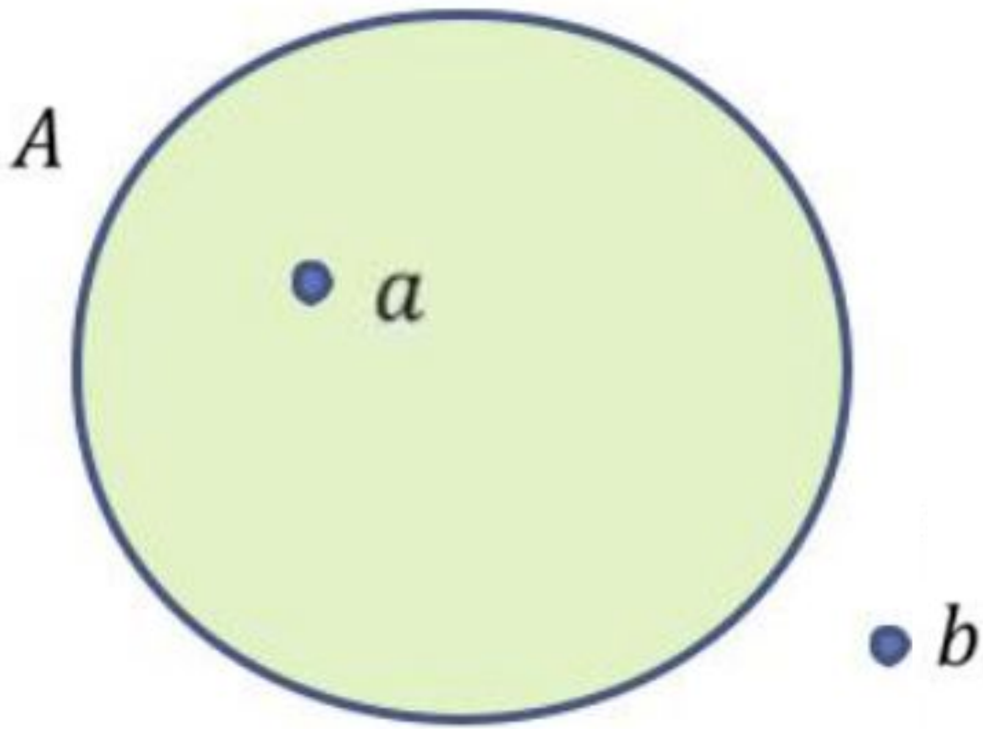
НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О МНОЖЕСТВАХ

- Множество – это объект, образованный за счет мысленного собирания в единое целое каких-либо предметов, в том числе, возможно, и самих множеств.
- Элементы множества обозначают буквами латинского алфавита $a, b, c, \ldots$, а сами множества – прописными буквами $A, B, C, \ldots$.
- Множество задано, если известно, из каких элементов (предметов) оно состоит.

- Пустое множество не содержит ни одного элемента и обозначается $\varnothing$.

- Запись $a \in A$ означает, что элемент a принадлежит множеству A .

- Множества изображают с помощью диаграмм Эйлера-Венна



$$a \in A$$
$$b \notin A$$

- Множества бывают конечные и бесконечные.

Примеры:

1) множество жителей г. Москвы конечное;

2) множество натуральных чисел бесконечное.

- Задание множеств осуществляется несколькими способами

1. Если множество содержит конечное число элементов и легко обозримо, оно может быть задано перечислением его элементов. Так, список лиц, входящих в некоторую учебную группу, задает множество студентов этой группы.

   Запись $M = \{a, b, c\}$ означает, что множество M состоит из трех элементов a, b и c.

2. Множество может быть задано аналитически – посредством некоторого признака, присущего всем его и только его элементам. Например, фраза «множество целых чисел таких, что они делятся на 2» задает множество четных чисел. В математике множества часто задают формулами. Например, если A – множество корней уравнения $f(x)=0$, то $A=\{x : f(x)=0\}$ (читается: "множество A состоит из всех элементов x таких, что $f(x)=0$ ").

3. Множество может быть задано алгоритмически – некоторым алгоритмом, порождающим из одних элементов множества другие его элементы. Например, множество всех натуральных чисел можно породить из числа 1 процедурой прибавления 1 к ранее уже построенному числу.

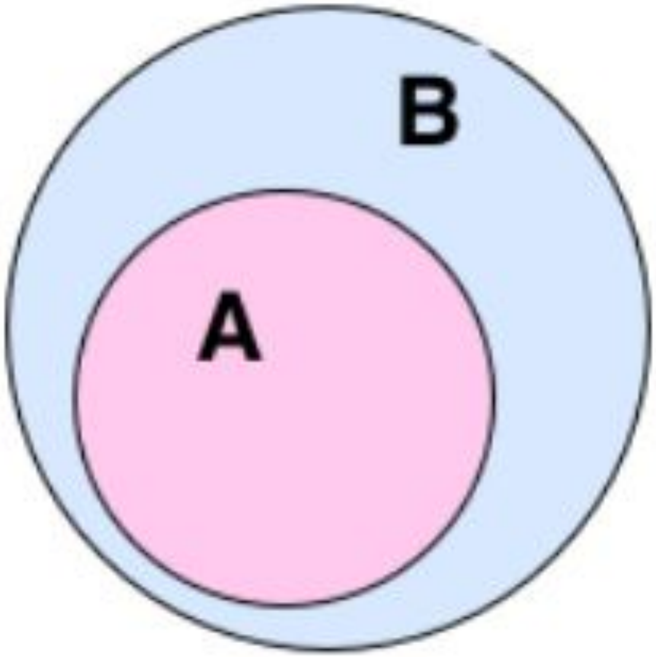
Другой пример алгоритмического задания множества.

Пусть $M = \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$ — множество степеней числа 2. Тогда его можно задать алгоритмом:

1) $1 \in M$;

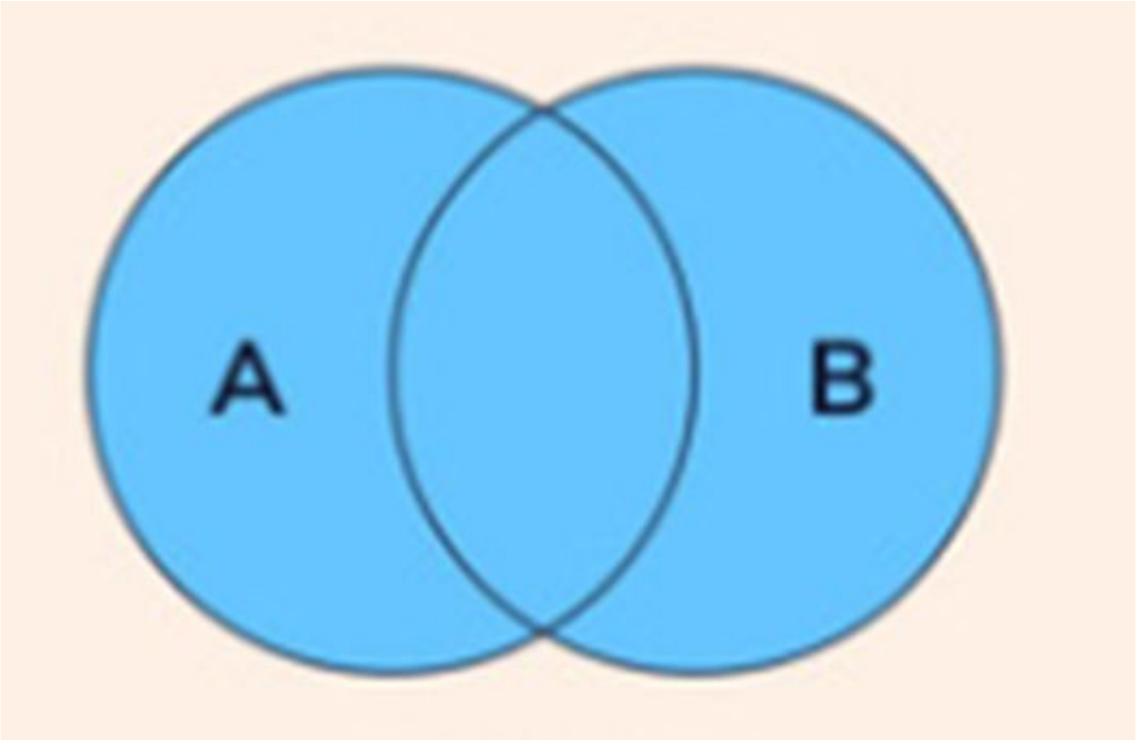
2) если $x \in M$, то $2x \in M$.

- Пусть A и B – два множества. Если каждый элемент множества A является элементом множества B (т.е. из условия $x \in A$ следует, что $x \in B$), то A называют подмножеством множества B и пишут $A \subset B$.

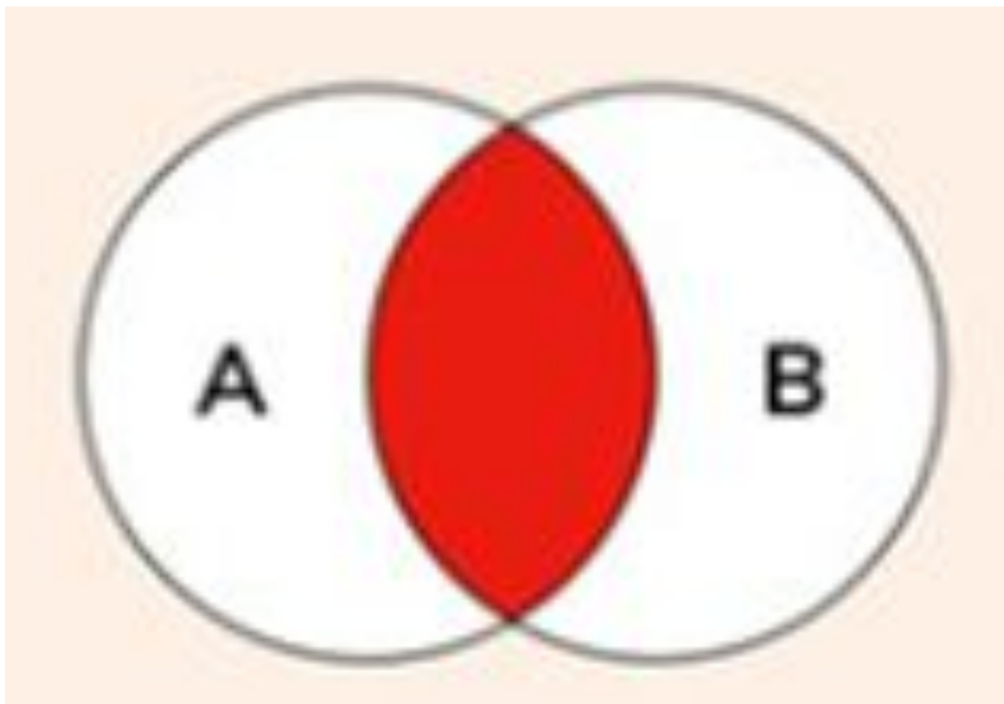


- Множества A и B называют равными и пишут $A = B$, если $A \subset B$ и $B \subset A$.
- Равные множества состоят из одних и тех же элементов.

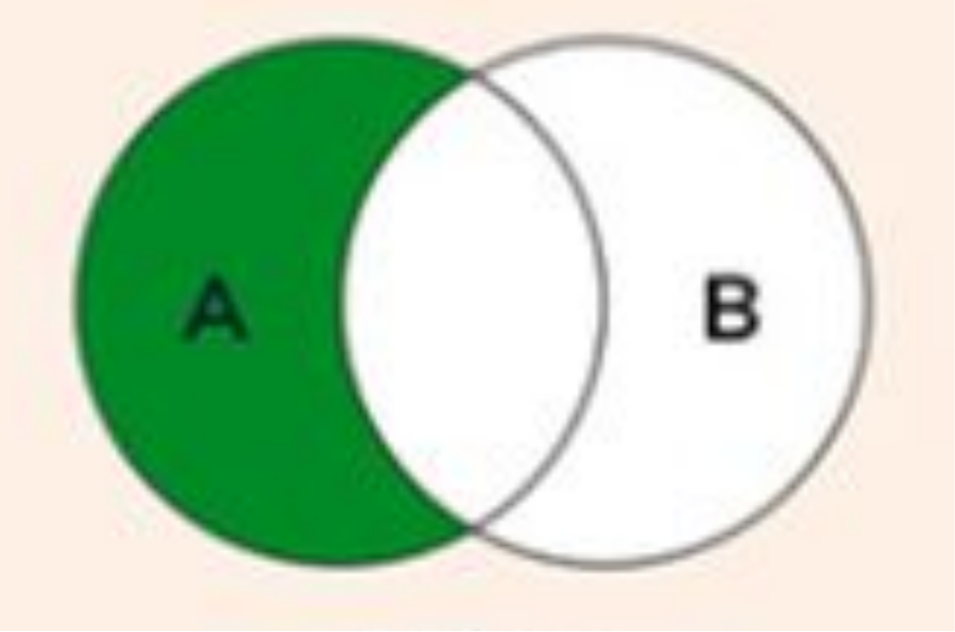
- $A \cup B$ – объединение множеств A и B ($x \in A \cup B$, если $x \in A$ или $x \in B$);



- $A \cap B$ – пересечение множеств A и B ($x \in A \cap B$, если $x \in A$ и $x \in B$).

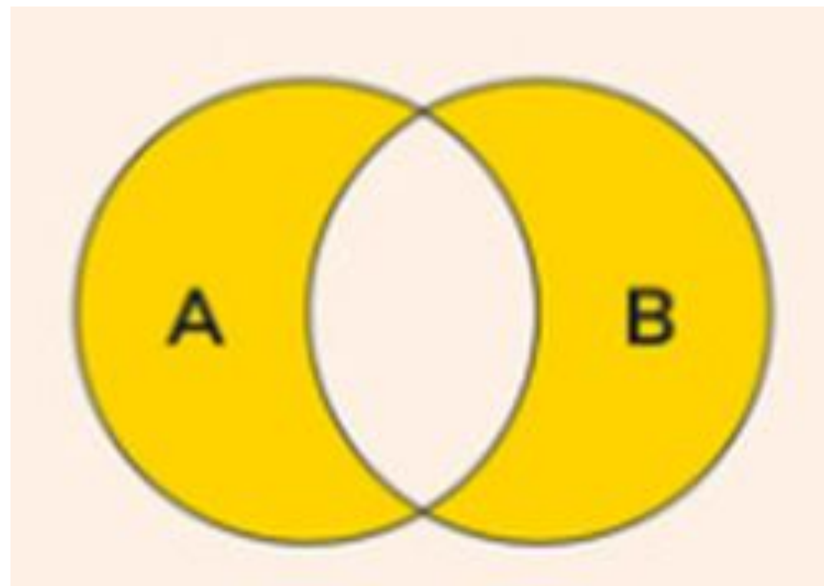


- $A \setminus B$ – разность множеств A и B ($x \in A \setminus B$, если $x \in A$ и $x \notin B$).

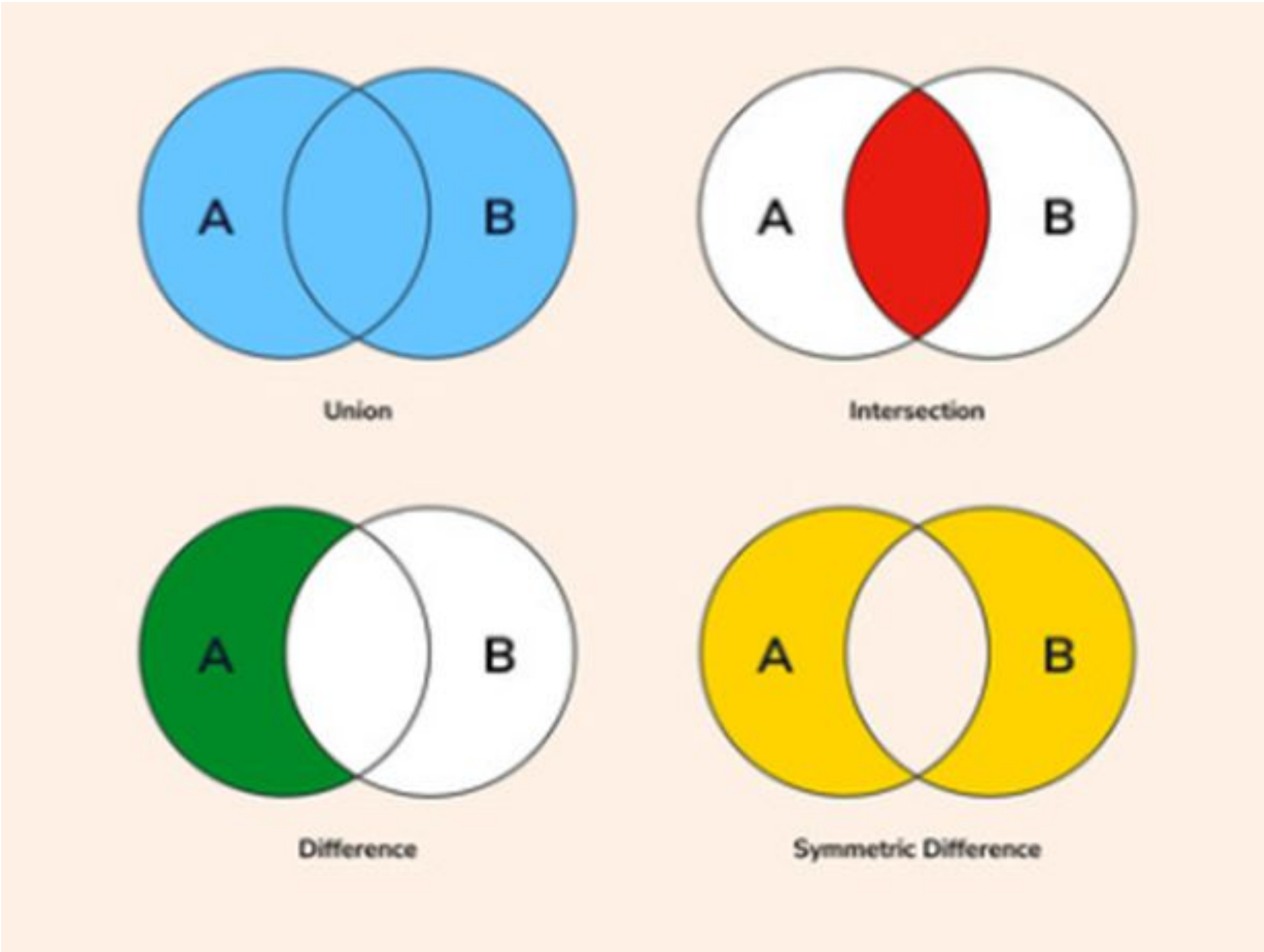


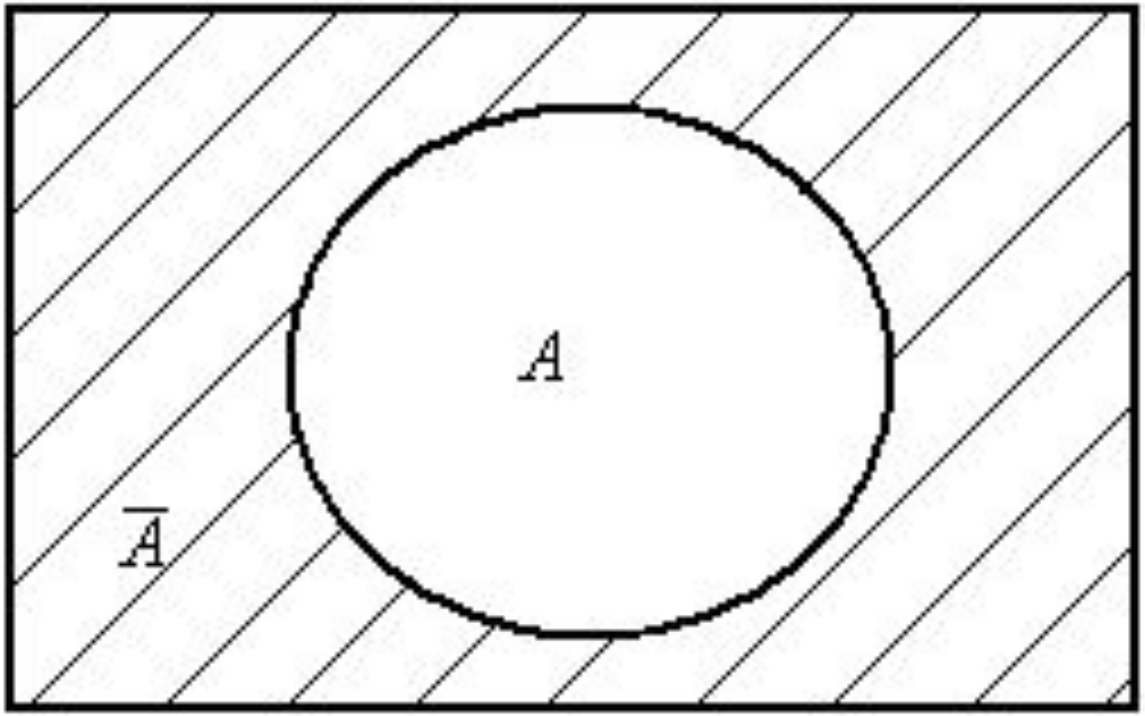
- Симметрической разностью $A \Delta B$ множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих только одному из множеств - либо A, либо B.

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$



- Верно равенство $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$


A
B
Union
A
B
Intersection
A
B
Difference
A
B
Symmetric Difference



- Если U – универсальное множество, то разность $U \setminus A$ называется дополнением множества A и обозначается $\overline{A}$.

$$\overline{A} = \{x : x \notin A, x \in U\}$$

Декартово произведение множеств A и B обозначается $A \times B$ и состоит из всех упорядоченных пар $(x; y)$ таких, что $x \in A$ и $y \in B$.

Таким образом,

$$A \times B = \{(x; y) : x \in A, y \in B\}$$

Пример 1. Даны множества $X=\{1,4,a,d\}$, $Y=\{1,d\}$, $Z=\{4,a,\beta\}$.

Найдите $X\cup Y$, $X\cap Z$, $(Y\cup Z)\setminus X$, $\left(X\setminus Z\right)\cap Y$, $X\Delta Z$, $Z\times Y$.

Решение. $X\cup Y=\{1,4,a,d\}$, $X\cap Z=\{4,a\}$,

$(Y\cup Z)\setminus X=\{\beta\}$, $\left(X\setminus Z\right)\cap Y=\{1,d\}$,

$X\Delta Z=\{1,d,\beta\}$,

$$Z\times Y=\{(4;1),(4;d),(a;1),(a;d),(\beta;1),(\beta;d)\}.$$

Вопрос: $Y\times Z=?$

- Обозначим через $|A|$ число элементов конечного множества A.
- Если множества A и B не имеют ни одного общего элемента, т.е. $A \cap B = \varnothing$, то говорят, что множества A и B не пересекаются.
- Множество $A \times A$ обозначают A^2 и называют декартовым квадратом множества A.
- Если множество A конечное и $|A| = n$, то $|A^2| = n^2$.

Правило умножения

Если элемент x можно выбрать m способами, а элемент y можно выбрать n способами, то упорядоченную пару (x,y) можно выбрать $m \cdot n$ способами.

Иначе говоря, для любых конечных множеств A и B верна формула

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Правило сложения

Число элементов множества $A \cup B$ находится по формуле

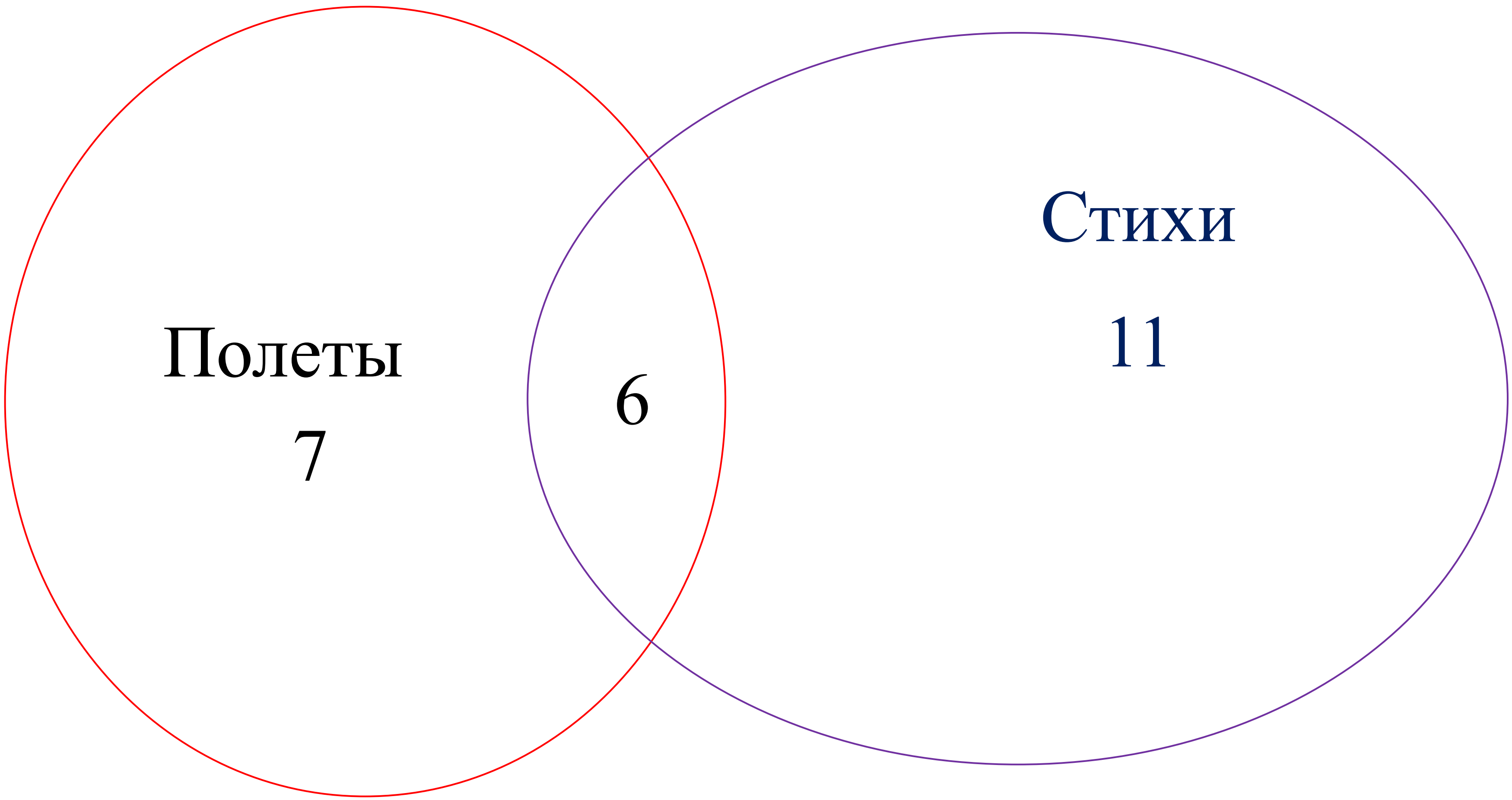
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

В частности, если множества A и B не пересекаются, т.е. $A \cap B = \varnothing$, то

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Пример 2. В группе из 27 студентов 17 пишут стихи, а 13 летают во сне. Трое студентов не умеют ни того ни другого. Найдите число студентов, которые и стихи сочиняют и во сне летают.

Решение. По условию, хотя бы одним даром обладают 27 – 3 = 24 студента. Значит, только летают (а стихи не пишут) 24 – 17 = 7 чел., а 13 – 7 = 6 чел. и стихосложением занимаются и летают.


Полеты
7
6
Стихи
11

Пример 3. Из 50 студентов курса 42 изучают английский язык, 31 – немецкий язык, а 25 – английский и немецкий языки. Сколько студентов курса не изучает ни английский, ни немецкий языки?

Решение. Пусть A – множество студентов курса, изучающих английский язык, B – множество студентов курса, изучающих немецкий язык, C – множество всех студентов курса. По условию задачи $|A| = 42$, $|B| = 31$, $|A \cap B| = 25$, $|C| = 50$.

Требуется найти число студентов курса, не изучающих ни английского, ни немецкого языка.

1 способ.

1) Найдем число элементов в объединении данных множеств. Для этого воспользуемся формулой правила сложения:

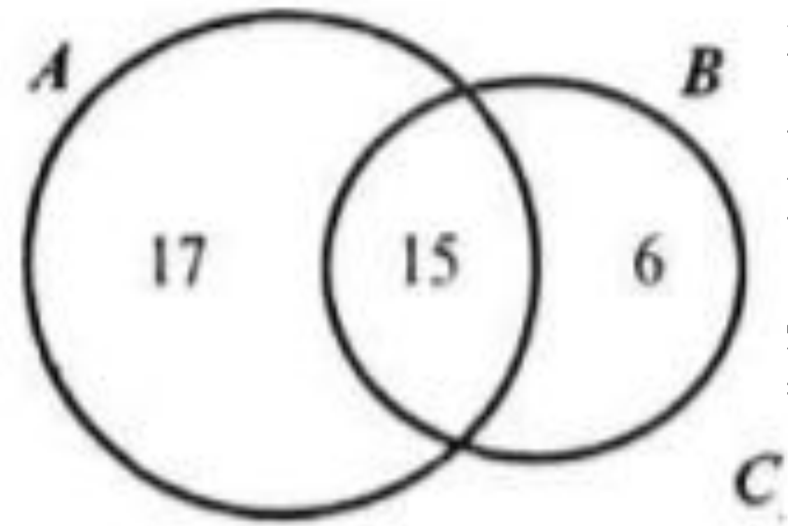
$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 42 + 31 - 25 = 48.$

2) Найдем число студентов курса, которые не изучают ни английский, ни немецкий языки: 50 - 48 = 2.

2 способ.

Изобразим данные множества при помощи кругов Эйлера и определим число элементов в каждом из непересекающихся подмножеств. Поскольку в пересечении множеств *A* и *B*

содержится 25 элементов, то



только английский

25 = 17), а студентов,

немецкий, - 6 (т.

).

- 25 + 6 = 48, и,

студентов курса,

зучают ни английский, ни

= 2.

Ответ: 2

Спасибо за внимание!