

Угол между прямыми

Выполнили:
Ученицы 11 А класса
Преснякова Кристина
Голубчик Евгения
Малахова Татьяна

УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

Дан четырехугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найти угол между $C_1 D_1$ и $B F$, где F - середина CD ; ес. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $AD =$; $CD = AA_1 = \sqrt{2}$.

УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ:

- Углом между двумя пересекающимися прямыми называется наименьший из углов, образованных при пересечении прямых.
- Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся.
- Две прямые называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90° .
- Угол между параллельными прямыми считается равным нулю.

Задачу можно решить тремя способами:

1. Поэтапно-вычислительным методом

2. Координатным методом

3. Методом трех косинусов

ПОЭТАПНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ МЕТОД

При нахождении этим методом угла между прямыми m и l используют формулу:

$$\cos \varphi = \frac{|b^2 + c^2 - a^2|}{2bc}$$

где a и b — длины сторон треугольника ABC , соответственно параллельных этим прямым.

Далее:

РЕШЕНИЕ:

1) Проведем $ED \parallel BF$

2) В треугольнике C_1ED найдем прямую ED .

Треугольник AED – прямоугольный;
 $AE=EB$, т.к. $ED \parallel BF$ и F – середина CD .
 $AE=\sqrt{2}/2$, $AD=1/\sqrt{2}$.

По теореме Пифагора:

$$ED^2 = AE^2 + AD^2$$

$$ED^2 = 1/2 + 1/2 = 1$$

$$ED = 1$$

3) В треугольнике C_1CD .

По теореме Пифагора:

$$C_1D^2 = C_1C^2 + CD^2$$

$$C_1D^2 = 2 + 2 = 4$$

$$C_1D = 2$$

4) Проведем EC .

$C_1C \perp (ABCD)$,

EC принадлежит $(ABCD)$

Значит, $EC \perp C_1C$

$EC = ED$ (т.к. $AED = BCE$ по двум сторонам и углу между ними)

5) В прямоугольном треугольнике C_1CE :

$$C_1E^2 = EC^2 + C_1C^2$$

$$C_1E^2 = 1 + 2 = 3$$

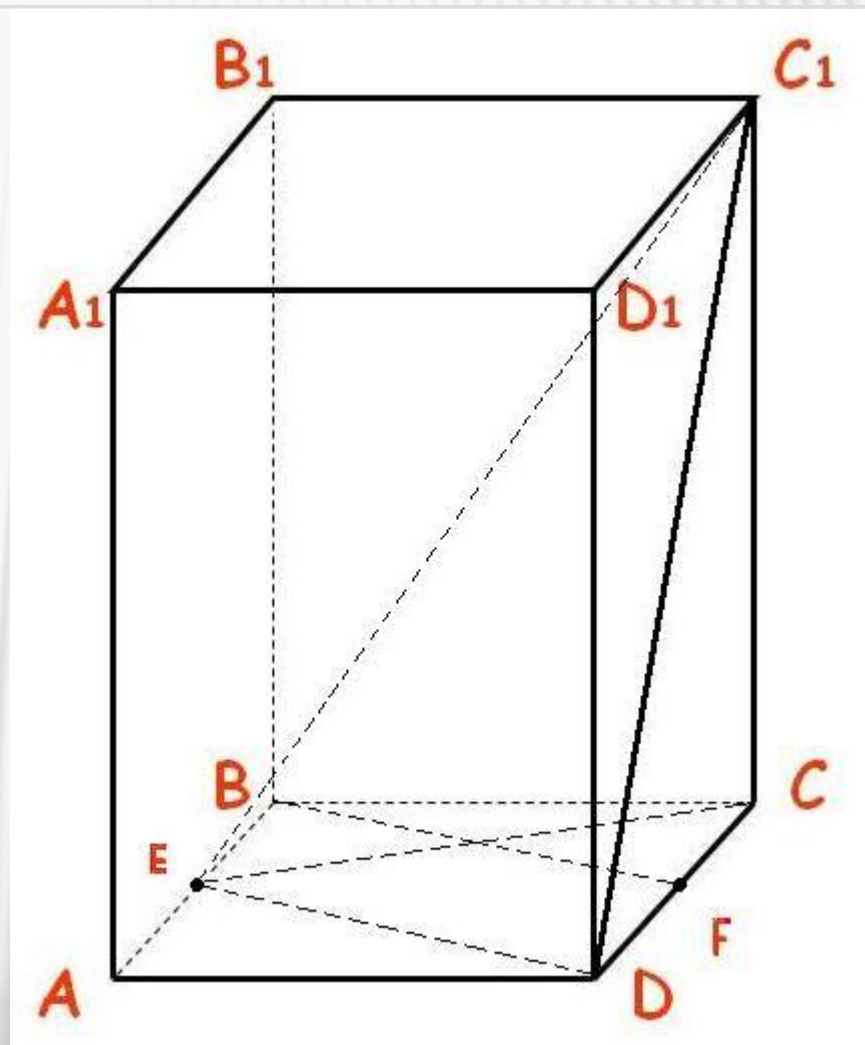
$$C_1E = \sqrt{3}$$

6) $\angle EDC_1$ – искомый

$$\cos \angle EDC_1 = \frac{ED^2 + C_1D^2 - C_1E^2}{2 \cdot ED \cdot C_1D} = \frac{1 + 4 - 3}{2 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$\angle EDC_1 = \arccos \frac{1}{2} = 60^\circ$$

Ответ: 60°



КООРДИНАТНЫЙ МЕТОД:

При нахождении угла между прямыми m и l используют формулу

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{q}|}{|\vec{p}| \cdot |\vec{q}|}$$

или в координатной форме:

$$\cos \varphi = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

где p и q - векторы, соответственно параллельные этим прямым; в частности, для того чтобы прямые m и l были перпендикулярны, необходимо и достаточно чтобы $p^*q = 0$.

Далее:

РЕШЕНИЕ:

1) $B(0;0;0)$

$F(1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}; 0)$

$C_1(0; 1/\sqrt{2}; \sqrt{2})$

$D(\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}; 0)$

2) вектор $DC_1\{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$

$|DC_1| = \sqrt{2+0+2}=2$

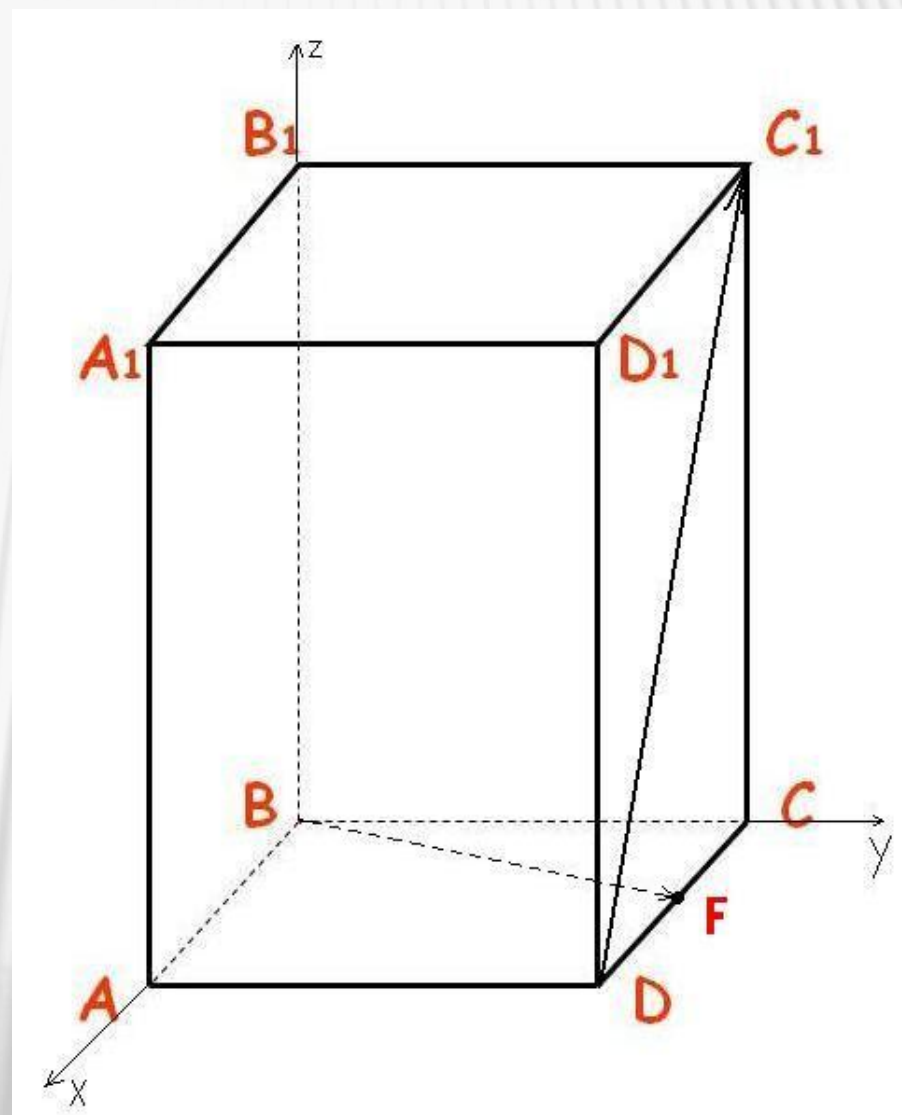
3) вектор $BF\{1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}; 0\}$

$|BF| = \sqrt{1/2+1/2}=1$

3) $\cos(\angle CD_1BF) = |-1+0+0|/2*1=1/2$

$\angle CD_1BF = \arccos 1/2 = 60^\circ$

Ответ: 60° .



МЕТОД ТРЁХ КОСИНУСОВ:

Соотношение $\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta$ называют теоремой Пифагора для трёхгранного угла или теоремой о трёх косинусах.

Чтобы найти \cos угла между скрещивающимися прямыми, нужно перемножить косинусы углов между данными прямыми и проекцией их на плоскость основания.

Далее:

РЕШЕНИЕ:

1) CD-проекция DC_1 на (ABC).

$$\cos \angle EDC_1 = \cos \angle BFC \cdot \cos \angle CDC_1$$

2) $\triangle CDC_1$ -равносторонний и прямоугольный.

По теореме Пифагора $CD=2$

$$\cos \angle CDC_1 = CD/DC_1 = \sqrt{2}/2$$

3) $\triangle BCF$.

$$BC=CF=1/\sqrt{2}$$

$\triangle BCF$ -прямоугольный

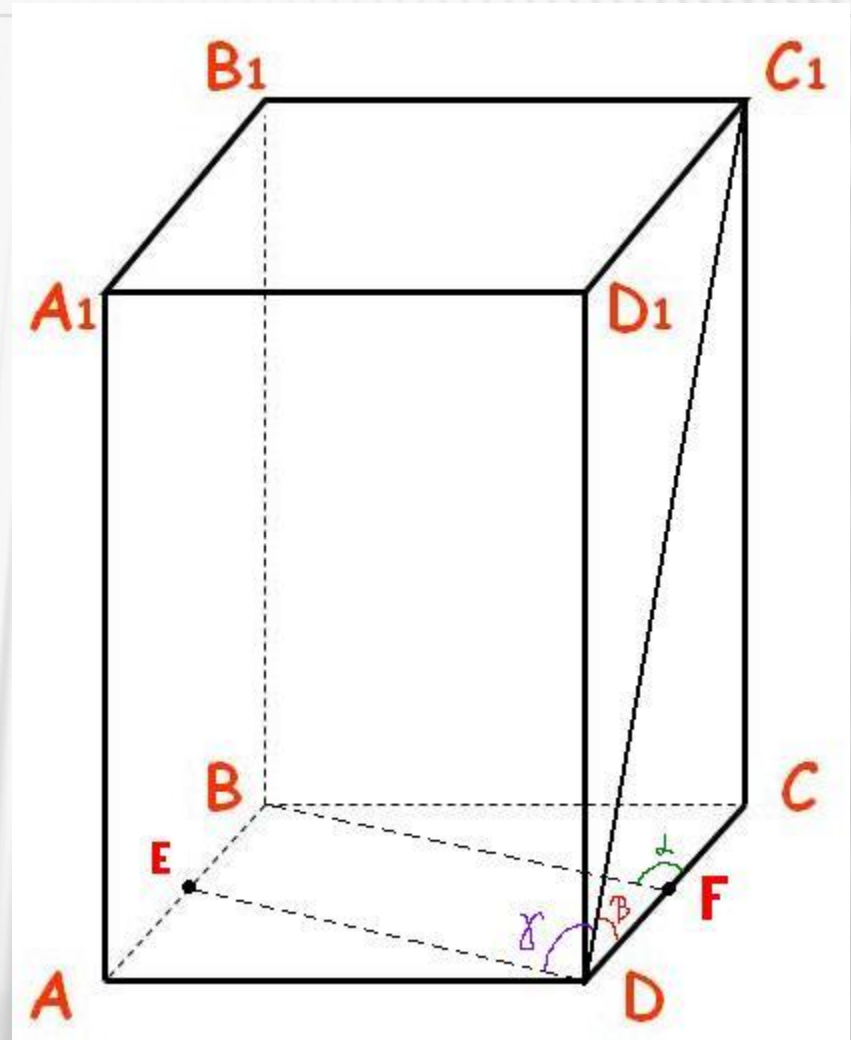
По теореме Пифагора $BF=1$

$$\cos \angle BFC = CF/BF = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$$

$$4) \cos \angle EDC_1 = \sqrt{2}/2 \cdot \sqrt{2}/2 = 1/2.$$

$$\angle EDC_1 = \arccos 1/2 = 60^\circ$$

Ответ: 60°



КОНЕЦ