Сочетания

Сочетания

- **Определение 1**
- Сочетанием из n элементов по k называется всякая совокупность попарно различных k элементов, выбранных каким-либо способом из данных n элементов.
- Другими словами k-сочетание – это k-элементное подмножество n элементного множества.
- **Пример**. Дано множество $A = \{a; b; c\}$.

Составим 2- сочетания: $\{a; b\}; \{a; c\}; \{b; c\}$

Сочетания

- **Теорема 1**
- Число k- сочетаний n-элементного множества вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- **Доказательство.** Из каждого k-сочетания, переставляя его элементы всевозможными способами, получим k! размещений. Значит,

$$k! \cdot C_n^k = A_n^k$$

- Отсюда $$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Пример

- Сколькими способами можно выбрать 3 плитки шоколада из имеющихся 5 плиток?
- **Решение.** Задача сводится к вычислению числа сочетаний из 5 по 3

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$$

Свойства сочетаний

1) $C_n^0 = C_n^n = 1$

Доказательство:

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

2) $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$

Доказательство:

$$C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{(n-1)!n}{(n-1)!} = n$$

$$C_n^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = \frac{(n-1)!n}{(n-1)!} = n.$$

Свойства сочетаний

3) $C_n^k = C_n^{n-k}$

Доказательство:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$\Rightarrow C_n^k = C_n^{n-k}$$

4) $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$

Доказательство:

$$C_{n+1}^{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$$

$$C_n^{k+1} + C_n^k = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!(n-k)+n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$$

Бином Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

Следствия из бинома Ньютона

1)Равенство $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$ получается из бинома Ньютона при

$a = b = 1.$

2) Равенство $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$ получается из бинома Ньютона при

$a = 1, b = -1.$

Сочетания с повторениями

Сочетание с повторениями

- **Определение 1**
- Сочетанием из n элементов по k называется всякая совокупность k элементов, выбранных каким-либо способом из данных n элементов.

- **Пример:** Дано множество А= $\{a;b;c\}$.

Составим 2- сочетания с повторениями:

$$[a;b];[b;c];[a;c];[a;a];[b;b];[c;c]$$

Число сочетаний с повторениями

- **Теорема1.** Число k-сочетание с повторениями n – элементного множества вычисляется по формуле

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Пример

- В магазине продаются пирожные 4 сортов. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?
- **Решение.** Используем формулу числа сочетаний с повторениями, так как покупка будет содержать пирожные повторяющихся сортов.

$$\overline{C}_4^7 = C_{4+7-1}^7 = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3} = 120.$$

Сводная таблица

	Порядок важен	Порядок не важен
С повторениями	$\overline{A}_n^k = n^k$ $\overline{P}(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$	$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$
Без повторений	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ $A_n^n = P_n = n!$	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$