Модели распределения потоков

Загрузка транспортной сети определяется количеством транспортных средств или пассажиров, использующих для движения каждый элемент сети (дугу, поворот, перегон на маршруте общественного транспорта). Моделирование загрузки состоит в распределении межрайонных корреспонденций по конкретным путям, соединяющим пары районов. Входом к модели загрузки является матрица корреспонденций или в общем случае набор матриц, относящихся к передвижениям разных видов или разных пользовательских классов. Целью моделирования является определение для каждой пары районов прибытия-отправления

- набора путей, которые используются для передвижений между этими районами;
- коэффициентов расщепления (долей) корреспонденции между этими путями.

После расчета всей системы путей загрузка любого элемента сети может быть получена суммированием вкладов всех корреспонденций, использующих данный элемент. Таким образом, моделирование загрузки подразумевает более подробное описание движения, чем просто определение загрузки всех элементов. В иностранной литературе модели распределения корреспонденций по транспортной сети объединяются общим термином *traffic assignment*.

Существующие модели загрузки транспортной сети могут быть разбиты на классы по следующим основным признакам:

- модели, основанные на *нормативном* и *дескриптивном* подходе;
- *статические* и *динамические* модели.

В нормативных моделях распределение корреспонденций осуществляется на основе оптимизации некоторого глобального критерия эффективности работы транспортной сети. Таким критерием могут служить, например, суммарные затраты времени всеми участниками движения, суммарный пробег (авт*км или пасс*км) и др. При дескриптивном подходе предполагается, что структура транспортных потоков формируется в результате индивидуальных решений участников движения, основанных на оптимизации ими их личных критериев. Традиционно считается, что для моделирования загрузки реальных транспортных сетей следует применять дескриптивный подход. Нормативные модели могут применяться при планировании передвижений в тех случаях, когда планирующий орган имеет возможность директивного влияния на выбор маршрутов (например, при планировании централизованных грузовых перевозок). В последние годы, однако, интерес к нормативным моделям возрос в связи с началом разработки проектов о централизованном управлении движением частных автомобилей с использованием бортовых компьютеров и спутниковой связи.

Модель относится к классу *статических*, если загрузка моделируется в терминах усредненных характеристик движения на выбранный период моделирования (например, утренний час пик). В частности, если некоторая доля αF_{ij} корреспонденции использует выбранный маршрут движения, то предполагается, что эта доля дает вклад αF_{ij} в загрузку каждого элемента маршрута на протяжении всего периода моделирования. Такое предположение оправдано, если среднее время всех маршрутов не превышает характерное время, за которое сама корреспонденция успеет заметно поменяться. В случае, если динамика выезда меняется достаточно быстро, а маршруты достаточно длинные, необходимо учитывать, что представители той или иной корреспонденции загружают каждый участок избранного маршрута в разное время. При этом как сама корреспонденция, так и объемы прибытия-отправления в каждом районе должны задаваться как функции времени. Модели, в которые явно введен фактор времени и явно описывается динамика расчетных величин в течение периода моделирования, называют *динамическими.* [2]

[2] Термин *динамический* употребляется в транспортном моделировании в разных смыслах. Здесь имеются в виду динамические модели прогноза загрузки (dynamic assignment); их не следует смешивать с динамическими имитационными моделями, которые подробно рассматриваются в разделе 3. Также динамическими иногда называют модели, описывающие долговременную эволюцию транспортной сети.

Наиболее простым способом распределения корреспонденций по сети является наложение каждой корреспонденции на единственный оптимальный маршрут, соединяющий два района (метод «все или ничего»). Поскольку такой способ не учитывает естественного рассеяния, а также слишком чувствителен к характеристикам отдельных дуг графа, предложены различные способы расчета нескольких альтернативных путей и рассеивания корреспонденции по этим путям. Основная трудность таких моделей состоит в методике построения разумных альтернативных путей. В [124] предложена методика построения дерева *возможных путей* из всех узлов сети в некоторый фиксированный район прибытия. В соответствии с этим деревом происходит «ветвление» пути и рассеяние корреспонденции по возможным путям. Подобные методики, однако, не учитывают следующих важных факторов, влияющих на выбор путей движения.

- Выбор пути некоторыми пользователями увеличивает загрузку элементов сети, входящих в данных путь. В результате происходит увеличение обобщенной цены этих элементов. Это, в свою очередь, влияет на оценку и выбор путей другими пользователями. Таким образом, выбор, совершаемый одними участниками движения, косвенно влияет на выбор, совершаемый другими. Особенно важно учитывать этот фактор при расчете загрузки улично-дорожной сети, поскольку время движения на каждом элементе этой сети очень сильно зависит от загрузки элемента.

- Особенностью передвижений с использованием системы маршрутов общественного транспорта является то, что, начиная движение, пользователь может принимать решение не о конкретном пути, а скорее о стратегии своего поведения. Конкретное продолжение пути может в этом случае зависеть от посадок на тот или иной маршрут в процессе движения (попросту говоря от того, «какой автобус подойдет первым» в пересадочном узле).

Наиболее эффективной моделью, в полной мере учитывающей фактор взаимного влияния пользователей, является модель, основанная на поиске *равновесного распределения* (*user-equilibrium assignment*) [106, 91]. Модель, определяющая загрузку транспортной сети на основе расчета стратегий поведения, называется моделью *оптимальных стратегий* (*optimal strategy*) [97].

1. Модель равновесного распределения потоков

Рассмотрим статический вариант модели равновесного распределения. В модели предполагается, что все участники движения выбирают пути следования, исходя из минимизации индивидуальной обобщенной цены поездки. В результате индивидуальных выборов складываются значения интенсивности потока на всех элементах сети. Значения интенсивности, в свою очередь, являются главным фактором, определяющим обобщенную цену элементов и влияющим на критерии индивидуального выбора.

Предполагается, что в результате процесса «проб и ошибок» в системе устанавливается равновесное распределение потоков, обладающее следующими свойствами, известными как требования Вардрупа (Wardroop, [106]):

- все пути, соединяющие районы i и j, которые используются для движения представителями корреспонденции F_{ij}, имеют одинаковую цену;
- цена любого пути между районами i и j, который не используется для движения, превосходит цену используемых путей.

Модель равновесного распределения потоков

Суть этих свойств может быть кратко выражена в следующем предложении: при равновесном распределении ни один из участников движения не может изменить свой путь так, чтобы уменьшить свою индивидуальную цену поездки.

Математическая сложность задачи поиска равновесного распределения связана с тем, что эта задача не является задачей оптимизации, т.е. в формулировке отсутствует определение глобального критерия, минимум или максимум которого достигался бы на равновесном распределении. Можно показать, однако, что при некоторых дополнительных упрощающих предположениях эта задача может быть сведена к задаче оптимизации специально сконструированного глобального критерия.

Рассмотрим сначала задачу о распределении матрицы корреспонденций пользователей одного класса. Введем следующие обозначения:

I	множество узлов сети;
A	множество дуг сети;
A_i^-	множество дуг, входящих в узел $i \in I$;
A_i^+	множество дуг, выходящих из узла $i \in I$;
u_a	суммарный поток по дуге $a \in A$;
$u_{a_1a_2}$	суммарный поток на повороте с дуги $a_1 \in A$ на дугу $a_2 \in A$;
u_a^{pq}	поток по дуге $a \in A$ представителей корреспонденции F_{pq};
$u_{a_1a_2}^{pq}$	поток на повороте с дуги $a_1 \in A$ на дугу $a_2 \in A$ представителей корреспонденции F_{pq}.

Модель равновесного распределения потоков

Суммарные потоки на дугах и поворотах связаны с потоками представителей отдельных корреспонденций следующими соотношениями:

(16) $$u_a = \sum_{p,q\in R} u_a^{pq}, \quad u_{a_1 a_2} = \sum_{p,q\in R} u_{a_1 a_2}^{pq}, \quad a, a_1, a_2 \in A.$$

Имеют место также линейные соотношения, выражающие «закон сохранения пользователей в сети».

(17) $$u_{a_1}^{pq} = \sum_{a_2\in A_i^+} u_{a_1 a_2}^{pq},\ a_1 \in A_i^-, \quad u_{a_2}^{pq} = \sum_{a_1\in A_i^-} u_{a_1 a_2}^{pq},\ a_2 \in A_i^+, \quad i \in I, p, q \in R.$$

Данное равенство означает, что поток по каждой входящей в узел дуге равен сумме потоков поворотов с этой дуги (к повороту относится также и «движение прямо»), а поток по выходящей дуге равен сумме потоков поворотов на эту дугу, причем баланс должен соблюдаться для представителей каждой корреспонденции в отдельности. «Источниками» и «стоками» для участников движения являются районы прибытия-отправления:

(18) $$F_{pq} = \sum_{a\in A_p^+} u_a^{pq} = \sum_{a\in A_q^-} u_a^{pq}, \quad p, q \in R.$$

Введем также *ценовые функции*, т.е. функции, выражающие зависимость обобщенной цены от суммарного потока:

$c_a(u)$ ценовая функция дуги $a \in A$;
$c_{a_1 a_2}(u)$ ценовая функция поворота с дуги $a_1 \in A$ на дугу $a_2 \in A$.

Модель равновесного распределения потоков

Существенным для построения критерия является упрощающее предположение, что обобщенная цена является функцией от потока на данной дуге (повороте) и не зависит от потоков по другим дугам (например, пересекающим данную дугу). Ценовые функции предполагаются положительными неубывающими функциями потоков. По ценовым функциям можно построить *интегральные* ценовые функции по формулам:

$$C_a(u) = \int_0^u c_a(\nu)\,d\nu, \quad a \in A, \tag{19}$$

$$C_{a_1a_2}(u) = \int_0^u c_{a_1a_2}(\nu)\,d\nu, \quad a_1 \in A_i^-, a_2 \in A_i^+, i \in I. \tag{20}$$

Требуемый глобальный критерий строится как сумма интегральных ценовых функций всех дуг и поворотов. Таким образом, в принятых обозначениях модель равновесного распределения может быть сформулирована в виде задачи оптимизации [6]

$$\min_u F(u) = \sum_{a\in A} C_a(u_a) + \sum_{i\in I} \sum_{a_1\in A_i^-} \sum_{a_2\in A_i^+} C_{a_1a_2}(u_{a_1a_2}) \tag{21}$$

при системе линейных ограничений (16)-(18).

Модель равновесного распределения потоков

Интегральный критерий (21), применяемый для поиска равновесного распределения, является чисто математической конструкцией и не имеет содержательной интерпретации в транспортных терминах или терминах принятия решений. Строгое доказательство того, что минимизация этого критерия действительно приводит к равновесному распределению, можно найти, например, в [65]. Здесь приводится нестрогое рассуждение, позволяющее понять возникновение этого критерия.

Пусть задана некоторая функция от распределения потоков, представляющая собой сумму функций от потоков по каждой дуге:

$$F(u) = \sum C_a(u_a). \tag{22}$$

Рассмотрим распределение потоков, доставляющее минимум этой функции. Точка минимума любой функции обладает следующим свойством: при всякой вариации аргумента в этой точке изменение функции в линейном приближении неотрицательно. Рассмотрим простую вариацию распределения, состоящую в том, что малая доля δu потока снимается с одного из путей и перекладывается на альтернативный путь. Тогда изменение функции на каждой из дуг в линейном приближении равно $C'_a(u_a)(\pm\delta u)$. При этом на дугах исходного пути, где поток уменьшился, изменение отрицательно, а на дугах альтернативного пути положительно. Поскольку суммарное изменение должно быть неотрицательно, получаем, что сумма производных $C'_a(u_a)$ по дугам альтернативного пути не меньше, чем сумма производных по дугам исходного пути. Подберем функции $C_a(u_a)$ с тем расчетом, чтобы их производные давали значения цен дуг, как это сделано в (19)-(20). Тогда окажется, что в точке минимума суммарная цена альтернативного пути не меньше цены исходного пути, что и требуется условиями равновесного распределения.

Модель равновесного распределения потоков

Задача минимизации (16)-(21) может быть решена методом последовательных приближений, известном как метод Франка-Вульфа (Frank and Wolfe, [29]). Метод состоит в следующем: пусть на очередном k-м шаге итераций достигнуто некоторое распределение потоков $u^k = \left\{u_a^{pq}, u_{a_1a_2}^{pq}\right\}^k$. Линеаризуем целевую функцию в точке u^k и обозначим решение линеаризованной задачи u_L^k. Решение линеаризованной задачи используется для определения «направления смещения» при поиске очередного приближения, т.е. $(k+1)$-е приближение ищется в виде

$$u^{k+1} = (1 - \lambda)u^k + \lambda u_L^k, \quad 0 < \lambda < 1. \tag{23}$$

Величина λ определяет долю потоков, которая на очередном шаге итерации снимается с прежней системы путей и перекладывается на новую систему путей. Определение доли, которую следует перераспределить на каждом шаге, является отдельной задачей. Интересно отметить, что теоретически точное значение этой доли не важно для нахождения равновесного распределения. Именно, можно заранее задаться произвольной последовательностью долей λ_k, которые будут перераспределяться на каждом k-м шаге. Тогда, если выполнены простые условия

$$\lambda_k \longrightarrow 0, k \longrightarrow \infty, \quad \sum_k \lambda_k = \infty, \tag{24}$$

Модель равновесного распределения потоков

последовательность итераций сойдется к равновесному распределению. Смысл условий состоит в том, чтобы доли убывали (иначе распределение будет бесконечно колебаться вокруг равновесия), но «не слишком быстро» (иначе перераспределяемые доли станут слишком малы до того, как мы приблизимся к равновесию). Однако при неудачном выборе последовательности λ_k алгоритм может сходиться довольно медленно, поэтому предпочтительным является индивидуальный подбор перераспределяемой доли на каждом шаге. Наилучшее значение λ_k на каждом шаге можно получить, решив вспомогательную задачу оптимизации

$$\lambda_k = \arg\min_\lambda F(u(\lambda)), \quad u(\lambda) = (1-\lambda)u^k + \lambda u_L^k. \tag{25}$$

Задача (25) представляет собой общую задачу (21), «суженную» на одномерное направление, полученное на данном шаге итерации. Это — одномерная задача без ограничений, более того, целевая функция выпукла (это следует из монотонности ценовых функций), поэтому ее численное решение не составляет труда.

Рассмотрим теперь линеаризованную задачу (16)-(21). Дифференциал целевой функции в точке u^k имеет вид:

$$dF(u^k) = \sum_{a \in A} c_a(u_a^k)\, du_a + \sum_{i \in I} \sum_{a_1 \in A_i^-} \sum_{a_2 \in A_i^+} c_{a_1 a_2}(u_{a_1 a_2}^k)\, du_{a_1 a_2}. \tag{26}$$

Входящие в это выражение цены соответствуют распределению u^k и являются константами в этой задаче. Получаем, что линеаризованная задача заключается в отыскании распределения, при котором минимальна сумма постоянных (не зависящих от потоков) цен дуг и поворотов. Решение такой задачи совершенно очевидно: сумма цен будет минимальна, если каждую корреспонденцию наложить на единственный кратчайший путь, рассчитанный при этих ценах. Таким образом, для решения линеаризованной задачи не требуется применения численных методов линейной оптимизации, достаточно произвести расчет системы кратчайших путей. Для расчета кратчайших путей разработаны специальные эффективные алгоритмы [75, 114].

Первичными переменными в задаче являются потоки представителей отдельных корреспонденций $u_a^{pq}, u_{a_1a_2}^{pq}$, так как именно для этих переменных сформулированы ограничения. Однако целевая функция зависит только от суммарных потоков на дугах и поворотах $u_a, u_{a_1a_2}$. Далее, если для распределений u^k, u_L^k ограничения задачи выполнены, то они автоматически будут выполняться на решении одномерной задачи. Действительно, если перераспределяется фиксированная доля λ представителей каждой корреспонденции, то это приводит к перераспределению ровно той же доли суммарного потока на каждой дуге. Единственное место в алгоритме, где рассматриваются потоки представителей отдельных корреспонденций, это вычисление u_L^k путем наложения корреспонденций на кратчайшие пути. Сам способ такого вычисления гарантирует выполнение ограничений задачи. Таким образом, мы можем рассчитать равновесное распределение, оперируя только значениями суммарных потоков на дугах и поворотах, что значительно экономит оперативную память при компьютерных расчетах. Если для анализа свойств загрузки все же требуется знать полную раскладку корреспонденций по путям, можно организовать сохранение рассчитываемых путей на диске компьютера «по мере использования», т.е. не занимая оперативной памяти.

Модель равновесного распределения потоков

Окончательно получаем алгоритм вычисления равновесного распределения потоков:

- Формируется начальное распределение u^0. Самым простым способом для этого является распределение всех корреспонденций по кратчайшим путям, рассчитанным по незагруженной сети.

Последующие итерации алгоритма делаются следующим образом.

- Цены всех элементов сети пересчитываются в соответствии с полученными на данной итерации значениями потоков u^k.
- В соответствии с новыми ценами отыскивается система кратчайших путей между центрами въезда-выезда.
- Рассчитываются потоки u_L^k, которые получаются в результате наложения корреспонденций на кратчайшие пути (решение линеаризованной задачи).
- Новое распределение потоков рассчитывается по формуле $u^{k+1} = (1-\lambda)u^k + \lambda u_L^k$, где λ определяется решением одномерной задачи (25).

Рассмотрим теперь вопрос о критерии остановки алгоритма. Алгоритм должен заканчивать свою работу, если полученное на очередном шаге распределение «достаточно близко» к равновесному распределению. Если распределение уже находится в равновесии, то сумма всех цен на системе кратчайших путей в точности совпадет с суммой всех цен на самом распределении. Действительно, цены кратчайших путей в равновесии в точности равны ценам всех других используемых путей. Поэтому оценкой степени приближения к равновесию на каждом шаге может служить разность между суммой всех цен при достигнутом распределении и суммой всех цен по кратчайшим путям:

$$\left| \frac{\sum c(u^k)u^k - c(u^k)u_L^k}{\sum c(u^k)u^k} \right| < \varepsilon, \tag{27}$$

где подразумевается суммирование по всем дугам и поворотам (индексы для краткости опущены). Разность сумм цен отнесена к общей сумме цен, чтобы получить безразмерную характеристику сходимости.

Полезной при практических расчетах является следующая модификация начального шага алгоритма: корреспонденции расщепляются на фиксированное число долей и перед распределением очередной доли осуществляется пересчет кратчайших путей с учетом уже достигнутой загрузки. Полученное таким образом начальное распределение значительно ближе к равновесию, чем распределение всего объема корреспонденций на единственную систему кратчайших путей. Это приводит к значительному сокращению числа последующих итераций.

2. Расширенные модели равновесного распределения потоков

К числу наиболее важных расширений и направлений развития модели равновесного распределения относятся:

- модели равновесного распределения для нескольких классов пользователей;
- модели равновесного распределения с переменным спросом на поток;
- стохастические модели равновесного распределения;
- динамические модели равновесного распределения.

Модели *многопользовательского равновесия* позволяют находить равновесное распределение потоков в системе с несколькими классами пользователей. Напомним, что к разным классам пользователей относятся участники движения, для которых различается обобщенная цена одних и тех же элементов сети (слова «различается цена» относятся также и к ситуации, когда представителям одного из классов пользователей запрещено передвигаться по дуге; в этом случае можно говорить, что цена дуги «равна бесконечности»). Вследствие этого представители различных классов пользователей распределяются по разным путям. Предполагается, что для каждого класса пользователей вычислена отдельная матрица корреспонденций. При этом распределение пользователей разных классов не является независимым друг от друга, поскольку цены дуг и поворотов являются функциями суммарного потока на дуге (повороте). Следовательно, возникает проблема поиска равновесия в системе.

Расширенные модели равновесного распределения потоков

Поскольку транспортные средства, относящиеся к различным классам пользователей, могут давать разный вклад в общую загрузку (например, грузовые автомобили оказывают более существенное влияние на загрузку, чем легковые), суммарные потоки следует измерять в некоторых условных единицах (условных транспортных средствах). В эти же условные единицы должны быть переведены матрицы корреспонденций для всех классов пользователей. Сам вид функций задержки теоретически также может различаться для разных классов пользователей. Однако в модели многопользовательского равновесия действует следующее ограничение: на каждой дуге функции задержки для разных классов пользователей могут отличаться только на постоянную (не зависящую от суммарного потока) величину. Данное ограничение носит чисто математический характер: именно в таком предположении удается построить интегральный критерий, аналогичный (21), минимум которого достигается на равновесном распределении. Принято следующее «оправдание» такого ограничения: разные классы пользователей имеют разную скорость свободного движения, а затор «действует на всех одинаково».

Пусть M - множество классов пользователей. Обозначим через u_a^m поток по дуге a пользователей класса $m \in M$ и предположим, что ценовая функция для каждого класса пользователей имеет вид

$$c_a^m(u_a) = c_a(u_a) + d_a^m, \quad a \in A, m \in M, \tag{28}$$

где d_a^m - константы, определяющие разницу в задержке для разных классов при свободном движении. Тогда критерий в задаче многопользовательского равновесия запишется в виде:

$$\min_u F(u) = \sum_{a\in A} C_a(u_a) + \sum_{m\in M}\sum_{a\in A} d_a^m u_a^m. \tag{29}$$

Здесь для краткости опущены слагаемые, относящиеся к задержкам на поворотах. Алгоритм минимизации этого критерия вполне аналогичен описанному выше алгоритму в случае одного класса пользователей.

Модели равновесного распределения с *переменным спросом на поток* позволяют в рамках единого алгоритма отыскивать как само распределение, так и корреспонденции [6, 26, 31, 91]. Предположим, что объем корреспонденции между каждой парой районов прибытия и отправления задан в виде функции от транспортного расстояния, выраженного в обобщенной цене межрайонного передвижения:

$$F_{pq} = D_{pq}(c_{pq}). \tag{30}$$

Здесь c_{pq} - обобщенная цена передвижения из района q в район p, рассчитанная по кратчайшему пути. Если потоки в сети находятся в равновесном состоянии, то эта цена равна цене всех используемых путей, соединяющих два района. Данная функция называется *функцией спроса на передвижения*. Функция спроса может содержать параметры, характеризующие емкость районов по прибытию и отправлению, а также параметры, характеризующие наличие альтернативных возможностей передвижений (например, общественный транспорт). Основным требованием к этой функции является монотонное убывание (или, по крайней мере, невозрастание) при увеличении цены межрайонного передвижения.

Расширенные модели равновесного распределения потоков

В задаче поиска равновесного распределения с фиксированным спросом корреспонденции F_{pq} являются заданными константами. В задаче с переменным спросом они выступают как переменные величины, связанные с потоками по дугам u_a^{pq} соотношениями (18). Задача поиска равновесного распределения с переменным спросом формулируется так: найти такое распределение потоков, при котором для каждой пары районов прибытия и отправления цены всех используемых путем равны между собой и не превосходят цен всех других путей, соединяющих пару районов (т.е. выполнены условия обычного равновесного распределения), и в дополнение корреспонденции F_{pq} удовлетворяют соотношениям (30). Эта задача также может быть сведена к задаче минимизации глобального критерия следующего вида:

$$(31) \qquad \min_u F(u) = \sum_{a \in A} C_a(u_a) + \sum_{p,q \in R} \int_0^{F_{pq}} D_{pq}^{-1}(f)\, df.$$

Данный критерий совпадает с критерием (21) (для краткости опущено слагаемое, относящееся к поворотам), в котором добавлено слагаемое, содержащее интеграл от *обратной* функции спроса $D_{pq}^{-1}(f)$. Эта функция монотонно убывает с ростом корреспонденции, что гарантирует единственность решения.

Расширенные модели равновесного распределения потоков

Данная модель обладает математическим изяществом, однако, на наш взгляд, она не очень хороша для практического применения. В модели объемы корреспонденции представлены однородными величинами, жестко увязанными с единственным вариантом загрузки сети. В реальности загрузка меняется в течение суток (а также в зависимости от времени года), и на формирование корреспонденций влияют, очевидно, усредненные характеристики загрузки. Кроме того, сами корреспонденции существенно неоднородны по составу. Они являются суммами матриц передвижений, совершаемых с различными целями, при этом фактор обобщенных затрат по разному влияет на эти передвижения. Например, трудовые передвижения не так чувствительны к фактору времени, как передвижения, совершаемые «в магазин за продуктами». В целом задача вычисления матриц корреспонденций имеет много аспектов, не укладывающихся в процедуру поиска одномоментного равновесия.

Вместе с тем задача расчета корреспонденций не может быть полностью отделена от задачи распределения корреспонденций по сети. Действительно, существующие модели расчета корреспонденций среди прочих факторов учитывают межрайонные транспортные расстояния. Эти расстояния выражаются через обобщенные цены передвижений, которые, в свою очередь, зависят от загрузки. Для того, чтобы расчет был корректным, необходимо, чтобы обобщенные цены, используемые при расчете матриц, соответствовали тем ценам, которые получаются в результате распределения этих матриц по сети. Этого можно добиться при помощи итеративного процесса вычисления матриц и загрузки сети. На каждом шаге итерации для расчета матриц используются цены, полученные в результате расчета загрузки на предыдущем шаге. На первом шаге можно воспользоваться ценами, определяемыми по «пустой» сети. Итерации проводятся до тех пор, пока изменение общих показателей загрузки на шаге итерации не станет достаточно малым. В практических приложениях итеративный процесс стабилизируется (изменение общих показателей — менее одного процента) после 3-5 итераций с применением метода скользящего среднего.

Рассмотренные выше модели равновесия основаны на *детерминированном* поведении пользователей. Они предполагают, что пользователи имеют точное представление о потоках и задержках на всех дугах, одинаково оценивают пути и принимают точные решения при выборе путей. Однако в реальности поведение пользователей стохастично, т.е. содержит существенный элемент случайности. Для учета этой стохастичности была предложена модель *стохастического равновесного распределения* [22, 67]. Основная идея модели состоит в том, что в ней различается *фактическая* и *предполагаемая* тем или иным пользователем цена пути. Предполагаемую цену можно рассматривать как случайную величину, другими словами, разные пользователи случайным образом предполагают разную цену одной и той же дуги. Условие стохастического равновесия тогда формулируется так: распределение называется равновесным, если ни один из участников движения *не предполагает*, что может улучшить свою индивидуальную цену поездки, изменив путь следования.

Расширенные модели равновесного распределения потоков

Задача поиска стохастического равновесия может быть сведена к следующей задаче оптимизации [92]:

$$\min_u F(u) = \sum_{a \in A} u_a c_a(u_a) - \sum_{a \in A} C_a(u_a) - \sum_{p,q \in R} F_{pq} S_{pq}(u). \tag{32}$$

Здесь функции $S_{pq}(u)$ являются математическими ожиданиями предполагаемых цен передвижения между районами p и q, вычисленных при некотором распределении потоков u. Обозначим через K_{pq} набор альтернативных путей, соединяющих районы p и q, а через c_k^{pq} — фактическую цену пути $k \in K_{pq}$. Тогда предполагаемую цену можно представить в виде $\hat{c}_k^{pq} = c_k^{pq} + \xi_k^{pq}$, где ξ_k^{pq} — случайная величина с нулевым математическим ожиданием. Соответственно, математическое ожидание $M\hat{c}_k^{pq} = c_k^{pq}$. Тогда

$$S_{pq}(u) = M\left[\min_{k \in K_{pq}} \hat{c}_k^{pq}\right]. \tag{33}$$

Эта функция зависит от распределения u, поскольку фактические цены, при которых берется математическое ожидание, зависят от u.

Расширенные модели равновесного распределения потоков

Численное решение проблемы (32) значительно сложнее, чем соответствующей нестохастической проблемы. Основная трудность связана с тем, что для вычисления очередного приближения недостаточно знания суммарной загрузки, достигнутой на предыдущих шагах, но требуется явно использовать все межрайонные пути и цены, полученные в ходе итераций. Для решения применяют метод скользящего среднего по доле λ перераспределяемых на каждой итерации потоков [84].

В последние годы упор в совершенствовании моделей загрузки делается на развитие *динамических* моделей [30, 50, 10]. Добавление времени как дополнительной переменной чрезвычайно усложняет проблему. Речь идет не просто об увеличении размерности задачи, но и о трудностях в теоретическом определении базовых понятий, например, ценовой функции и самого равновесия [51]. Далее, для того, чтобы отслеживать точное время проезда по той или иной дуге вдоль пути, необходимо более детальное описание условий движения *внутри* дуги, т.е. применение некоторых имитационных моделей [18]. С учетом итеративного характера поиска равновесия даже при использовании простых имитационных моделей вычислительные ресурсы возрастают чрезвычайно. Подробное обсуждение этого направления выходит за рамки настоящего обзора, отметим только, что существующие на данный момент работы по *практическому* применению моделей динамического равновесия связаны с использованием суперкомпьютеров и систем с параллельными процессорами [19].

3. Модели оптимальных стратегий

Процесс формирования загрузки сети общественного транспорта имеет особенности, не характерные для загрузки сети автомобильного транспорта. Если пользователь сети УДС в ситуации равновесия использует оптимальный путь для своего движения до цели, то пользователь сети пассажирского транспорта может определить для себя *оптимальную стратегию поведения* в ходе движения к цели. Под стратегией поведения пассажира в сети общественного транспорта понимается набор правил, руководствуясь которыми в процессе своего движения, пользователь достигает точки назначения. Простейшим примером стратегии является следование априорно выбранному пути, что соответствует поведению участников движения в моделях равновесного распределения. Более сложные стратегии возникают, если пассажир в ходе движения принимает те или иные решения о продолжении своего пути в зависимости от информации, полученной в ходе движения. Например, решение, принимаемое в очередном пересадочном узле, может зависеть от того, какое транспортное средство будет отправляться из узла первым. Еще более сложные стратегии предусматривают, например, такую возможность: пассажир может принять решение сменить транспортное средство, увидев из окна автобуса, что есть возможность пересесть на автобус-экспресс, и др.

Модели оптимальных стратегий

Стандартная модель оптимальных стратегий исходит из упрощенного описания поведения пользователя. Согласно этой модели выбор стратегии достижения цели состоит в следующем:

- для каждого узла, в котором может оказаться пассажир в процессе движения к цели, среди всех возможных продолжений фиксируется некоторый выбранный набор. Будем говорить, что выбранные продолжения «включены в стратегию». Важно, что набор фиксируется «заранее», т.е. не в процессе движения, а на этапе выбора стратегии;

- оказавшись в том или ином узле, пользователь всегда выбирает то из продолжений, включенных в стратегию, которое первым предоставит возможность обслуживания (отправление транспортного средства).

Поскольку события прихода и отправления транспортных средств можно рассматривать как случайные события с некоторым законом распределения, то конкретные пути реализуются с той или иной вероятностью. Таким образом, модель оптимальных стратегий является изначально стохастической моделью.

Модели оптимальных стратегий

Для математического описания модели необходимо расширить транспортный граф до *маршрутного* графа. Маршруты общественного транспорта описываются дополнительными узлами и дугами. Будем называть узлы и дуги обычного графа базовыми узлами и дугами в маршрутном графе. Рассмотрим базовую дугу, по которой проходят k маршрутов общественного транспорта. Над каждой такой дугой размещается k маршрутных дуг, соответствующих поездке вдоль этой дуги на одном из маршрутов. Сама базовая дуга также входит в граф как дуга для пешеходного движения[3]. Для упрощения описания принимается, что остановки общественного транспорта всегда располагаются в узлах базового графа. Все маршрутные узлы, в которых делается остановка, соединяются с соответствующим базовым узлом условными дугами-посадками и высадками.

Данное выше определение стратегии может быть сформулировано в терминах маршрутного графа так: в каждом узле маршрутного графа среди всех исходящих дуг фиксируется некоторый набор дуг, включенных в стратегию. Попав в узел, пользователь может продолжить движение по одной из фиксированных дуг. Таким образом, задание стратегии эквивалентно заданию некоторого *подграфа* всего маршрутного графа. Будем называть этот подграф *графом стратегии*.

Модели оптимальных стратегий

Данное выше определение стратегии может быть сформулировано в терминах маршрутного графа так: в каждом узле маршрутного графа среди всех исходящих дуг фиксируется некоторый набор дуг, включенных в стратегию. Попав в узел, пользователь может продолжить движение по одной из фиксированных дуг. Таким образом, задание стратегии эквивалентно заданию некоторого *подграфа* всего маршрутного графа. Будем называть этот подграф *графом стратегии.*

Стратегия называется допустимой, если

- она не содержит *циклов*, т.е. двигаясь по дугам, включенным в стратегию, нельзя вернуться повторно в уже пройденный узел;
- она обеспечивает достижение цели, т.е. выбирая в каждом узле произвольную дугу, из числа включенных в стратегию, пользователь всегда за конечное число шагов попадет в целевой узел.

Для каждой дуги маршрутного графа заданы две характеристики:

c_a — обобщенная цена дуги, включающая, как всегда, среднее время движения по дуге и другие добавки, выраженные в условных минутах. Будем в дальнейшем говорить просто о времени.

f_a — *частота обслуживания.* Эта характеристика имеет смысл только для дуг-посадок. Она численно равна среднему количеству отправлений транспортных средств из данного узла по тому маршруту, на который осуществляется посадка. Величина $1/f_a$ — это средний интервал отправления.

Модели оптимальных стратегий

Для единообразия описания транспортного графа можно считать, что все дуги обладают этими двумя характеристиками. При этом частота обслуживания для всех дуг, не являющихся дугами-посадками, равна бесконечности. Соответственно, среднее время ожидания обслуживания на этих дугах равно нулю.

Предполагая, что время прибытия пассажира в узел распределено равномерно, а интервал отправления постоянный и равен $1/f_a$, получим, что среднее время движения по дуге, включая ожидание, равно $1/2f_a + c_a$. Зная обобщенную цену и частоту всех дуг, можно вычислить среднее время достижения цели от любого узла при использовании данной стратегии. Это можно сделать рекуррентно. Пусть k — номер целевого узла, t_i — среднее время достижения узла k из узла i при использовании данной стратегии. Очевидно, $t_k = 0$. Рассмотрим произвольный узел i. Возможные продолжения согласно выбранной стратегии — это дуги $a = (i, j) \in A_i^+$. Пусть t_j уже вычислено для всех конечных узлов этих дуг. Тогда среднее время t_i дается формулой

$$t_i = \left(1/2 + \sum f_a(c_a + t_j)\right) / \sum f_a. \tag{34}$$

Пользуясь этой рекуррентной формулой, можно вычислить среднее время для любого узла.

Модели оптимальных стратегий

Оптимальной стратегией для достижения цели k из узла i называется стратегия, при которой среднее время достижения цели из данного узла наименьшее среди всех допустимых стратегий. Среднее время в оптимальной стратегии можно также называть *потенциалом* узла i по отношению к узлу k.

Оптимальная стратегия обладает следующим важным свойством: оптимальная стратегия для любого узла отправления i одновременно является оптимальной стратегией и для всех промежуточных узлов j, которые могут встретиться при движении в соответствии с этой стратегией. Данное свойство вполне аналогично свойству Беллмана для кратчайших путей, согласно которому отрезок кратчайшего пути от некоторого промежуточного узла до конечного узла сам является кратчайшим путем от промежуточного узла. Действительно, если при добавлении или исключении из стратегии какой-либо исходящей дуги узла j потенциал этого узла уменьшается, то, очевидно, должны уменьшиться и потенциалы всех узлов, из которых можно попасть в узел j. Данное свойство позволяет определить одну стратегию для достижения цели k, являющуюся оптимальной сразу для всех узлов отправления. Действительно, пометим в каждом узле сети исходящие дуги, входящие в оптимальную стратегию для этого узла. Совокупность этих помеченных дуг, очевидно, определит оптимальную стратегию для всех узлов.

Для вычисления оптимальной стратегии (т.е. выделения подграфа в маршрутном графе) для произвольного целевого узла применяется алгоритм, аналогичный алгоритму послойного расширения при поиске кратчайших путей.

Модели оптимальных стратегий

Рассмотрим теперь задачу распределения корреспонденций F_{pq} по маршрутному графу. Предполагаем, что все участники движения (пассажиры) следуют оптимальным стратегиям. Поскольку цены и частоты дуг в модели оптимальных стратегий считаются постоянными, достаточно перебрать все районы прибытия q, для каждого из них вычислить оптимальную стратегию, распределить корреспонденции из всех других районов в данный район согласно этой стратегии, а получившиеся потоки сложить. Обозначим через u_i входящий поток в узел $i \in I$:

$$u_i = \sum_{a \in A_i^-} u_a. \tag{35}$$

Для районов отправления «входящим» потоком считается объем отправления: $u_p = F_{pq}$. Поток u_i распределяется по исходящим дугам, которые включены в оптимальную стратегию. Доля потока, распределенного на каждую исходящую дугу, пропорциональна вероятности того, что именно эта дуга первой предоставит возможность обслуживания. Тогда

$$u_a = u_i \, f_a / \sum f_b. \tag{36}$$

Модели оптимальных стратегий

Для экономии вычислений следует на этапе расчета стратегии запомнить список всех узлов сети (включая районы отправления), упорядоченный по потенциалу относительно района прибытия. Затем наложение потоков на исходящие дуги начинается с района отправления с наибольшим потенциалом и продолжается для всех узлов в порядке убывания потенциалов. При такой схеме гарантировано, что при переходе к очередному узлу i входящий в этот узел поток u_i будет уже вычислен. Повторяя процедуру распределения для всех центров прибытия, мы накапливаем суммарные потоки на всех дугах маршрутного графа.