

**Дифференциальными уравнениями** называются уравнения в которых содержатся производные неизвестных функций.

Если неизвестная функция зависит только от одной переменной, то уравнения называются **обыкновенными**.

$$y'' - xy' + y = 2 \ln x$$

Если неизвестная функция зависит от двух и более переменных, то уравнения называются дифференциальными уравнениями в частных производных .

$$x \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - y \frac{\partial z}{\partial x} = 2z$$

Порядок старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется **порядком** этого уравнения.

Дифференциальные уравнения первого порядка:

$$y' + xy^2 = \sin x, \quad xy'^3 + e^x = 5, \quad \ln(y'^2 + x^2) - x \operatorname{tg} y = ayx,$$

Порядок старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется **порядком** этого уравнения.

Дифференциальные уравнения первого порядка:

$$y' + xy^2 = \sin x, \quad xy'^3 + e^x = 5, \quad \ln(y'^2 + x^2) - x \operatorname{tg} y = ayx,$$

Дифференциальное уравнение второго порядка:

$$xy'' - y'^3 + 2xy = 0, \quad y''' + 5y'' + 6y = 2x.$$

Дифференциальное уравнение третьего порядка:

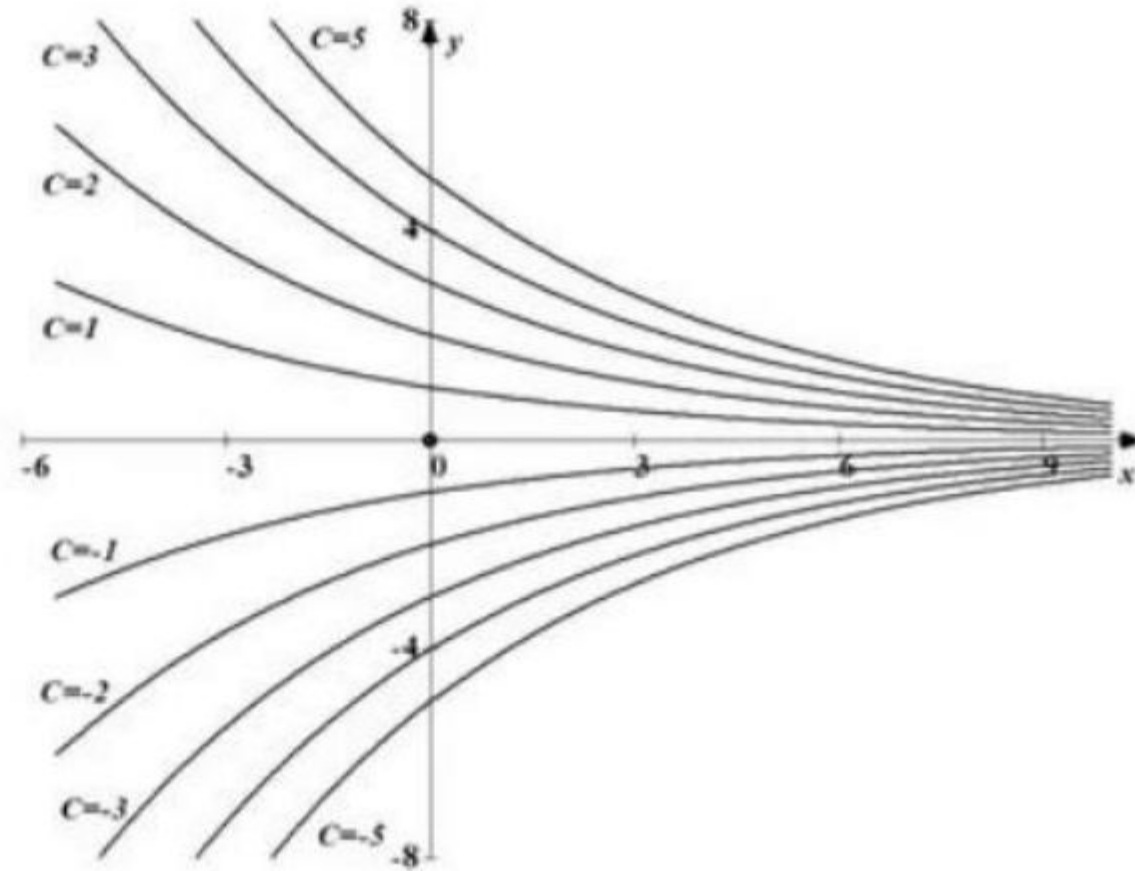
Обыкновенное дифференциальное уравнение  $n$ -порядка с одной неизвестной функцией  $y$  аргумента обычно записывают в виде

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

где  $F$  - известная функция своих аргументов.

**Решение дифференциального уравнения (ДУ) на промежутке  $X$  – функция  $y = \varphi(x)$ ,  $n$  раз дифференцируемая на нем, которая при подстановке ее в уравнение, обращает его в тождество на всем промежутке .**

График решения  $y = \varphi(x)$  ДУ -  
интегральная кривая этого уравнения



$$(\sin x + C)' = \cos x$$



$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

Процесс отыскания решений дифференциального уравнения называется **интегрированием этого уравнения.**

Если решение получено в неявной форме  $\Phi(x, y) = 0$ , то такое выражение называют **общим интегралом д.у.**



# **10.1. Дифференциальные уравнения первого порядка**

**ДУ первого порядка** записывается в виде:

$$F(x, y, y') = 0$$

$x$  - независимая переменная,  
 $y$  - его неизвестная функция,  
 $F$  - заданная функция трех переменных.

Если разрешить это уравнение относительно первой производной, получим **уравнение в нормальной форме**:

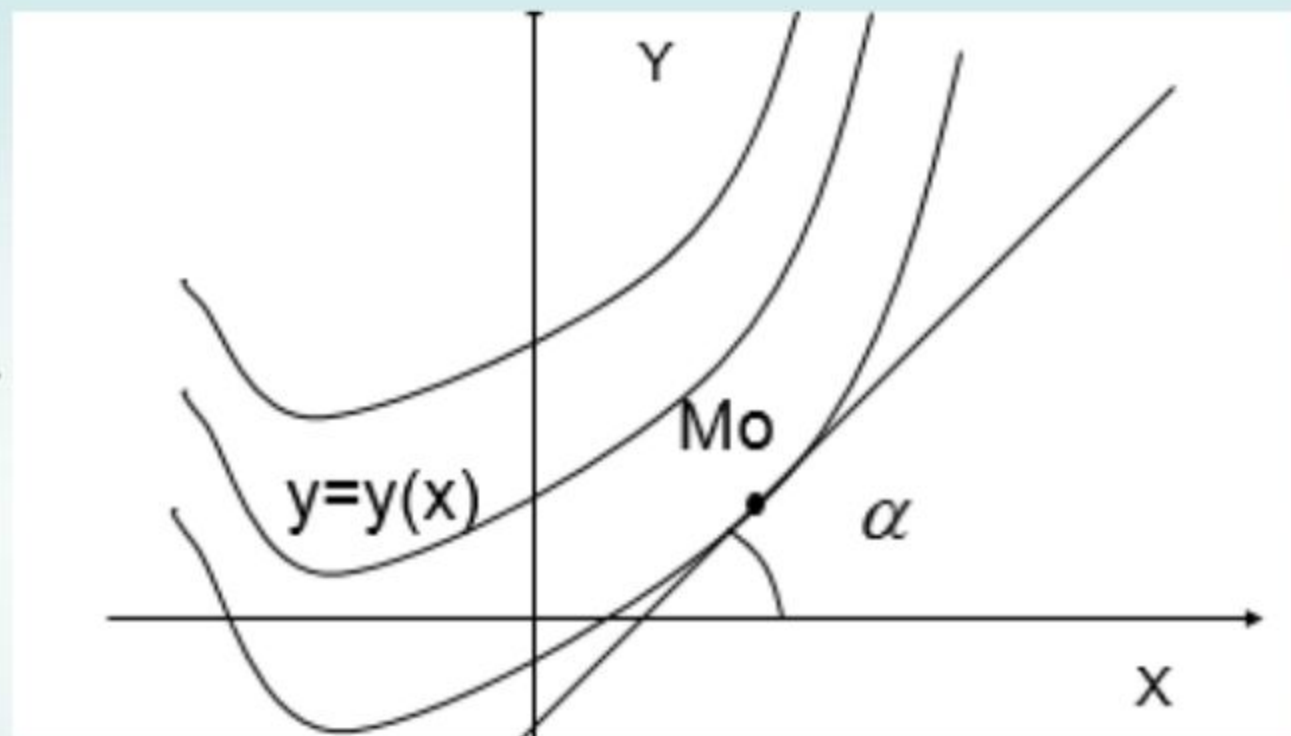
$$y' = f(x, y)$$

## Геометрическая интерпретация уравнения $y' = f(x, y)$ .

$$\operatorname{tg} \alpha = y'(x_0),$$

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0),$$

$$\operatorname{tg} \alpha = f(x_0, y_0).$$



Угол  $\alpha$  наклона касательной к интегральной кривой в любой ее точке определен правой частью заданного дифференциального уравнения.

## Задача Коши.

Найти решение  $y(x)$ , уравнения  $y' = f(x, y)$ ,  
удовлетворяющее дополнительному условию

$$y(x_0) = y_0,$$

где  $x_0$  и  $y_0$  любые числа, для которых определена функция  $f(x, y)$ .

Дополнительное условие называют **начальным условием**, числа  $x_0$  и  $y_0$  - **начальными значениями** решения уравнения  $y' = f(x, y)$ , а саму задачу - **задачей Коши** или **начальной задачей**.

С геометрической точки зрения задача Коши состоит в нахождении интегральной кривой, проходящей через заданную точку  $M(x_0, y_0)$ .

