Теория вероятностей
и
математическая статистика

Математическая статистика -

- это наука и методах сбора, систематизации и обработке данных научных исследований с целью выявления существующих в них закономерностях.

Выборочный метод

Генеральная совокупность (ГС)

- это вся подлежащая изучению совокупность объектов.

Т.е., совокупность всех мыслимых наблюдений, которые могли быть получены при данном комплексе условий.

Генеральная совокупность

аналогична случайной величине X, поэтому она обладает законом распределения, математическим ожиданием, дисперсией и т. д.

Основная задача МС-

- исследовать ГС статистически, т.е., определение ее основных характеристик, закона распределения и т.п.
- Однако полное исследование ГС либо не представляется возможным, либо неэкономично. Поэтому из нее делают выборку, т.е. подвергают исследованию только некоторые объекты ГС.

Выборка

Выборкой называется множество значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ГС , предназначенное для непосредственного исследования.

Количество элементов выборки *n* – называется ***объемом выборки.***

Выборка

Выборка бывает

дискретной и непрерывной

повторной и бесповторной,

одномерной и многомерной.

Выборка

Семинарское занятие - пример дискретной, повторной выборки.

Диспансеризация спортсменов раз в полгода, измерение антропометрических данных (рост, вес и т. д.) – пример непрерывной бесповторной выборка.

Выборка

Результат измерения роста 20 человек.

176,5; 163,3; 173,4; 182,1; 152,3;
162,2; 200,0; 194,1; 154,4; 170,8;
160,0; 173,3; 167,6; 168,2; 166,1;
176,6; 175,9; 165,8;151,5; 178,6

Бесповторная непрерывная выборка объема $n = 20$.

Суть выборочного метода

заключается в том, что

на основании выборочных данных делается вывод о генеральной совокупности в целом.

Репрезентативность

Для того, чтобы оценки полученные по выборочным данным были достоверными, необходимо, чтобы выборка была репрезентативной, (организованной случайным образом) - каждый элемент ГС должен иметь равную вероятность попасть в выборку.

Крупномасштабный почтовый опрос престижного американского журнала ***«The Literary Digest»,*** проведенный во время предвыборной кампании 1936 года, занимает важное место в истории эмпирической социологии. Исследование должно было определить, кого хотят видеть американцы своим президентом: Франклина Д. Рузвельта, кандидата от демократической партии, баллотировавшегося на второй срок, или Элфа Лэндона, кандидата республиканской партии.

Итоги электорального опроса не оставляли никаких сомнений: безоговорочную победу на предстоящих выборах одерживал республиканец Лэндон, за которого собирались голосовать 55% респондентов. Рузвельта поддержали участники опроса в количестве только 41%.

Результат выборов стал полной неожиданностью для «The Literary Digest»: действовавший президент Ф. Д. Рузвельт получил 61% голосов избирателей, в то время как его соперник — 37%.

Для составления списка респондентов были использованы **телефонные книги и регистрационные списки владельцев автомобилей** каждого территориального округа во всех сорока восьми штатах.

Самой распространенной точкой зрения на причину неудачи опроса «The Digest» уже более семидесяти лет остается мнение о некорректной процедуре составления выборки. Респонденты были отобраны, главным образом, из обширной картотеки журнала, которую владельцы создали с целью привлечения новых подписчиков. **Как телефон, так и автомобиль в тридцатых годах прошлого века являлись определенным показателем уровня дохода**. Таким образом, необъективно большую долю в выборке представляли состоятельные американцы. Учитывая, что во время выборов 1936 года существовала тесная взаимосвязь между размером доходов и партийными предпочтениями, результат можно было прогнозировать еще до начала опроса. В то же время процедура исключала значительную часть электората — бедняков, которые предположительно обеспечили победу Рузвельта: **многие сторонники президента не участвовали в опросе только потому, что не имели автомобиля и телефона.**

Варианты и частоты

Наблюдаемое значение признака в статистике называется

вариантой ***и обозначается*** x_i.

Одна и та же варианта в выборке может встречаться несколько раз – это число называется

частотой n_i.

Относительная частота

$w_i = n_i / n$.

Вариационный ряд

Если все значения признака записать в порядке возрастания или убывания , то такое представление выборки называется ***вариационным рядом***.

Выборка

Выборка

1 3 2 2 4 1 5 3 6 1

6 5 6 5 4 3 4 2 1 3

Упорядоченная выборка

Статистическое представление выборки

Если значения вариант соответствуют значениям дискретной СВ, то она называется дискретной.

Статистическое представление выборки

Статистическим представлением дискретной выборки называется таблица, в первой строке которой записывают значения вариант x_i, во второй строке значения соответствующих им частот n_i (относительных частот w_i).

Статистическое представление дискретной выборки (частоты)

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k

Условие нормировки

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$$

Статистическое представление дискретной выборки (относительные частоты)

x_i	x_1	x_2	…	x_k
w_i	w_1	w_2	…	w_k

Условие нормировки

$$\sum_{i=1}^{k} w_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i = \frac{1}{n} \cdot n = 1$$

Выборка

Упорядоченная выборка

1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3,

3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6.

x_i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
n_i	4	3	4	3	3	3
w_i	4/20	3/20	4/20	3/20	3/20	3/20

Интервальное представление выборки

Если в выборке имеется большое количество различных значений признака, то ее удобно представлять в виде частичных интервалов.

Интервальное представление выборки

Частота i-го частичного интервала n_i – определяется путем подсчета объектов выборки, значения которых попали в данный интервал $[a_{i-1}; a_i)$.

Статистическое представление интервальной выборки

Частичный интервал	$a_0 – a_1$	…	$a_{k+1} – a_k$
n_i	n_1	…	n_k

Пример

Результат измерения роста 20 человек (n = 20).

176,5; 163,3; 173,4; 182,1; 152,3;
162,2; 201,0;194,1; 154,4; 170,8;
165,5; 173,3; 167,6; 168,2; 166,1;
176,6; 175,9; 165,8;151,5; 178,6

Интервальное представление выборки

176,5; 163,3; 173,4; 182,1; 152,3; 162,2;
200,0;194,1; 154,4; 170,8; 160,0; 173,3; 167,6;
168,2; 166,1; 176,6; 175,9; 185,8;151,5; 178,6

$a_{i-1} - a_i$	**150-160**	**160-170**	**170-180**	**180-190**	**190-200**	**200-210**
n_i	3	6	7	2	1	1
w_i	3/20	6/20	7/20	2/20	1/20	1/20

Накопленные частоты

Накопленной частотой i-ой варианты – называется количество объектов выборки, значение которых не превосходит x_i .

Накопленной частотой i-ого интервала называется количество выборочных данных, значения которых не превышают конца этого интервала.

Накопленные частоты

Относительной накопленной частотой i-ой группы выборки – называется число

$$w_i^* = \frac{n_i^*}{n}$$

Графические представления выборки

Графически выборку можно представить в виде: полигона, гистограммы и кумуляты.

Полигон частот-

это ломаная линия, отрезки которой соединяют вершины (x_i, n_i) или (x_i, w_i).

По огибающей, проведенной через вершины полигона можно сделать предположение в виде закона распределения ГС, а также определить моду.

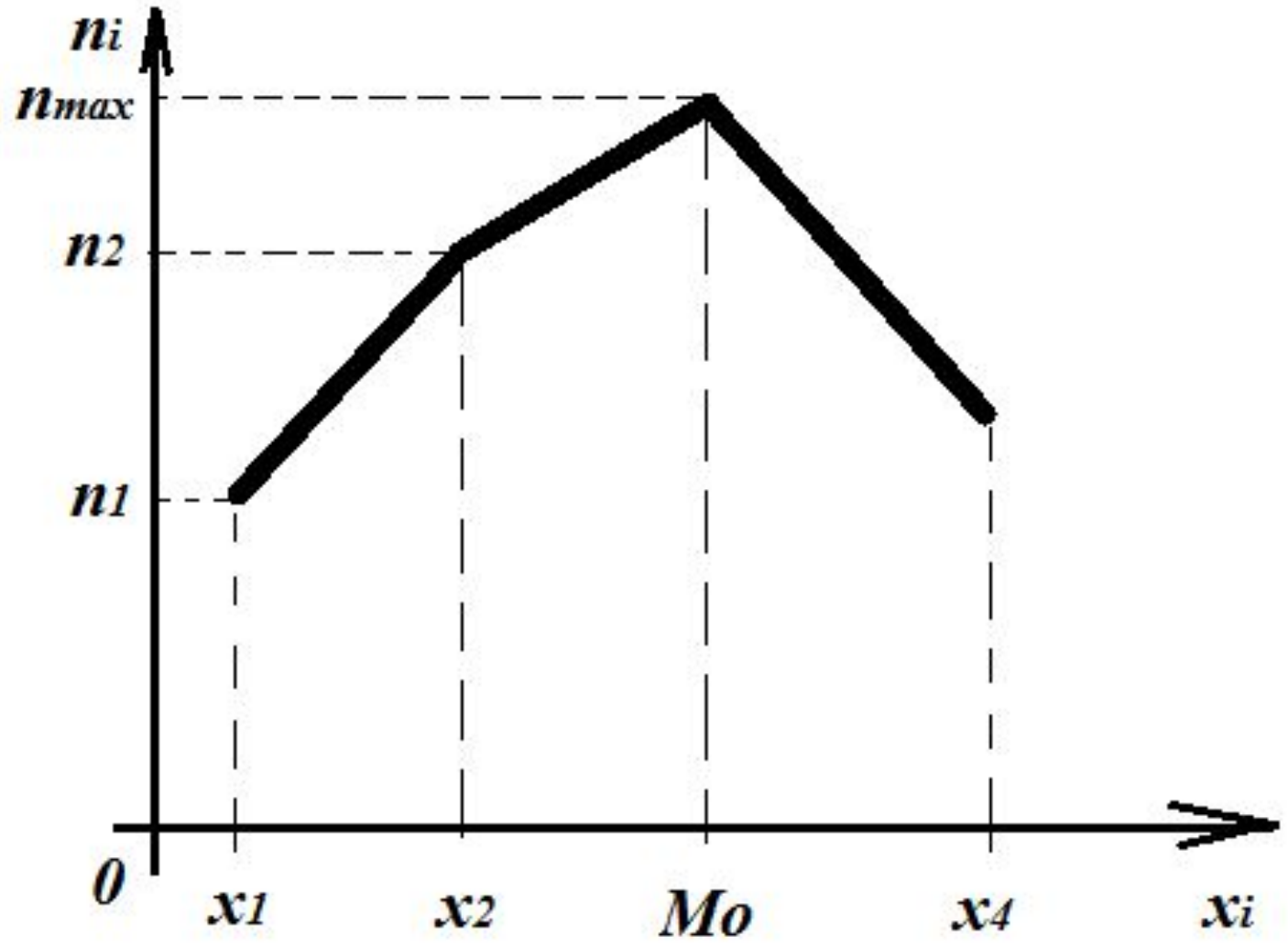


Рис.1. Полигон частот

Пример бимодального распределения

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	4	3	4	3	3	3

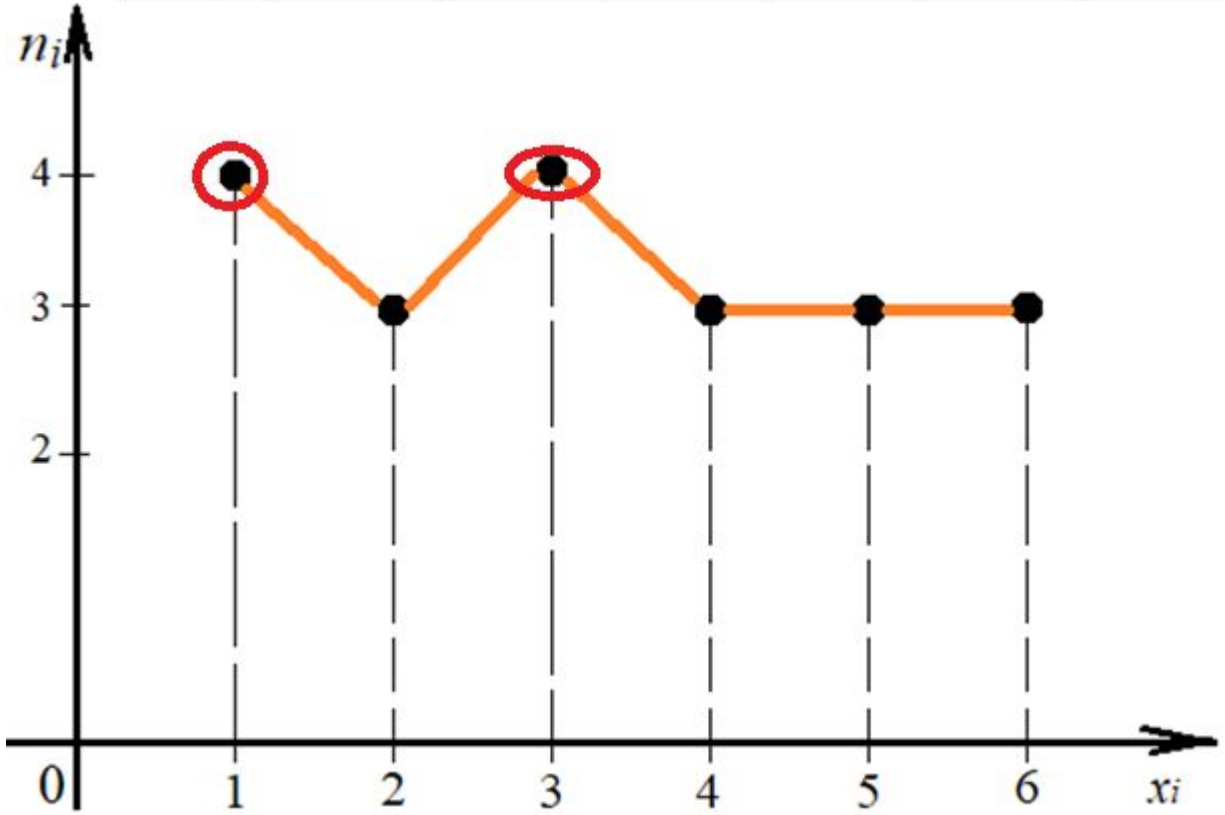


Рис. 2. Полигон частот для дискретного вариационного ряда – число очков на кости

Гистограмма частот-

это множество прямоугольников, в основании которых лежат частичные интервалы, а высоты соответствуют частоте (относительной частоте.

По ***гистограмме*** можно сделать предположение и виде закона распределения ГС и найти ***моду*** интервального ряда.

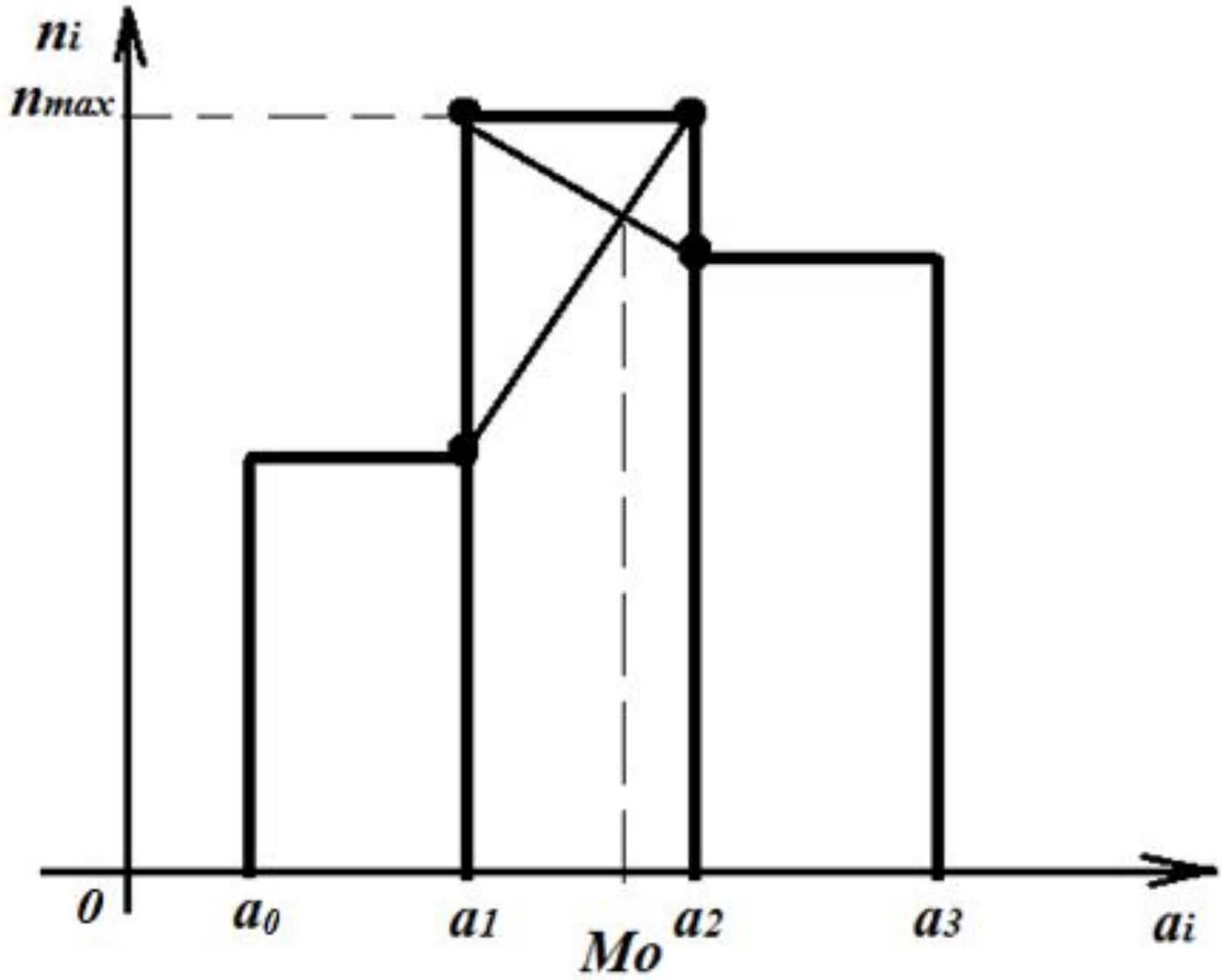


Рис.3. Гистограмма частот

Гистограмма относительных частот

При построении ***гистограммы относительных частот*** высоты прямоугольников соответствуют относительной частоте.

Если интервалы имеют разную длину, то по оси ординат откладывают величины частот деленые на длину *i*-ого интервала (h_i – длина *i*-го интервала):

$$\frac{n_i}{h_i} \quad \text{или} \quad \frac{w_i}{h_i} = \frac{n_i}{nh_i}.$$

Пример построения гистограммы частот по ростовым данным

$a_{i-1} - a_i$	150-160	160-170	170-180	180-190	190-200	200-210
n_i	3	6	7	2	1	1

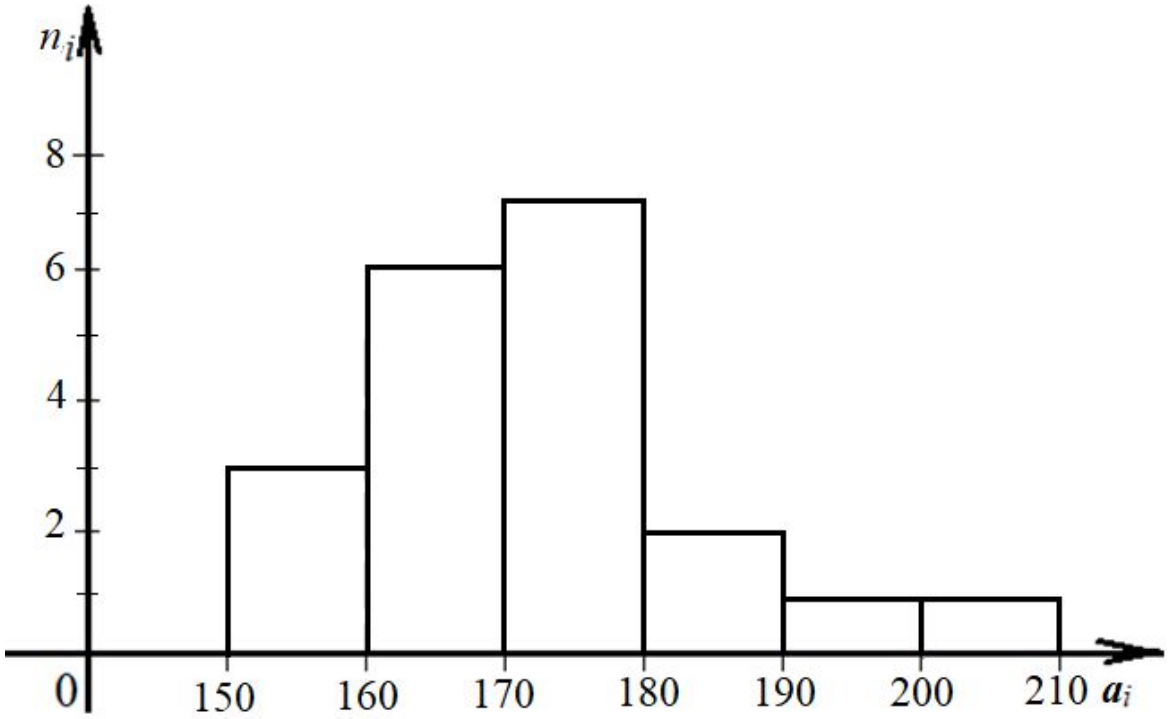


Рис. 4. Гистограмма частот

Кумулята –

это ломаная линия, отрезки которой соединяют точки (x_i, n_i^*)-(значение варианты, значение накопленной частоты). По ***кумуляте*** можно найти ***медиану выборки***

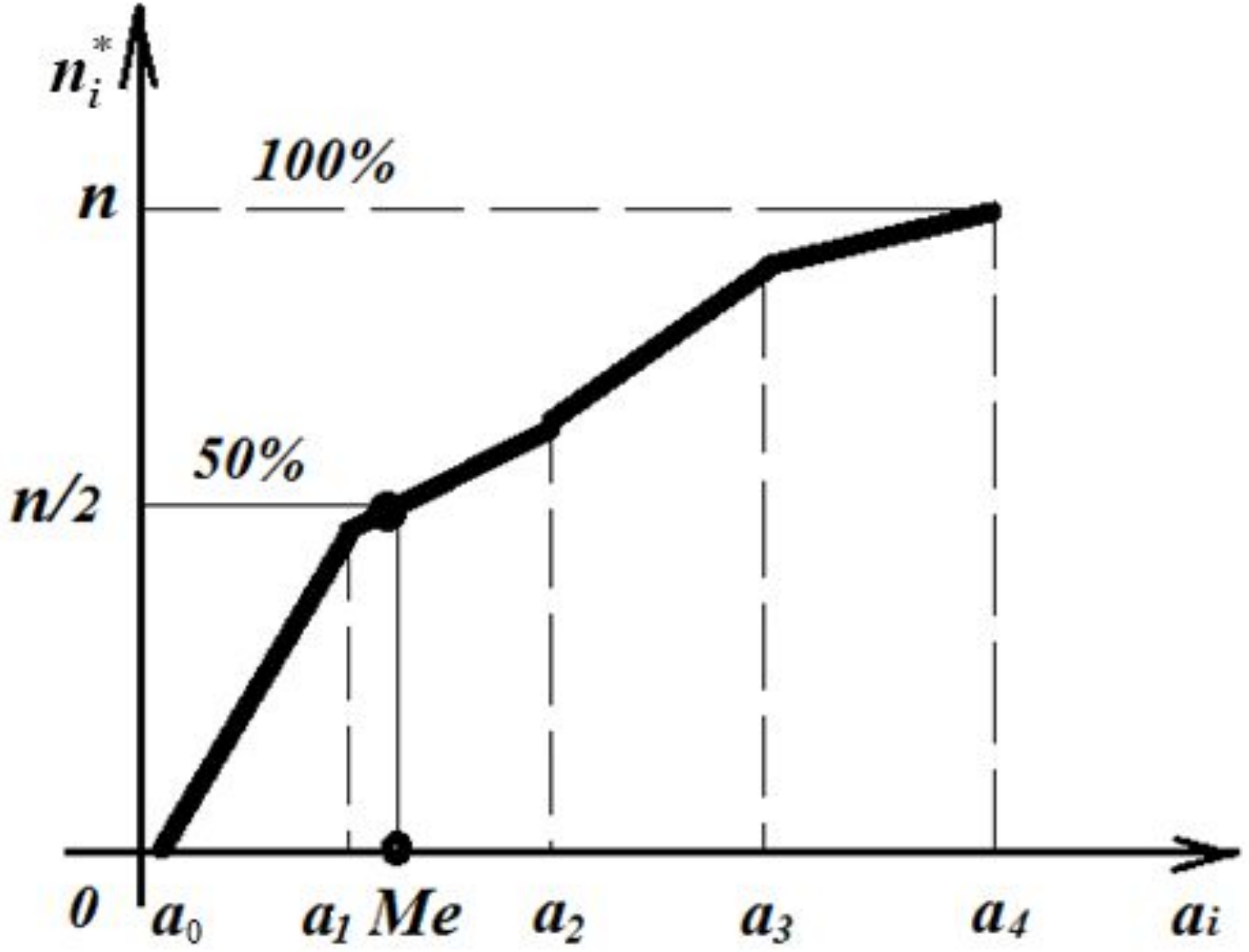


Рис. 5. Кумулята интервального ряда

Пример построения кумуляты

$a_{i-1} – a_i$	**1-2**	**2-3**	**3-4**	**4-5**
n_i	4	8	6	2

Построим дополнительную таблицу для построения кумулятивной кривой.

a_i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
n_i^*	0	4	12	18	20

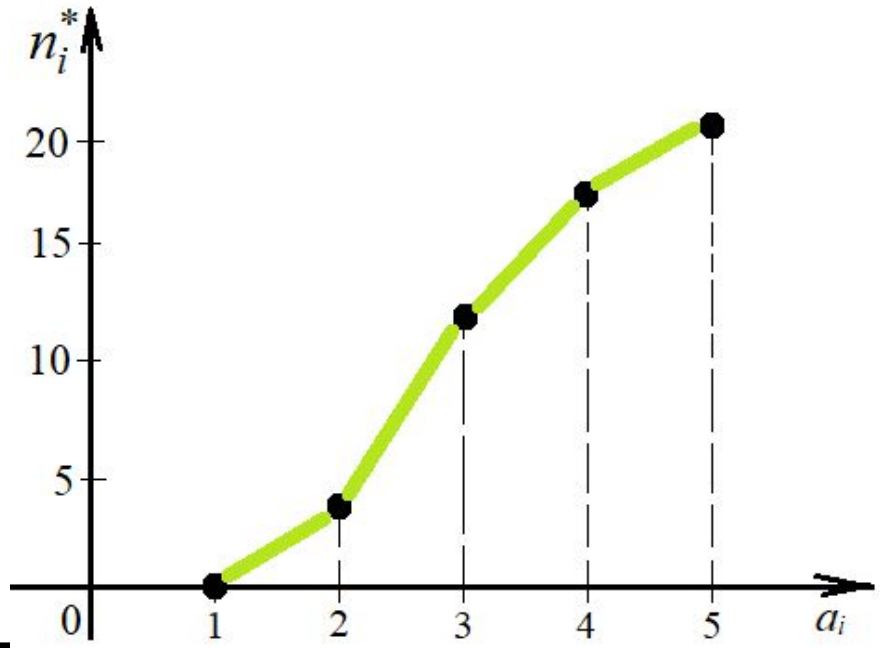


Рис. 6. Пример построения кумуляты

Эмпирическая функция распределения

Эмпирическая функция распределения находится по формуле:

$$F_n(x) = \frac{n_x}{n}$$

Здесь ***n*** – это объем выборки; n_x- это число выборочных данных, строго меньших ***x***.

Свойства функции эмпирической функции распределения

1. $0 \le F_n(x) \le 1$
2. неубывающая функция, то есть

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F_n(x_1) \le F_n(x_2)$$

3. $F_n(x) = 0,\ x \le x_{min}$

$$F_n(x) = 1,\ x > x_{max}$$

Эмпирическая функция распределения – ступенчатая. Необходимо разбить ось на интервалы точками x_i, и воспользоваться формулой для каждого интервала в отдельности.

xi	2	4	6	8	10
ni	4	6	5	3	1

Найдем объем выборки.

$$n = \sum_{i=1}^{k} n_i = 4 + 6 + 5 + 3 + 1 = 19$$

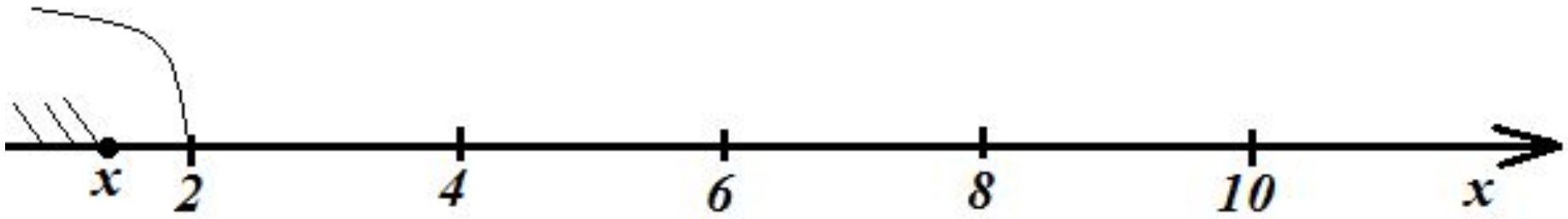
x_i	2	4	6	8	10
n_i	4	6	5	3	1

Эмпирическая функция распределения – ступенчатая функция.

Разобьем ось на интервалы точками 2, 4, 6, 8, 10, и применим данную формулу для каждого интервала в отдельности.

xi	2	4	6	8	10
ni	4	6	5	3	1

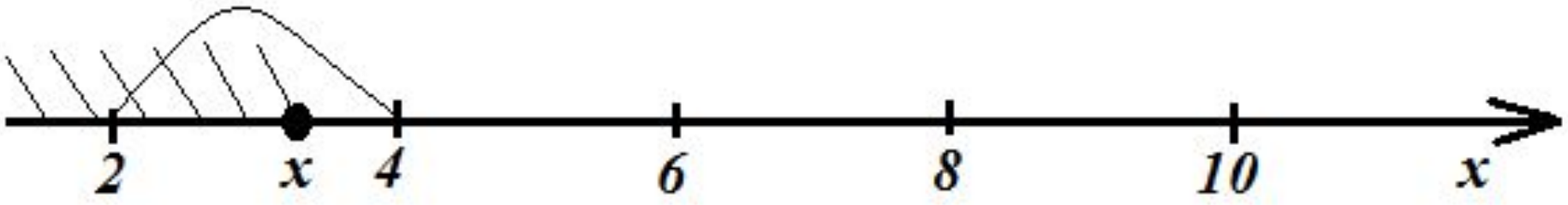
1) $x \le 2$



$$F_n(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{0}{19} = 0$$

xi	2	4	6	8	10
ni	4	6	5	3	1

2) $2 < x \leq 4$



$$F_n(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{4}{19}$$

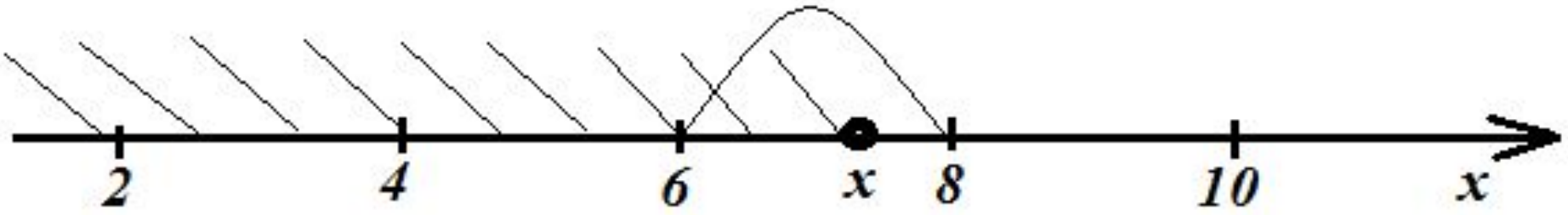
xi	2	4	6	8	10
ni	4	6	5	3	1

3) $4 < x \leq 6$

$$F_n(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{4+6}{19} = \frac{10}{19}$$

xi	2	4	6	8	10
ni	4	6	5	3	1

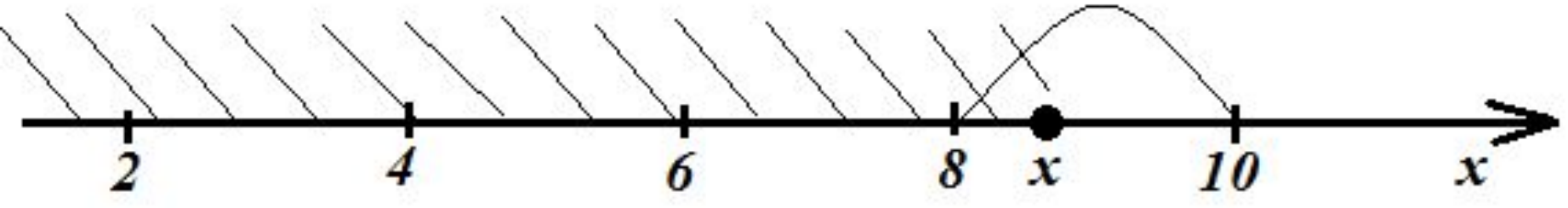
4) $6 < x \leq 8$



$$F_n(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{4+6+5}{19} = \frac{10+5}{19} = \frac{15}{19}$$

xi	2	4	6	8	10
ni	4	6	5	3	1

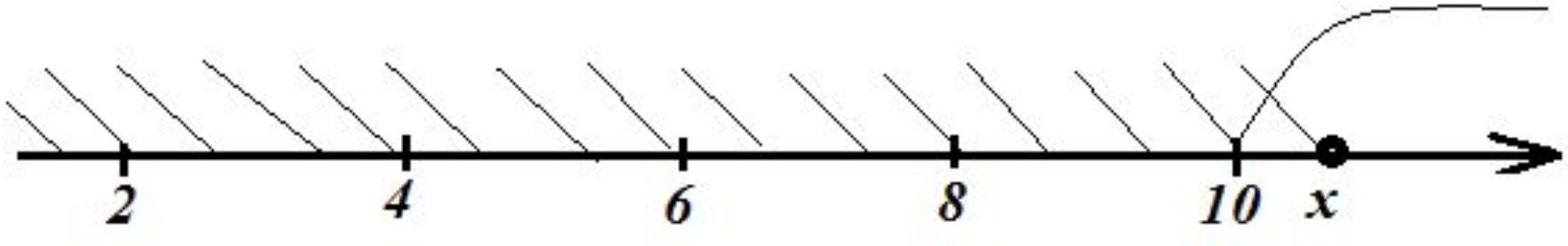
5) $8 < x \leq 10$



$$F_n(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{15+3}{19} = \frac{18}{19}$$

xi	2	4	6	8	10
ni	4	6	5	3	1

6) $x > 10$



$$F_n(x) = \frac{n_x}{n} = \frac{18+1}{19} = \frac{19}{19} = 1$$

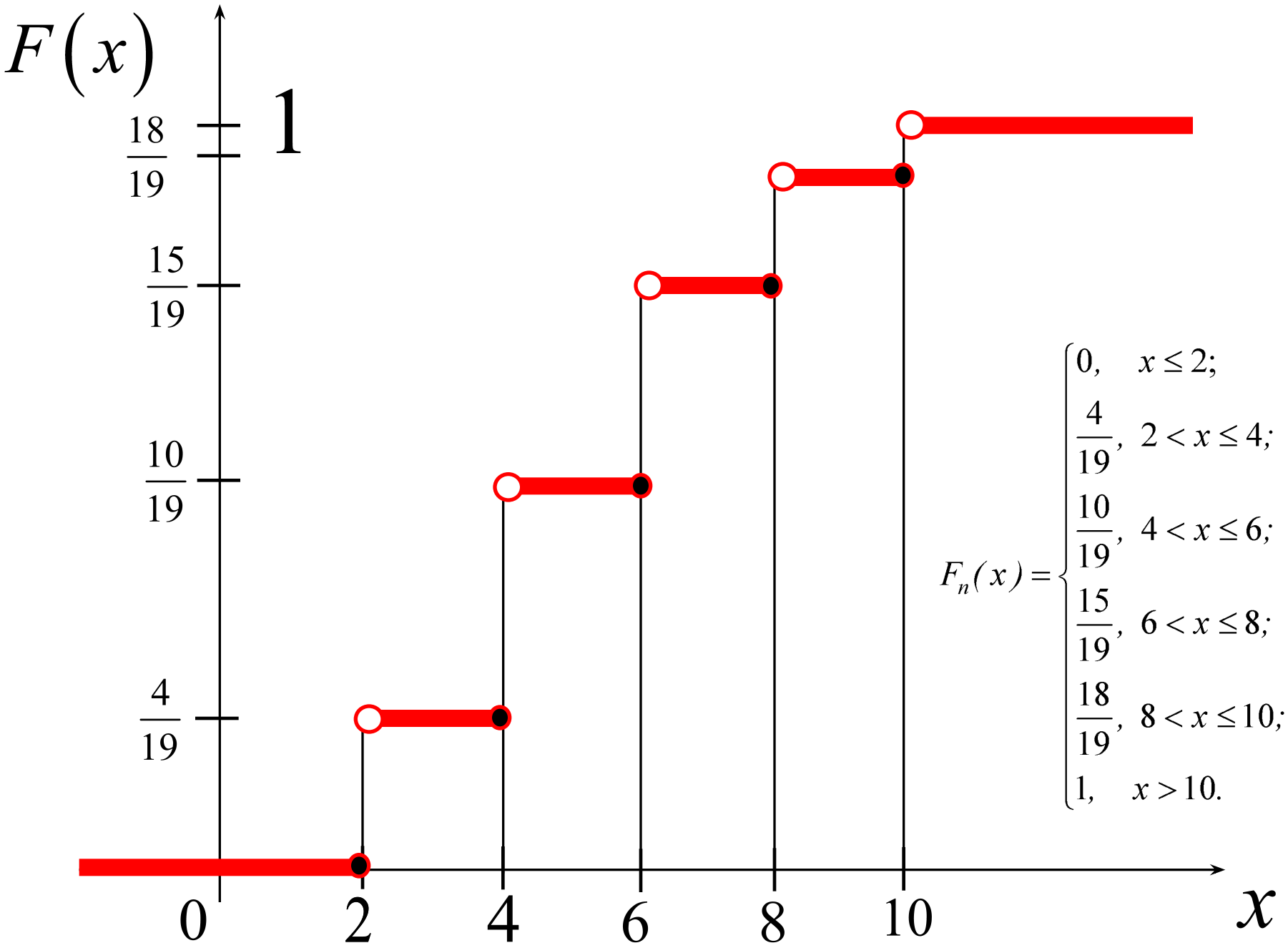
$$F_n(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ \dfrac{4}{19}, & 2<x\le 4;\\ \dfrac{10}{19}, & 4<x\le 6;\\ \dfrac{15}{19}, & 6<x\le 8;\\ \dfrac{18}{19}, & 8<x\le 10;\\ 1, & x>10.\end{cases}$$

xi	2	4	6	8	10
ni	4	6	5	3	1

Нахождение значений функции распределения можно осуществить с помощью таблицы:

x_i	2	4	6	8	10
n_i^*	4	10	15	18	19
w_i^*	4/19	10/19	15/19	18/19	1

Затем, используя свойства эмпирической функции распределения, записывают формулу.


F(x)
1
18/19
15/19
10/19
4/19
0
2
4
6
8
10
x
$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2; \\ \frac{4}{19}, & 2 < x \le 4; \\ \frac{10}{19}, & 4 < x \le 6; \\ \frac{15}{19}, & 6 < x \le 8; \\ \frac{18}{19}, & 8 < x \le 10; \\ 1, & x > 10. \end{cases}$