrt{9+1+16} = \sqrt{26}, \quad |\overline{CA}| = \sqrt{1+9+9} = \sqrt{19}.$$

Согласно формуле

$$\cos\varphi = \frac{\overline{CB}\cdot\overline{CA}}{|\overline{CB}|\cdot|\overline{CA}|} = \frac{3\cdot 1 + 1\cdot 3 + (-4)\cdot(-3)}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{19}} = \frac{18}{\sqrt{494}},$$

$$\varphi = \arccos\frac{18}{\sqrt{494}}.$$

б) Согласно формуле

$$\text{пр}_{\overline{CA}}\overline{CB} = \frac{\overline{CB}\cdot\overline{CA}}{|\overline{CA}|} = \frac{18}{\sqrt{19}}.$$

ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ И ЕГО СВОЙСТВА

Три некомпланарных вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, взятые в указанном порядке, образуют *правую тройку*, если с конца третьего вектора $\bar{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\bar{a}$ ко второму вектору $\bar{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки, и *левую*, если по часовой (см. рис. 16).

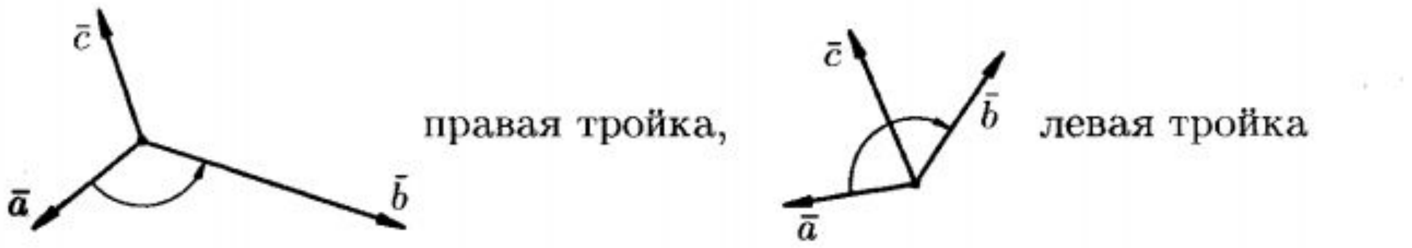


Рис. 16

Векторным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется *вектор* $\bar{c}$, который:

1) перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т. е. $\bar{c} \perp \bar{a}$ и $\bar{c} \perp \bar{b}$;

2) имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как на сторонах (см. рис. 17), т. е.

$$|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\varphi, \quad \text{где} \quad \varphi = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}});$$

3) векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют правую тройку.

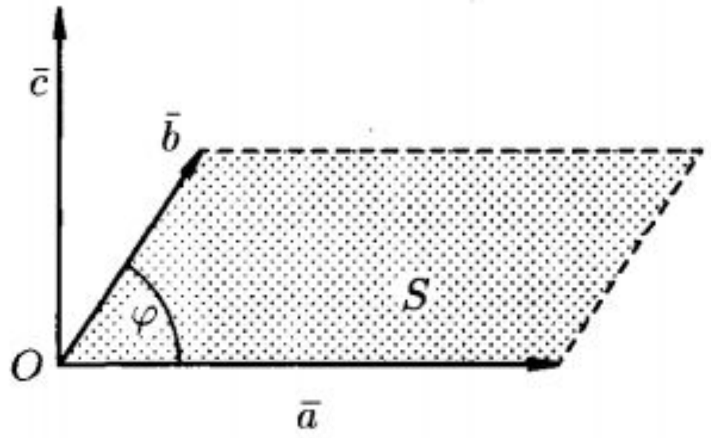


Рис. 17

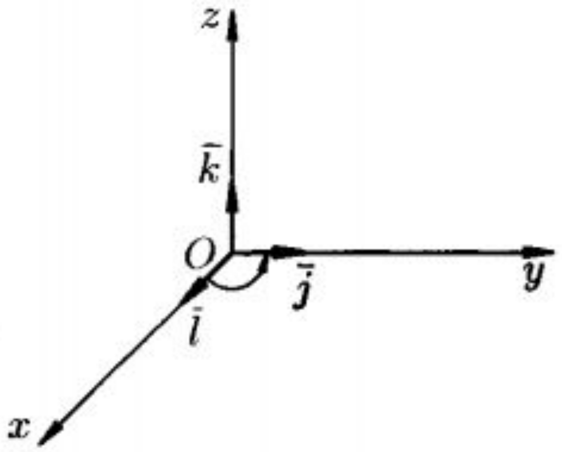


Рис. 18

Векторное произведение обозначается $\bar{a} \times \bar{b}$ или $[\bar{a}, \bar{b}]$.

Из определения векторного произведения непосредственно вытекают следующие соотношения между ортами $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ (см. рис. 18):

$$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}, \quad \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}, \quad \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}.$$

Докажем, например, что $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$.

1) $\bar{k} \perp \bar{i}$, $\bar{k} \perp \bar{j}$;

2) $|\bar{k}| = 1$, но $|\bar{i} \times \bar{j}| = |\bar{i}| \cdot |\bar{j}| \cdot \sin 90^\circ = 1$;

3) векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$ образуют правую тройку (см. рис. 16).

СВОЙСТВА ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

1. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак, т. е. $\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$ (см. рис. 19).

❑ Векторы $\bar{a} \times \bar{b}$ и $\bar{b} \times \bar{a}$ коллинеарны, имеют одинаковые модули (площадь параллелограмма остается неизменной), но противоположно направлены (тройки $\bar{a}, \bar{b}, \bar{a} \times \bar{b}$ и $\bar{a}, \bar{b}, \bar{b} \times \bar{a}$ противоположной ориентации). Стало быть, $\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$. ■

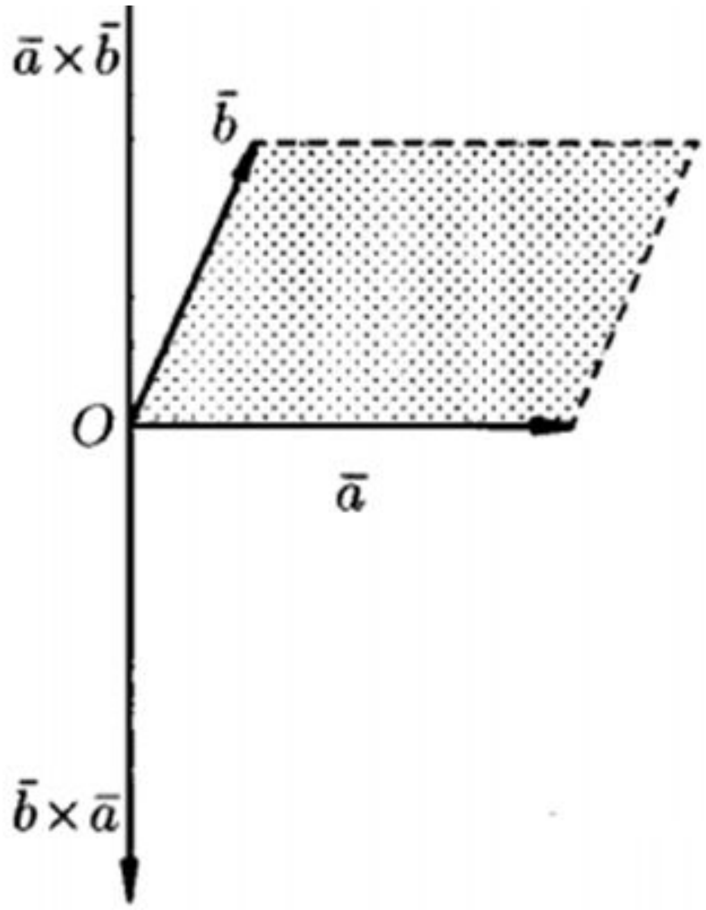


Рис. 19

2. Векторное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя, т. е. $\lambda(\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda\bar{b})$.

❑ Пусть $\lambda > 0$. Вектор $\lambda(\bar{a}\times\bar{b})$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Вектор $(\lambda\bar{a}) \times \bar{b}$ также перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (векторы $\bar{a}$, $\lambda\bar{a}$ лежат в одной плоскости). Значит, векторы $\lambda(\bar{a} \times \bar{b})$ и $(\lambda\bar{a}) \times \bar{b}$ коллинеарны. Очевидно, что и направления их совпадают. Имеют одинаковую длину:

$$|\lambda(\bar{a} \times \bar{b})| = \lambda|\bar{a} \times \bar{b}| = \lambda|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$$

и

$$|(\lambda\bar{a}) \times \bar{b}| = |\lambda\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin(\widehat{\lambda\bar{a}, \bar{b}}) = \lambda|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin(\bar{a}, \bar{b}).$$

Поэтому $\lambda(\bar{a} \times \bar{b}) = \lambda\bar{a} \times \bar{b}$. Аналогично доказывается при $\lambda < 0$. ■

3. Два ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору, т. е. $\bar{a} \parallel \bar{b} \iff \bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$.

❏ Если $\bar{a} \parallel \bar{b}$, то угол между ними равен $0°$ или $180°$. Но тогда $|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = 0$. Значит, $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$.

Если же $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$, то $|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\varphi = 0$. Но тогда $\varphi = 0°$ или $\varphi = 180°$, т. е. $\bar{a} \parallel \bar{b}$. ■

В частности, $\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = \bar{0}$.

4. Векторное произведение обладает распределительным свойством:

$$(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}.$$

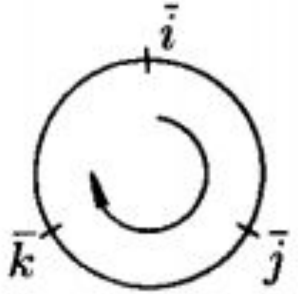
Примем без доказательства.

ВЫРАЖЕНИЕ ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЧЕРЕЗ КООРДИНАТЫ

Мы будем использовать таблицу векторного произведения векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$ и $\bar{k}$:

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	$\bar{0}$	$\bar{k}$	$-\bar{j}$
$\bar{j}$	$-\bar{k}$	$\bar{0}$	$\bar{i}$
$\bar{k}$	$\bar{j}$	$-\bar{i}$	$\bar{0}$

Чтобы не ошибиться со знаком, удобно пользоваться схемой:



если направление кратчайшего пути от первого вектора к второму совпадает с направлением стрелки, то произведение равно третьему вектору, если не совпадает — третий вектор берется со знаком «минус».

Пусть заданы два вектора $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$ и $\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$. Найдем векторное произведение этих векторов, перемножая их как многочлены (согласно свойств векторного произведения):

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}) \times (b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}) =$$

$$= a_xb_x(\bar{i} \times \bar{i}) + a_xb_y(\bar{i} \times \bar{j}) + a_xb_z(\bar{i} \times \bar{k}) + a_yb_x(\bar{j} \times \bar{i}) + a_yb_y(\bar{j} \times \bar{j}) +$$
$$+ a_yb_z(\bar{j} \times \bar{k}) + a_zb_x(\bar{k} \times \bar{i}) + a_zb_y(\bar{k} \times \bar{j}) + a_zb_z(\bar{k} \times \bar{k}) =$$

$$= \bar{0} + a_xb_y\bar{k} - a_xb_z\bar{j} - a_yb_x\bar{k} + \bar{0} + a_yb_z\bar{i} + a_zb_x\bar{j} - a_zb_y\bar{i} + \bar{0} =$$

$$= (a_yb_z - a_zb_y)\bar{i} - (a_xb_z - a_zb_x)\bar{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\bar{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \bar{k},$$

т. е.

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \bar{k}. \qquad (1)$$

Полученную формулу можно записать еще короче:

$$\boxed{\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},} \qquad (2)$$

так как правая часть равенства (1) соответствует разложению определителя третьего порядка по элементам первой строки. Равенство (2) легко запоминается.

ПРИЛОЖЕНИЯ ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Установление коллинеарности векторов

Если $\bar{a} \parallel \bar{b}$, то $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$ (и наоборот), т. е.

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \bar{0} \iff \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \iff \bar{a} \parallel \bar{b}.$$

Нахождение площади параллелограмма и треугольника

Согласно определению векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ $|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\varphi$, т. е. $S_{\text{пар}} = |\bar{a} \times \bar{b}|$. И, значит, $S_{\triangle} = \frac{1}{2}|\bar{a} \times \bar{b}|$.

ПРИМЕР 1.

Даны два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$, для которых $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 6$, $\varphi = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \frac{5}{6}\pi$. Найти

а) $\bar{a} \times \bar{b}$;

б) $|(2\bar{a} + 3\bar{b}) \times (\bar{a} - 4\bar{b})|$.

а) По формуле находим модуль векторного произведения: $|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = 2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 6$. По формуле получаем $\bar{a} \times \bar{b} = 6 \cdot \bar{e}$, где $\bar{e}$ — единичный вектор направления $\bar{a} \times \bar{b}$;

б) Согласно свойствам векторного произведения получаем:

$$(2\bar{a} + 3\bar{b}) \times (\bar{a} - 4\bar{b}) = 2(\bar{a} \times \bar{a}) - 8(\bar{a} \times \bar{b}) + 3(\bar{b} \times \bar{a}) - 12(\bar{b} \times \bar{b}) =$$
$$= -8(\bar{a} \times \bar{b}) - 3(\bar{a} \times \bar{b}) = -11(\bar{a} \times \bar{b}).$$

Следовательно,

$$|(2\bar{a} + 3\bar{b}) \times (\bar{a} - 4\bar{b})| = |-11(\bar{a} \times \bar{b})| = 11 \cdot |\bar{a} \times \bar{b}| = 11 \cdot 6 = 66.$$

ПРИМЕР 2.

Найти площадь треугольника с вершинами $A(1;2;0)$, $B(3;2;1)$, $C(-2;1;2)$.

Площадь S треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, т. е. $S = \frac{1}{2}|\overline{AB} \times \overline{AC}|$. Имеем: $\overline{AB} = (2;0;1)$, $\overline{AC} = (-3;-1;2)$. Тогда

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \right),$$

т. е. $\overline{AB} \times \overline{AC} = (1;-7;-2)$. Следовательно, $S = \frac{1}{2}\sqrt{1+49+4}$, $S = \frac{3\sqrt{6}}{2}$.

СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Рассмотрим произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, составленное следующим образом: $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$. Здесь первые два вектора перемножаются векторно, а их результат скалярно на третий вектор. Такое произведение называется *векторно-скалярным*, или *смешанным*, произведением трех векторов. Смешанное произведение представляет собой некоторое число.

Выясним геометрический смысл выражения $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$. Построим параллелепипед, ребрами которого являются векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ и вектор $\bar{d} = \bar{a} \times \bar{b}$ (см. рис. 22).

Имеем: $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{d} \cdot \bar{c} = |\bar{d}| \cdot \text{пр}_{\bar{d}}\, \bar{c}$, $|\bar{d}| = |\bar{a} \times \bar{b}| = S$, где S — площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, $\text{пр}_{\bar{d}}\, \bar{c} = H$ для правой тройки векторов и $\text{пр}_{\bar{d}}\, \bar{c} = -H$ для левой, где H — высота параллелепипеда. Получаем: $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = S \cdot (\pm H)$, т. е. $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \pm V$, где V — объем параллелепипеда, образованного векторами $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

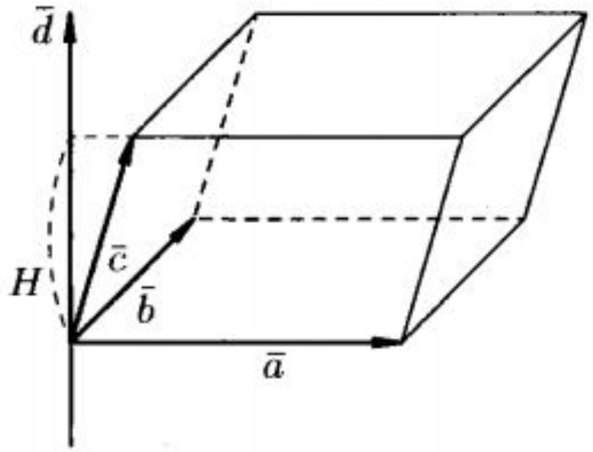


Рис. 22

Таким образом, смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком «плюс», если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком «минус», если они образуют левую тройку.

СВОЙСТВА СМЕШАННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

1. Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его сомножителей, т. е. $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = (\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{a} = (\bar{c} \times \bar{a}) \cdot \bar{b}$.

Действительно, в этом случае не изменяется ни объем параллелепипеда, ни ориентация его ребер.

2. Смешанное произведение не меняется при перемене местами знаков векторного и скалярного умножения, т. е. $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$.

Действительно, $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \pm V$ и $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{a} = \pm V$. Знак в правой части этих равенств берем один и тот же, так как тройки векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и $\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}$ — одной ориентации.

Следовательно, $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a}(\bar{b} \times \bar{c})$. Это позволяет записывать смешанное произведение векторов $(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c}$ в виде $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ без знаков векторного, скалярного умножения.

3. Смешанное произведение меняет свой знак при перемене мест любых двух векторов-сомножителей, т. е. $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{a}\bar{c}\bar{b}$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{b}\bar{a}\bar{c}$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{c}\bar{b}\bar{a}$.

Действительно, такая перестановка равносильна перестановке сомножителей в векторном произведении, меняющей у произведения знак.

4. Смешанное произведение ненулевых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ равно нулю тогда и только тогда, когда они компланарны.

❑ Если $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$, то $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ — компланарны.

Допустим, что это не так. Можно было бы построить параллелепипед с объемом $V \neq 0$. Но так как $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \pm V$, то получили бы, что $\bar{a}\bar{b}\bar{c} \neq 0$. Это противоречит условию: $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$.

Обратно, пусть векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ — компланарны. Тогда вектор $\bar{d} = \bar{a} \times \bar{b}$ будет перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, и, следовательно, $\bar{d} \perp \bar{c}$. Поэтому $\bar{d} \cdot \bar{c} = 0$, т. е. $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$. ■

ВЫРАЖЕНИЕ СМЕШАННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЧЕРЕЗ КООРДИНАТЫ

Пусть заданы векторы $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$, $\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$, $\bar{c} = c_x\bar{i} + c_y\bar{j} + c_z\bar{k}$. Найдем их смешанное произведение, используя выражения в координатах для векторного и скалярного произведений:

$$(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot (c_x\bar{i} + c_y\bar{j} + c_z\bar{k}) =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \bar{k} \right) \cdot (c_x\bar{i} + c_y\bar{j} + c_z\bar{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot c_z. \qquad (1)$$

Полученную формулу можно записать короче:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

так как правая часть равенства (1) представляет собой разложение определителя третьего порядка по элементам третьей строки.

ПРИЛОЖЕНИЯ СМЕШАННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Определение взаимной ориентации векторов в пространстве

Определение взаимной ориентации векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ основано на следующих соображениях. Если $\bar{a}\bar{b}\bar{c} > 0$, то $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ — правая тройка; если $\bar{a}\bar{b}\bar{c} < 0$, то $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – левая тройка.

Установление компланарности векторов

Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю ($\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$, $\bar{c} \neq \bar{0}$):

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0 \iff \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \iff \text{векторы } \bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c} \text{ компланарны.}$$

Определение объемов параллелепипеда и треугольной пирамиды

Нетрудно показать, что объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ вычисляется как $V = |\bar{a}\bar{b}\bar{c}|$, а объем треугольной пирамиды, построенной на этих же векторах, равен $V = \frac{1}{6}|\bar{a}\bar{b}\bar{c}|$.

Пример 1. Вершинами пирамиды служат точки $A(1;2;3)$, $B(0;-1;1)$, $C(2;5;2)$ и $D(3;0;-2)$. Найти объем пирамиды.

Решение: Находим векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$:

$$\bar{a} = \overline{AB} = (-1;-3;-2), \quad \bar{b} = \overline{AC} = (1;3;-1), \quad \bar{c} = \overline{AD} = (2;-2;-5).$$

Находим $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -1\cdot(-17) + 3\cdot(-3) - 2\cdot(-8) = 17 - 9 + 16 = 24.$$

Следовательно, $V = \frac{1}{6}\cdot 24 = 4$.