§5. Производные сложной и обратной функций

Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тогда $y = f(\varphi(x))$ – сложная функция с промежуточным аргументом u и независимым аргументом x.

Т е о р е м а 6. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную u_x' в точке x, а функция $y = f(u)$ имеет производную y_u' в соответствующей точке $u = \varphi(x)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную y_x' в точке x, равную: $y_x' = y_u' \cdot u_x'$.

Доказательство: Утверждение теоремы становится очевидным, если заметить, что

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y_u' \cdot u_x'.$$

При замене переменной в пределе мы воспользовались тем, что в силу непрерывности функции $u = \varphi(x)$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta u \to 0$, ч.т.д.

§5. Производные сложной и обратной функций (продолжение)

П р а в и л о вычисления производной сложной функции. **Для нахождения производной сложной функции** $y = f(\phi(x))$ **следует производную данной функции по промежуточному аргументу** $y_u' = f'(u)$ **умножить на производную** $u_x' = \phi'(x)$ **промежуточного аргумента по независимому аргументу**.

З а м е ч а н и е. Это правило остается в силе, если промежуточных аргументов, «вложенных» друг в друга, несколько. Так, если $y = f(u)$, где $u = \phi(v)$, $v = \psi(x)$, то

$$y_x' = f_x'(u(v(x))) = y_u' \cdot u_v' \cdot v_x'(x).$$

П р и м е р 4. Найти производную: $y = f(x) = (3x^2 + 1)^2$.

<u>Решение</u>: По правилу дифференцирования сложной функции имеем: $y' = ((3x^2 + 1)^2)' = 2 \cdot (3x^2 + 1) \cdot (3x^2 + 1)' =$
$= 2 \cdot (3x^2 + 1) \cdot 3 \cdot (x^2)' = 2 \cdot (3x^2 + 1) \cdot 3 \cdot 2 \cdot x = 12x \cdot (3x^2 + 1)$.

<u>Ответ</u>: $y' = ((3x^2 + 1)^2)' = 12x \cdot (3x^2 + 1)$.

§5. Производные сложной и обратной функций (продолжение)

Т е о р е м а 7. Если функция $y = f(x)$ строго монотонна на интервале $(a; b)$ и имеет отличную от нуля производную $f'(x)$ в каждой точке $x \in (a; b)$, то обратная ей функция $x = \varphi(y)$ также имеет производную $\varphi'(y)$ в соответствующей точке, равную: $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$, или $x_y' = \frac{1}{y'_x}$.

Доказательство: Рассмотрим обратную функцию $x = \varphi(y)$. Дадим аргументу y приращение $\Delta y \neq 0$. Ему соответствует приращение Δx обратной функции, причем $\Delta x \neq 0$ в силу строгой монотонности «прямой» функции $y = f(x)$. Поэтому $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$ (*).

Если $\Delta y \to 0$, то в силу непрерывности обратной функции приращение $\Delta x \to 0$. И так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$, то из (*) имеем:

$\varphi'(y) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}$, или $x_y' = \frac{1}{y'_x}$, ч.т.д.

§5. Производные сложной и обратной функций (продолжение)

П р а в и л о вычисления производной обратной функции. **Производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции.**

Правило дифференцирования обратной функции записывают также как

$$y_x{}' = \frac{1}{x'_y}, \qquad \text{или} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

П р и м е р 5. Найти производную данной функции $y = f(x)$ и функции, обратной к данной: $y = \sqrt[3]{x-1} = (x-1)^{1/3}$.

Решение: Функция $f(x)$ является строго монотонно возрастающей. Для вычисления обратной функции достаточно выразить x из уравнения $y = f(x)$: $x = \varphi(y) = y^3 + 1$. Тогда $x_y{}' = 3y^2$. Следовательно, $y_x{}' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3(x-1)^{2/3}}$.

Ответ: $x_y{}' = 3y^2$ и $y_x{}' = \frac{1}{3}(x-1)^{-2/3}$.

§7. Таблица производных

Выведенные выше правила дифференцирования, формулы производных основных элементарных функций выпишем в виде таблицы.

Правила дифференцирования

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
2. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$; в частности, $(c \cdot u)' = c \cdot u'$;
3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; в частности, $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c}{v^2}$;
4. $y_x' = y_u' \cdot u_x'$, если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$;
5. $y_x' = \frac{1}{x'_y}$, если $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$.

Формулы дифференцирования

1. $(c)' = 0$;
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in \mathbf{R}$;
3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$; в частности, $(e^x)' = e^x$;
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$; в частности, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

§7. Таблица производных (продолжение)

5. $(\sin x)' = \cos x$;
6. $(\cos x)' = -\sin x$;
7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
11. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;
12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

З а м е ч а н и е: Для вычисления производных большинства функций достаточно знать выписанные правила и формулы дифференцирования и строго придерживаться их при решении задач.