

Козак Татьяна Ивановна,  
учитель математики  
МОБУ СОШ №20  
пгт.Прогресс Амурской  
области

# Параллельность прямых и плоскостей в пространстве

Геометрия, 10 класс

2013 г

# Цель

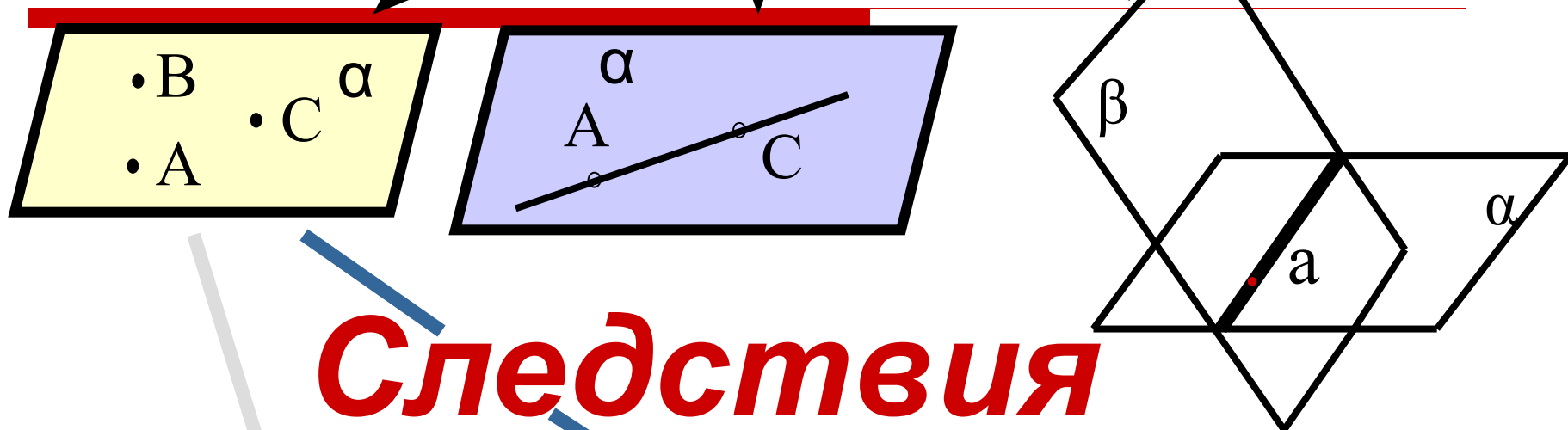
---

■ рассмотреть возможные случаи взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве

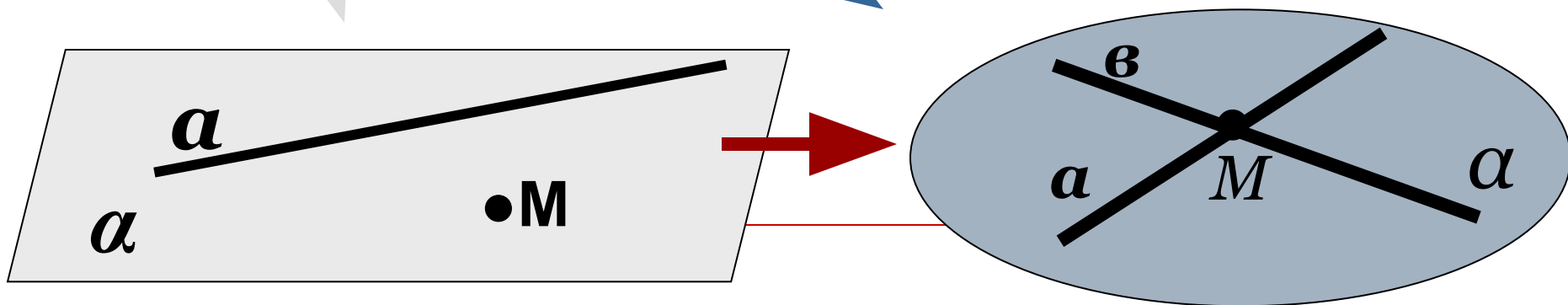
## Задач

- рассмотреть определения, лемму и теоремы по данной теме
  - самостоятельно доказать лемму и теорему
-

# Аксиомы



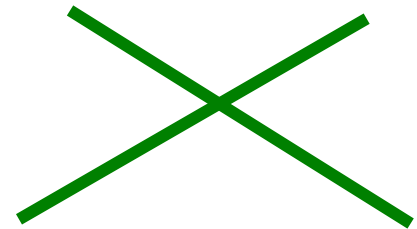
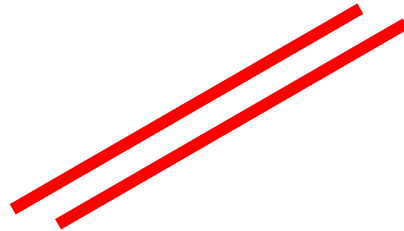
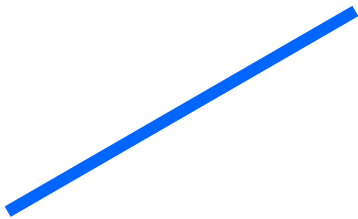
# Следствия



# ВСПОМНИМ ПЛАНИМЕТРИЮ

---

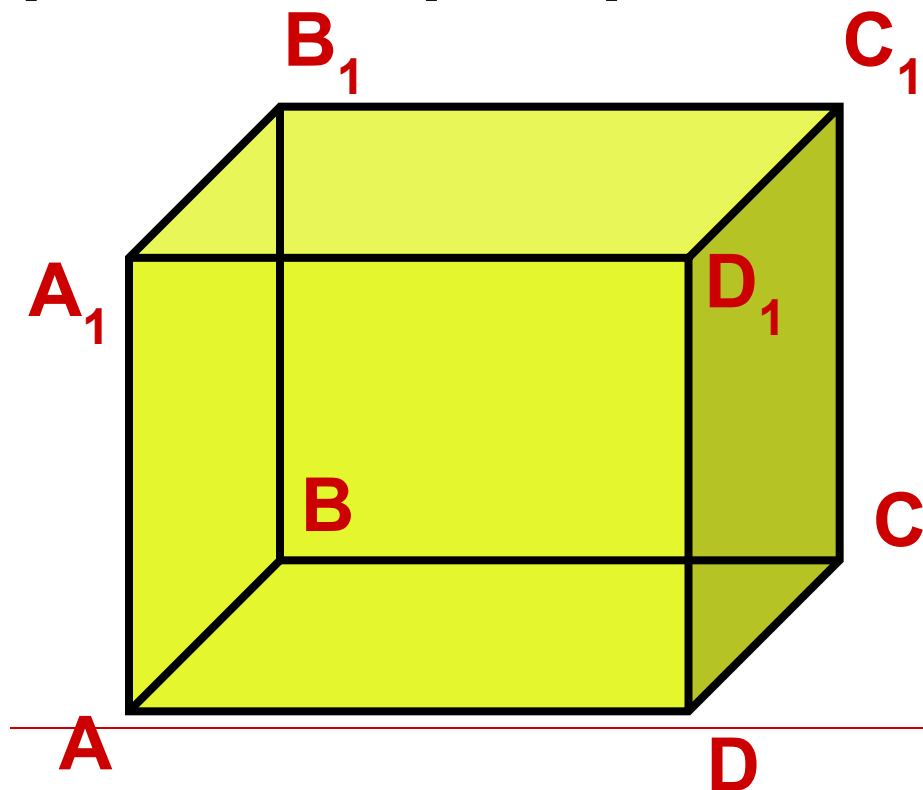
- Каково может быть взаимное расположение двух прямых на плоскости?



- Какие прямые в планиметрии называются параллельными?
-

# ВЕРНЁМСЯ В ПРОСТРАНСТВО

- Каково может быть взаимное расположение прямых в пространстве?



$AB \parallel CD$  ?

$B_1C \cap C_1C$  ?

$AD_1 \cap A_1D$  ?

$BC$  и  $AA_1$  ?

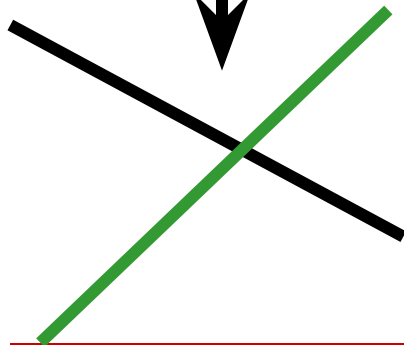
$B_1C$  и  $A_1D$  ?

# прямые в пространстве

---

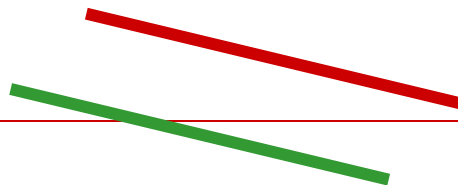
Случаи взаимного расположения  
прямых в пространстве

прямые пересекаются

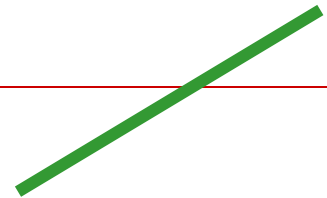


прямые не пересекаются

прямые  
параллельны



прямые  
скрещиваются

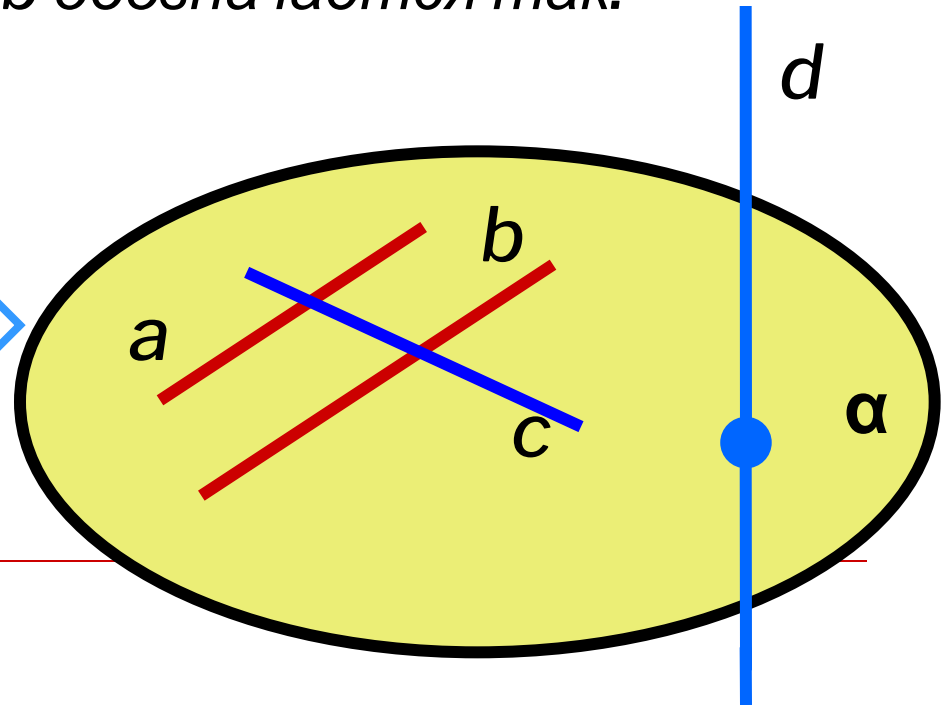


# Определение:

Две прямые в пространстве называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Параллельность прямых  $a$  и  $b$  обозначается так:  
 $a \parallel b$

На рисунке прямые  $a$  и  $b$  параллельны, а прямые  $a$  и  $c$ ,  $a$  и  $d$  не параллельны.



# Теорема:

---

Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

---

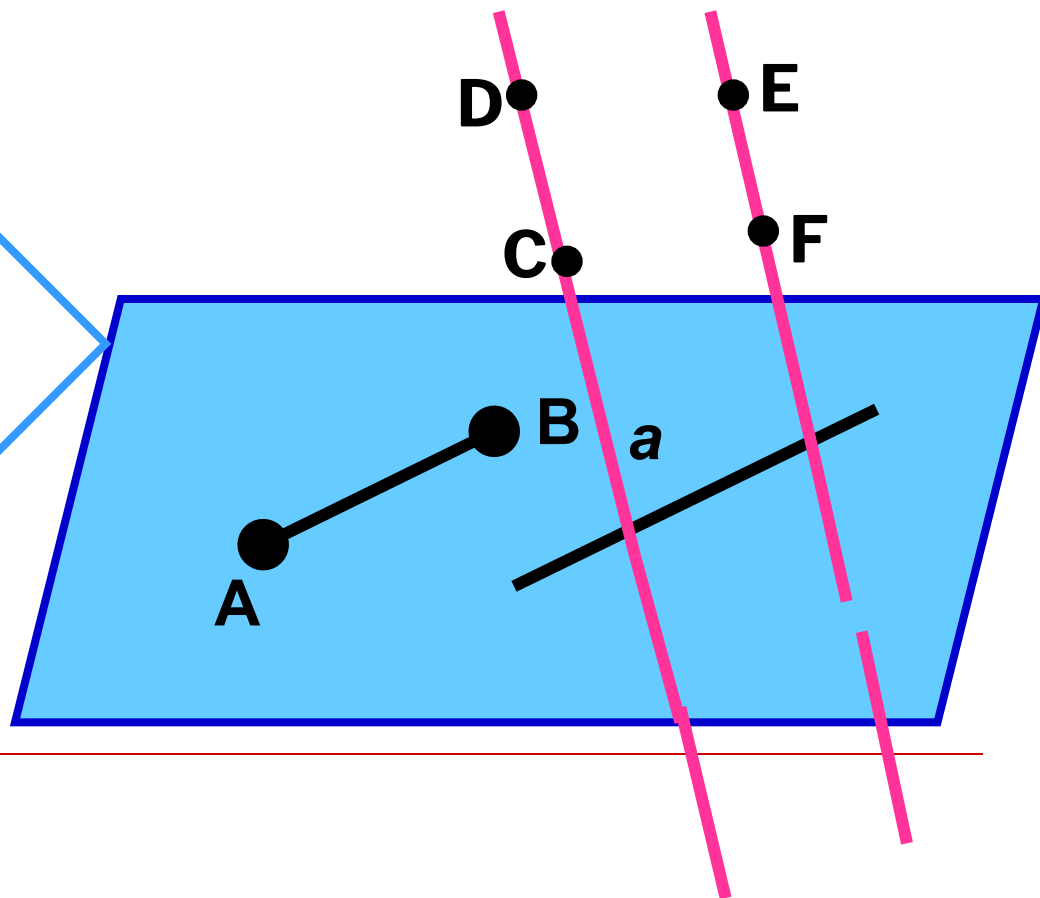
*! Докажите*



*Два отрезка называются  
параллельными, если они лежат на  
параллельных прямых.*

Аналогично определяется параллельность отрезка и прямой, а также параллельность двух лучей.

*На рисунке отрезки  $CD$  и  $EF$  параллельны ( $CD \parallel EF$ ), а отрезки  $AB$  и  $CD$  не параллельны, отрезок  $AB$  параллелен прямой  $a$  ( $AB \parallel a$ ).*

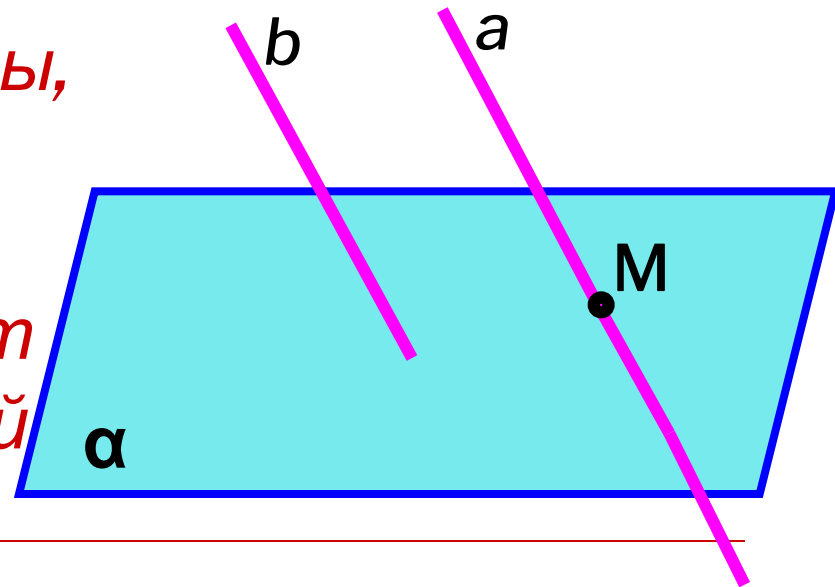


# Параллельность трёх прямых

## Лемма

**а:** Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

**?** Прямые  $a$  и  $b$  параллельны,  $a$  пересекает плоскость в точке  $M$ . Докажите, что прямая  $b$  также пересекает плоскость, т.е. имеет с ней только одну общую точку.



# Теорема:

---

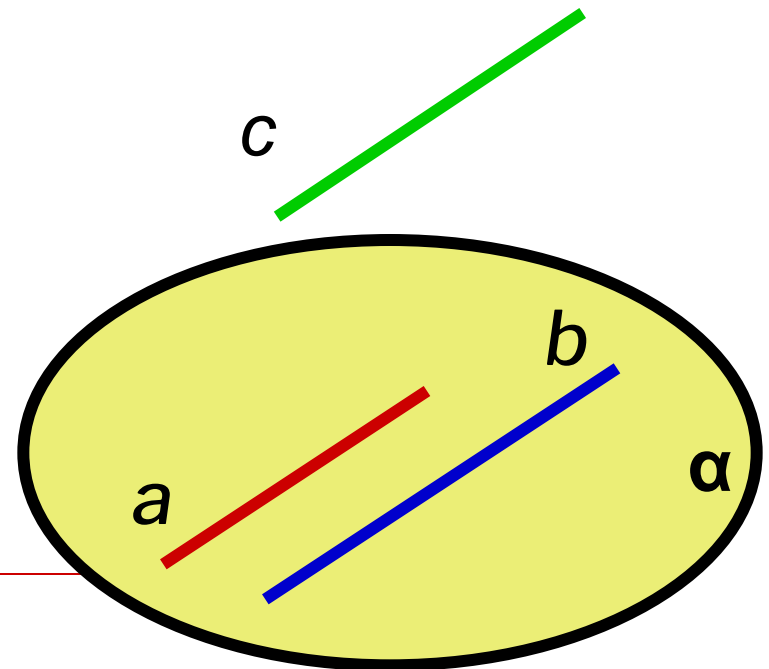
Если две прямые параллельны третьей, то они параллельны.

*? Пусть  $a \parallel c$  и  $b \parallel c$ .  
Докажем, что  $a \parallel b$ . Для этого нужно доказать,*

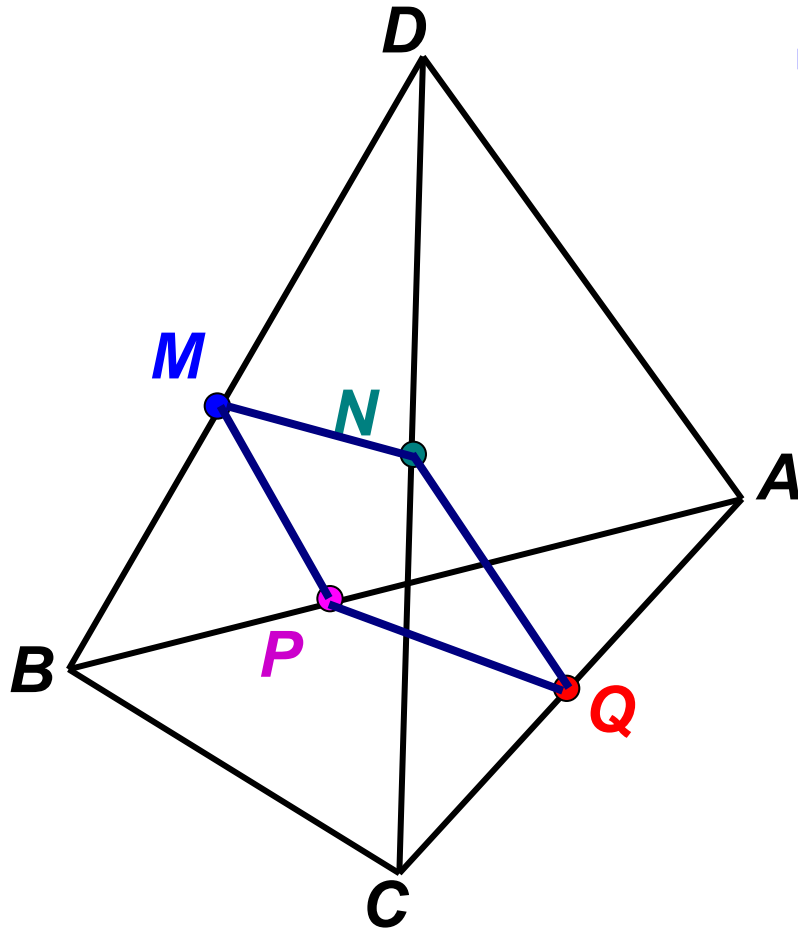
*что прямые  $a$  и  $b$ :*

*1) лежат в одной плоскости и  
плоскости и*

*2) не пересекаются.*



# Задача №17



**Дано:** M – середина BD  
N – середина CD  
Q – середина AC  
P – середина AB  
AD = 12 см; BC = 14 см

**Найти:**  $P_{MNQP}$ .

**Ответ:** 26 см.

# Задача №18 (б)

Дано:  $C \in AB$ ;  $A \in \alpha$ ;  $BB_1 \parallel$   
 $CC_1$

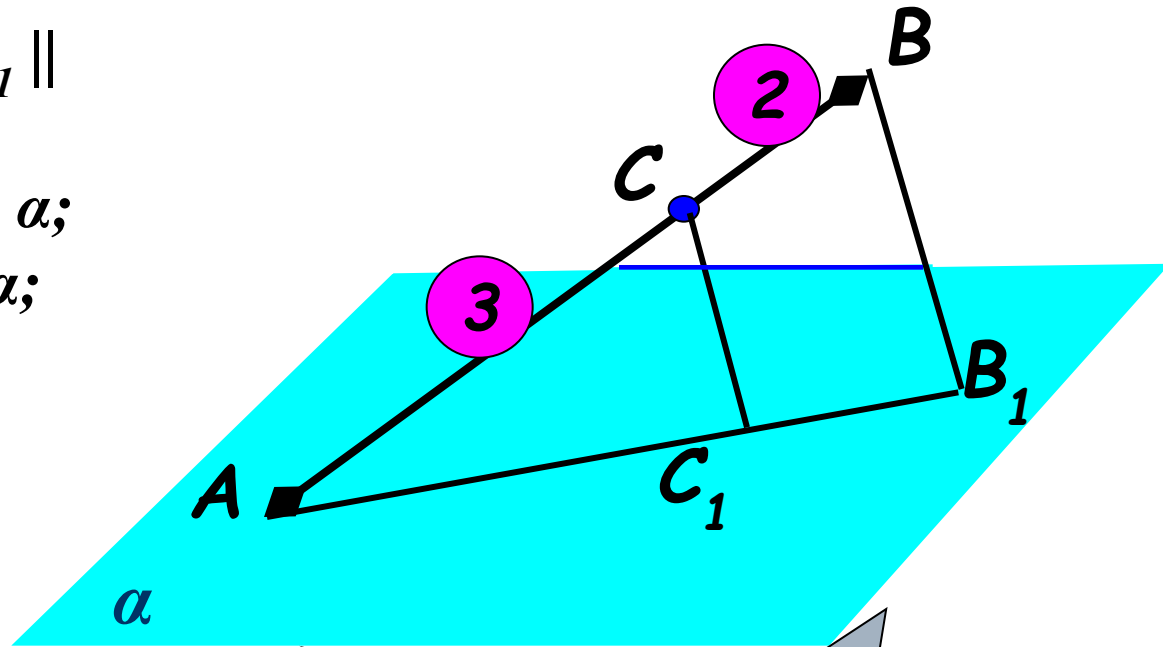
$BB_1 \cap \alpha = B_1$ ;  $B_1 \in \alpha$ ;

$CC_1 \cap \alpha = C_1$ ;  $C_1 \notin \alpha$ ;

$AC : CB = 3 : 2$ ;

$BB_1 = 20$  см.

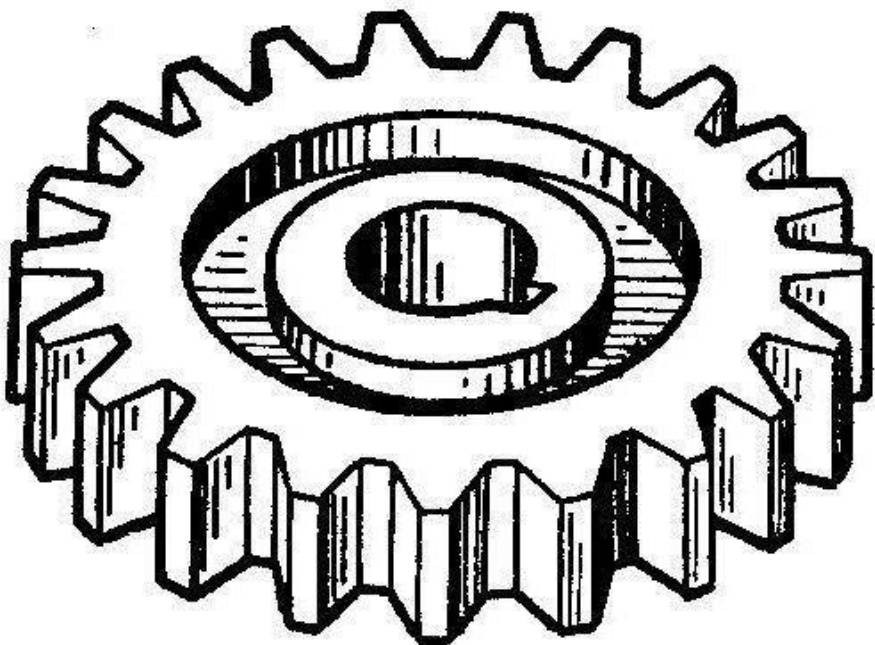
Найти:  $CC_1$



1. Доказать, что точки  $A$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  лежат на одной прямой.
2. Найти  $CC_1$  используя подобие треугольников.

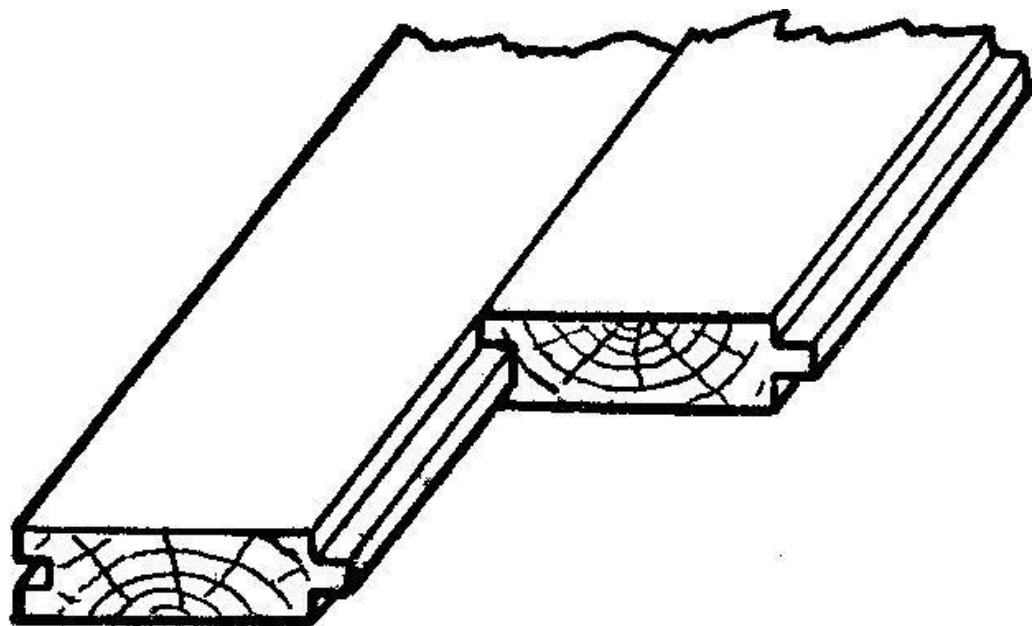
12 см.

# ?



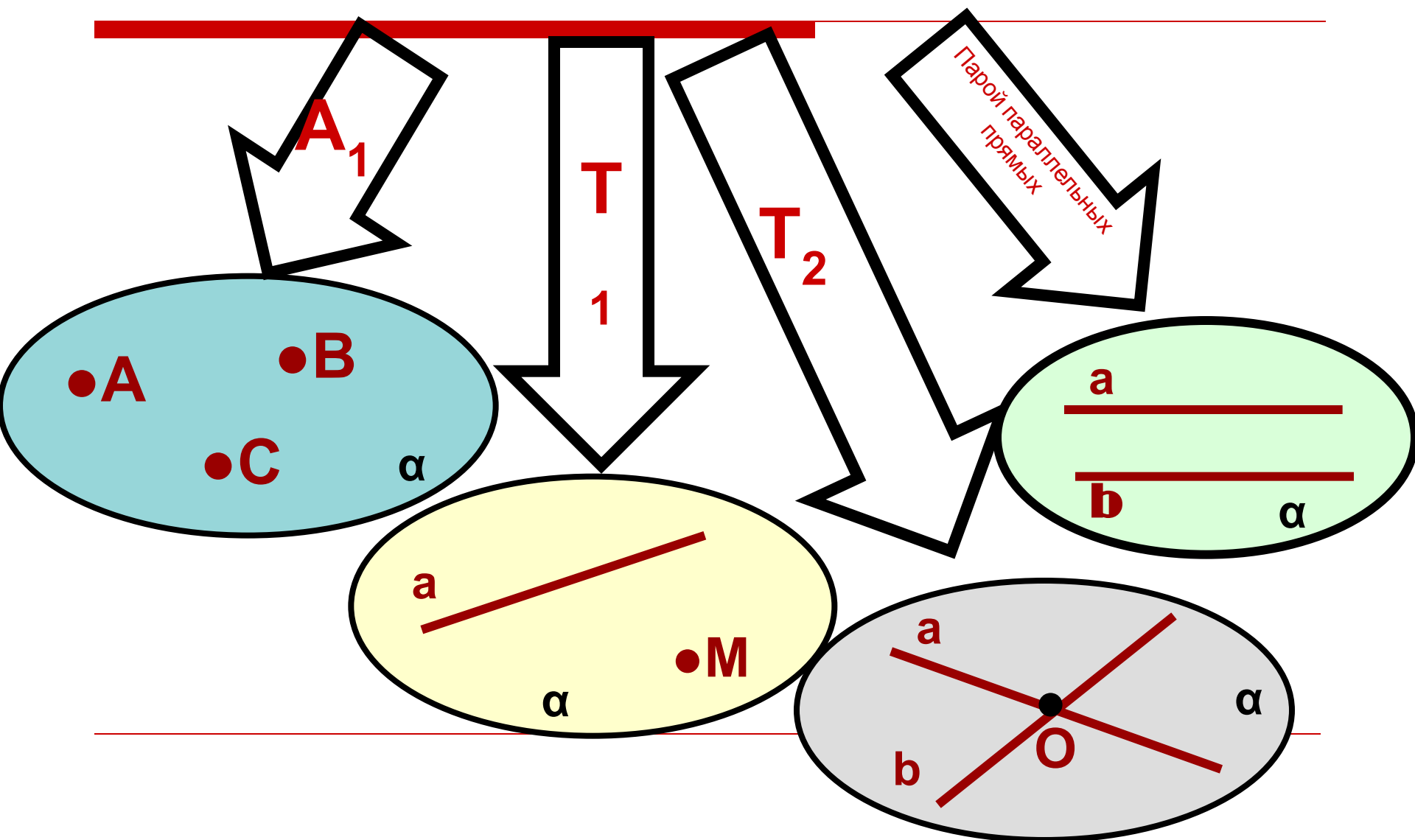
Слои всегда лежат в одной  
плоскости?

**Нет, плоскости.**



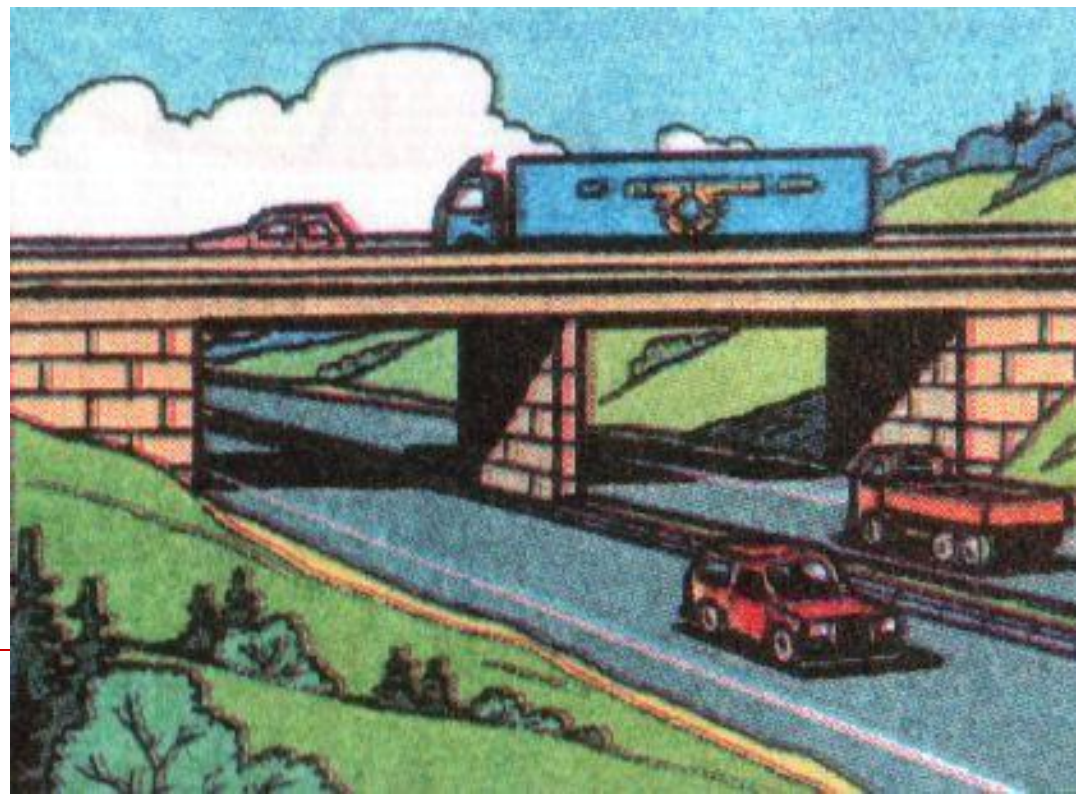
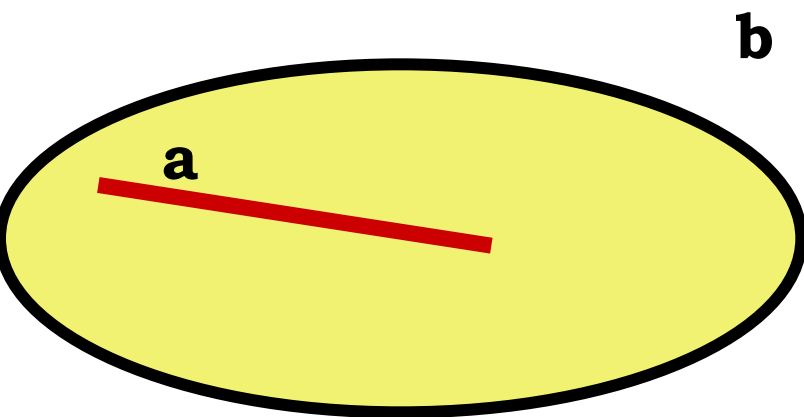
Тоже можно сказать о п  
досок, стержнях атом  
вертикальных колонн

# Способы задания плоскости



# прямые

Две прямые называются **скрещивающимися**,  
если они не лежат в одной плоскости

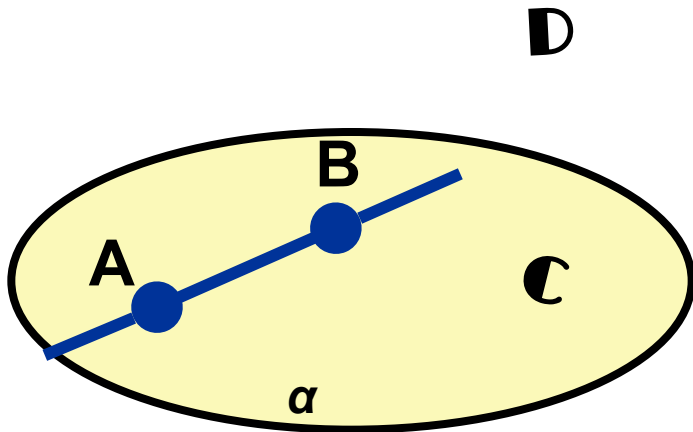




# Теорема:

---

Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.

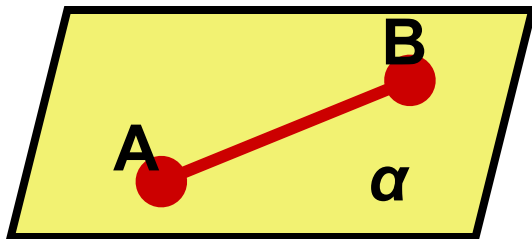


*Допустим, что прямые  $AB$  и  $CD$  лежат в некоторой плоскости  $\beta$ .*

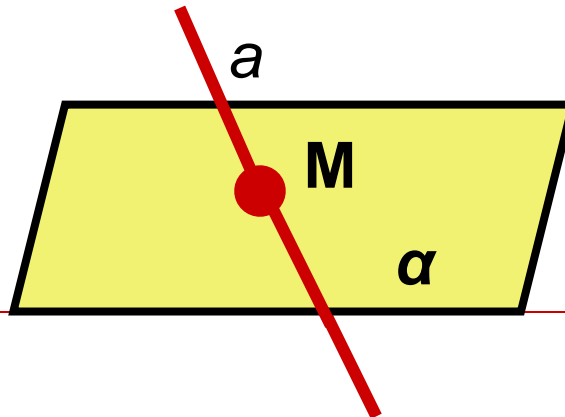
# Параллельность прямой и плоскости

*Случаи взаимного расположения  
прямой и плоскости в  
пространстве*

прямая лежит  
в плоскости



прямая и плоскость  
пересекаются (имеют  
одну общую точку)



прямая и  
плоскость не  
имеют ни одной  
общей точки



# Определен

---

**Цель:**  
Прямая и плоскость называются  
**параллельными**, если они не имеют общих  
точек.

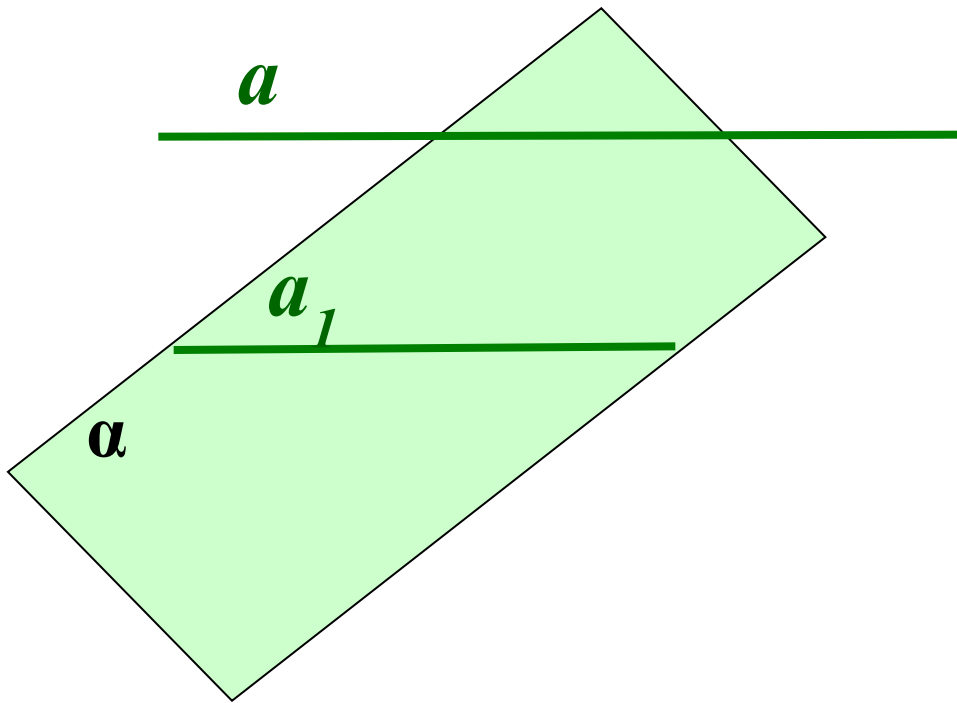
## **Теорема:**

*Если прямая, не лежащая в данной  
плоскости, параллельна какой-нибудь  
прямой, лежащей в этой плоскости,  
то она параллельна данной  
плоскости.*

---

**?** Докажите теорему методом от

# Признак параллельности прямой и плоскости.



$$\begin{array}{l|l} a \not\subset \alpha & \\ a \parallel a_1 & \\ a_1 \subset \alpha & \end{array} \quad \left| \quad a \parallel \alpha \right.$$

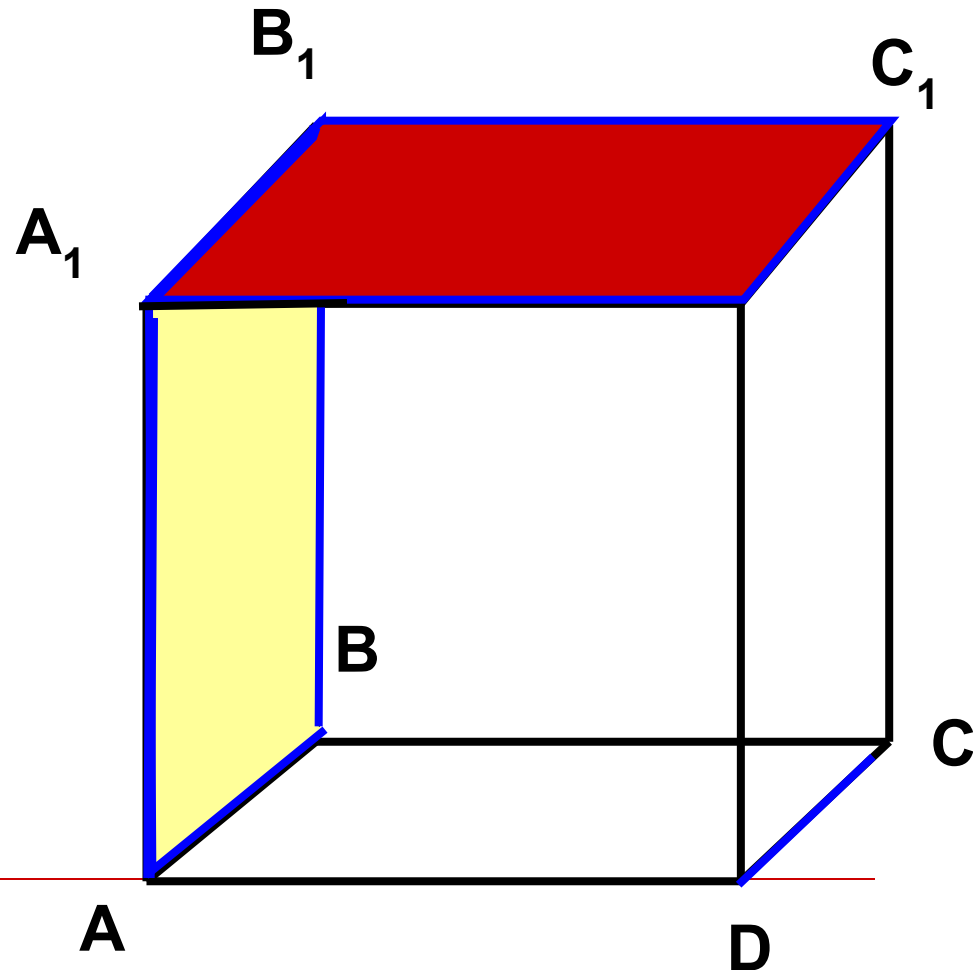
На модели куба укажите плоскости, параллельные  
прямой DC.

Как установить параллельность прямой и плоскости?

---

$$DC \parallel (AA_1B_1)$$

$$DC \parallel (A_1B_1C_1)$$

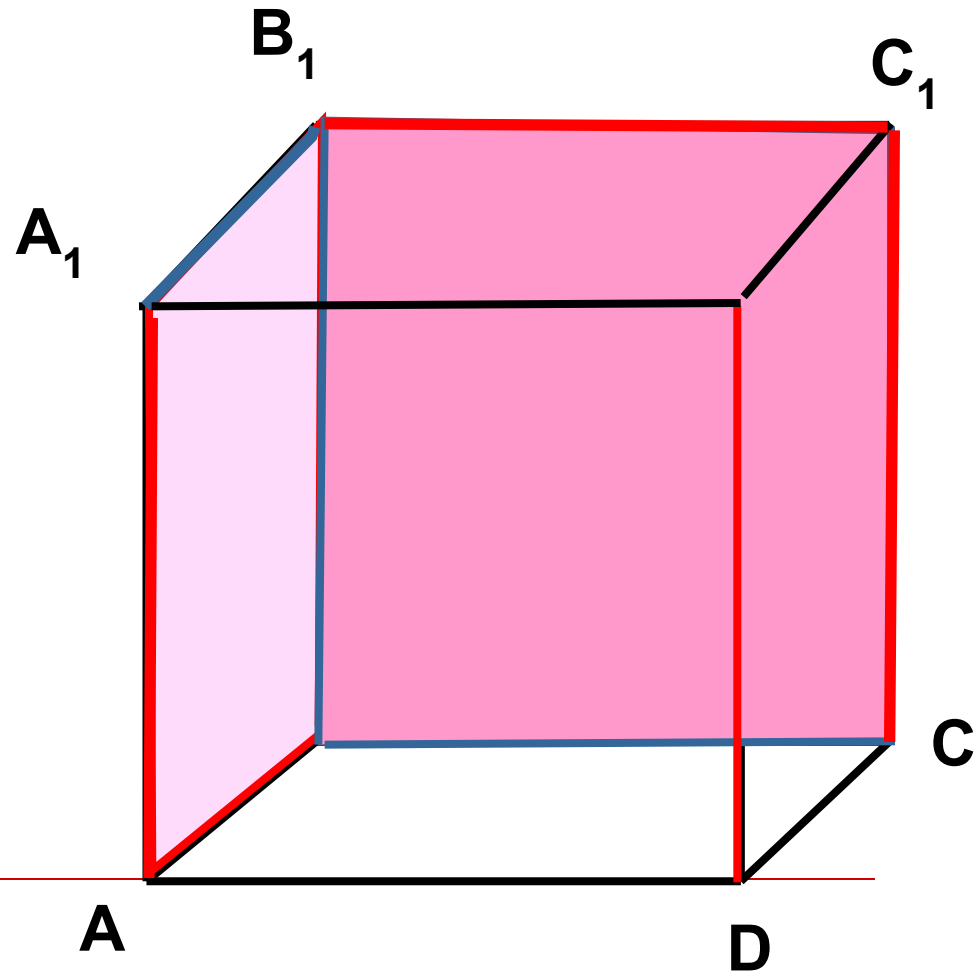


На модели куба укажите плоскости, параллельные прямой  $DD_1$ .

Как установить параллельность прямой и плоскости?

$$DD_1 \parallel (AA_1B_1)$$

$$DD_1 \parallel (B_1C_1C)$$



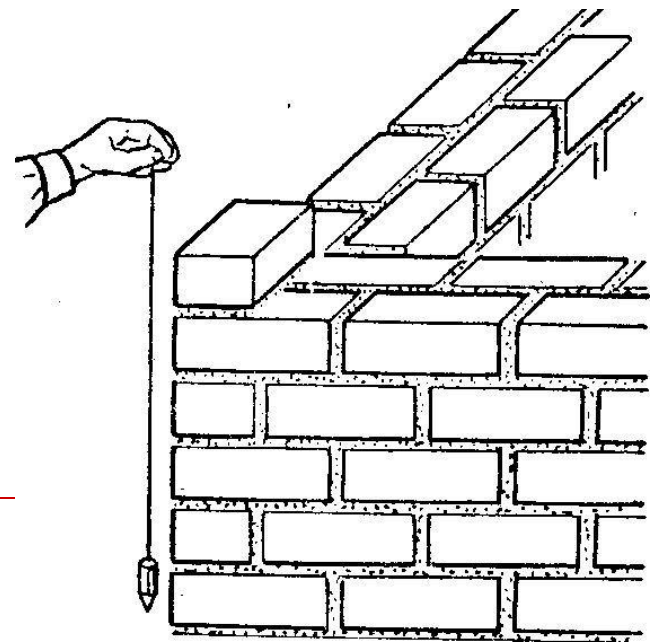
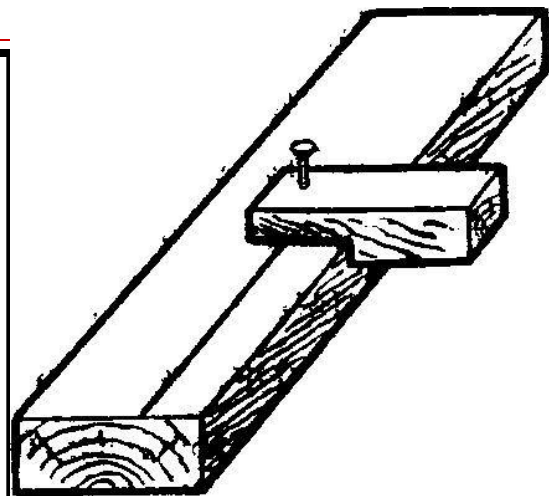
# отношения параллельности прямой и плоскости

Каждое ребро прямоугольного параллелепипеда параллельно плоскостям двух его граней.

А прямая, проведённая в грани бруска с помощью *рейсмуса* – плоскостям трёх граней.

Каменщики кладут стену под отвес, шнур которого параллелен плоскостям стены.

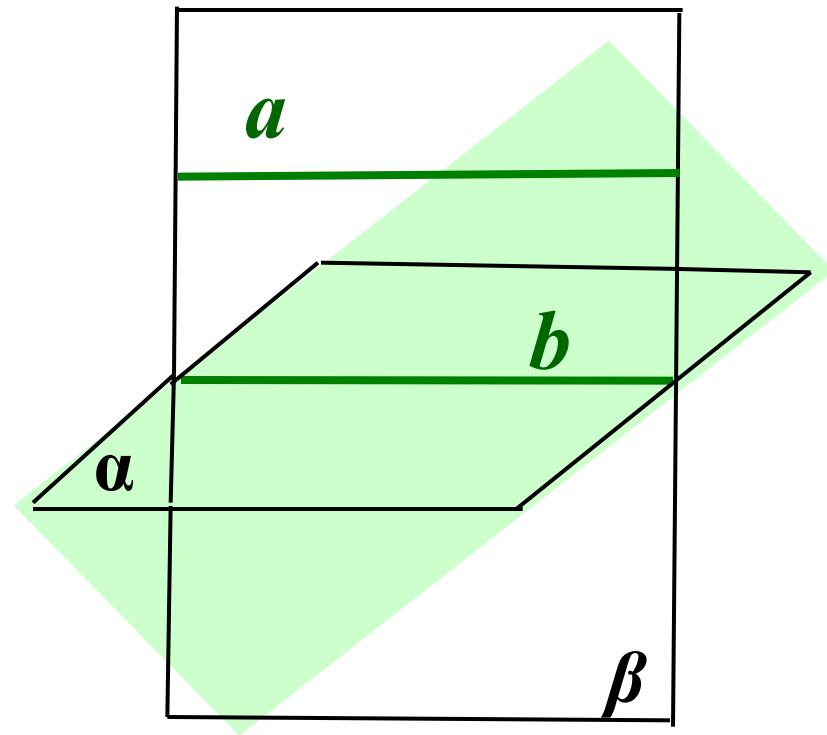
Если подводная лодка идёт прямолинейно на одной глубине, значит, параллельно поверхности моря.



# Докажите еще два утверждения, которые часто используются при решении задач

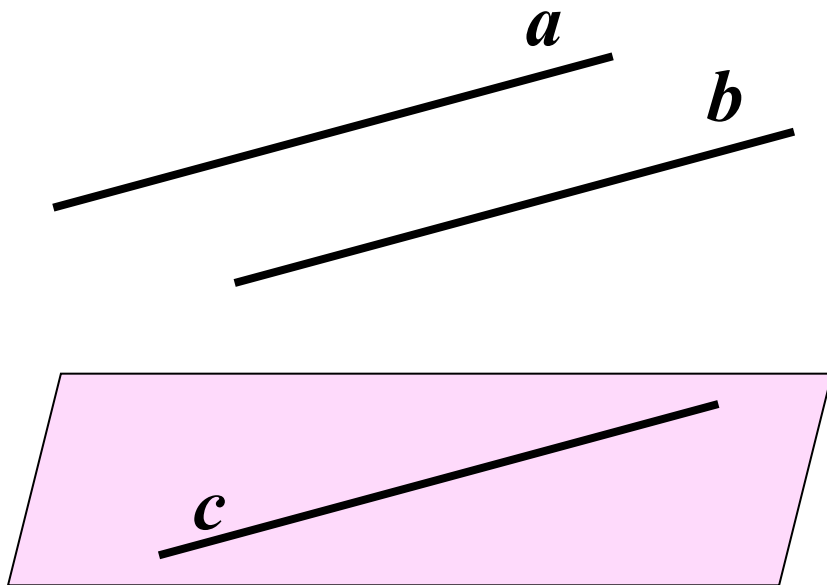
---

Если плоскость проходит  
через данную прямую,  
параллельную другой  
плоскости, и пересекает эту  
плоскость, то линия  
пересечения плоскостей  
параллельна данной  
прямой.



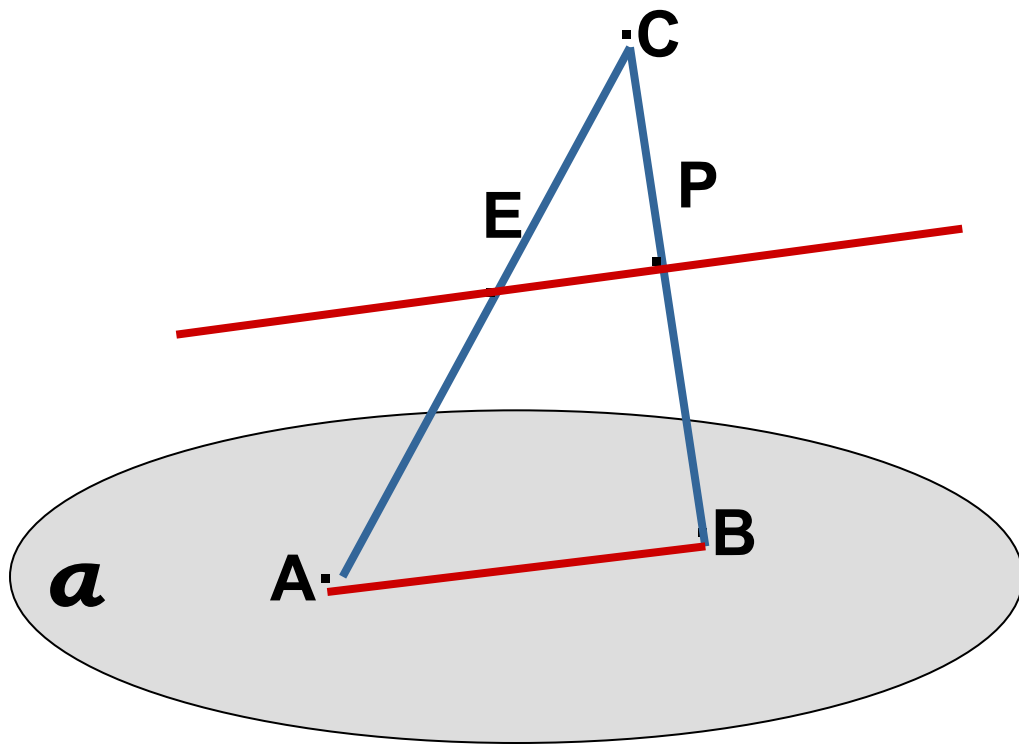


# Докажите еще два утверждения, которые часто используются при решении задач



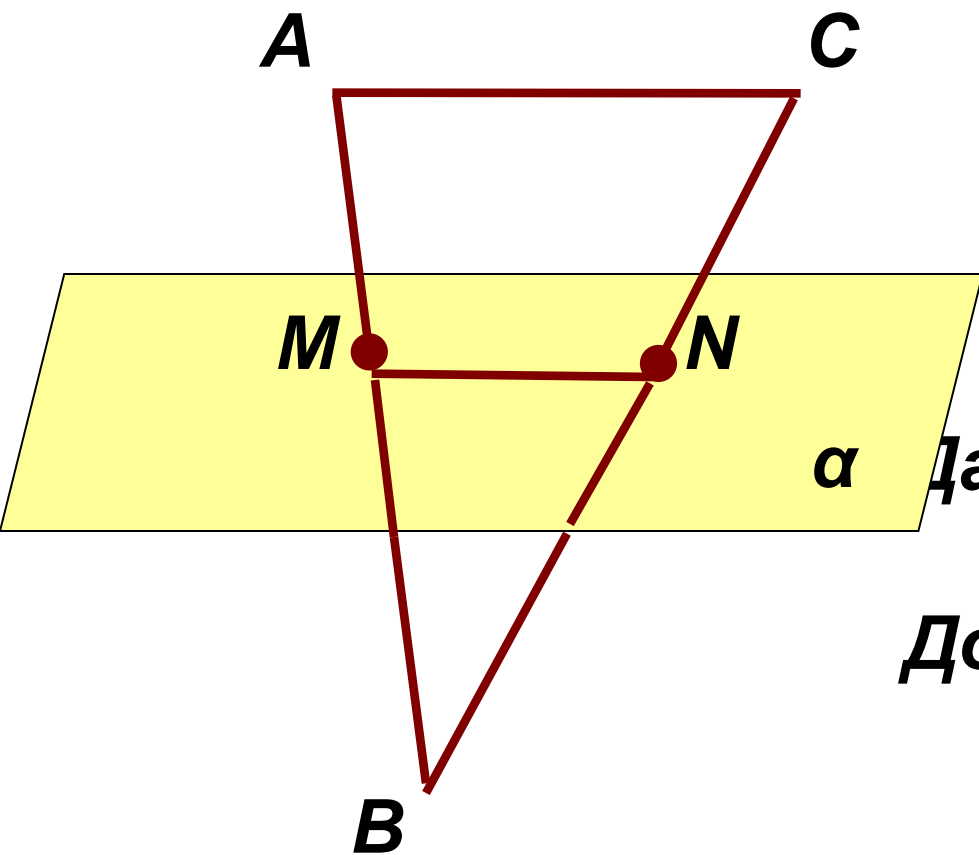
Если одна из двух  
параллельных  
прямых  
параллельна  
данной плоскости,  
то другая прямая  
либо также  
параллельна  
данной плоскости,  
либо лежит в этой  
плоскости.

**№ 22**



$$PE \parallel a$$

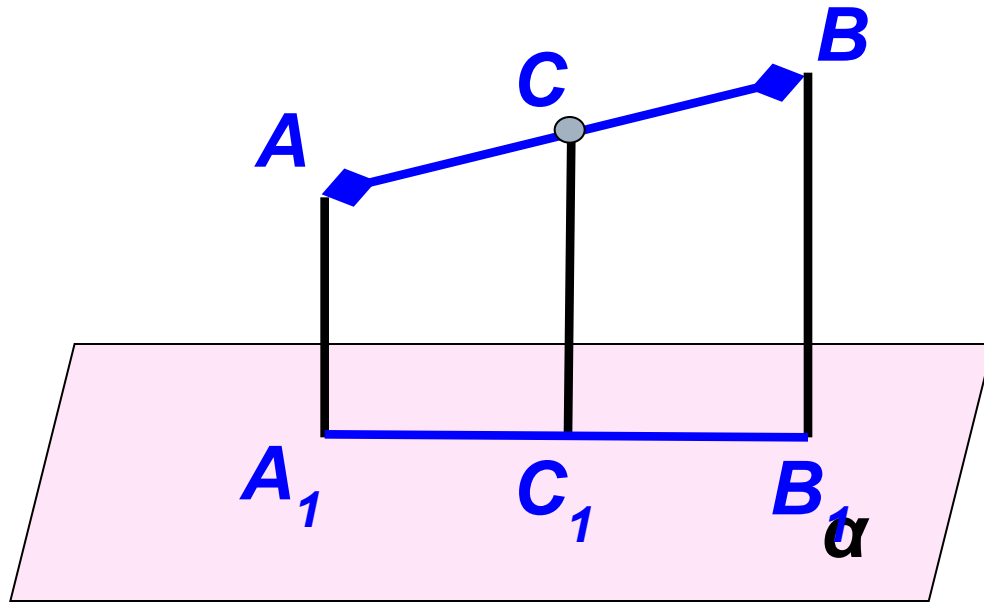
**№ 26**



**Дано:  $AC \parallel \alpha$ ,  $AB \cap \alpha = M$ ;  
 $CB \cap \alpha = N$ .**

**Доказать:  $\triangle ABC \sim \triangle MNB$ .**

Отрезок  $AB$  не пересекает плоскость  $\alpha$ . Через середину отрезка  $С$  и концы отрезка  $A$  и  $B$  проведены прямые, параллельные между собой и пересекающие плоскость  $\alpha$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ . Вычислить длину отрезка  $CC_1$ , если  $AA_1 = 5$ ,  $BB_1 = 7$ .



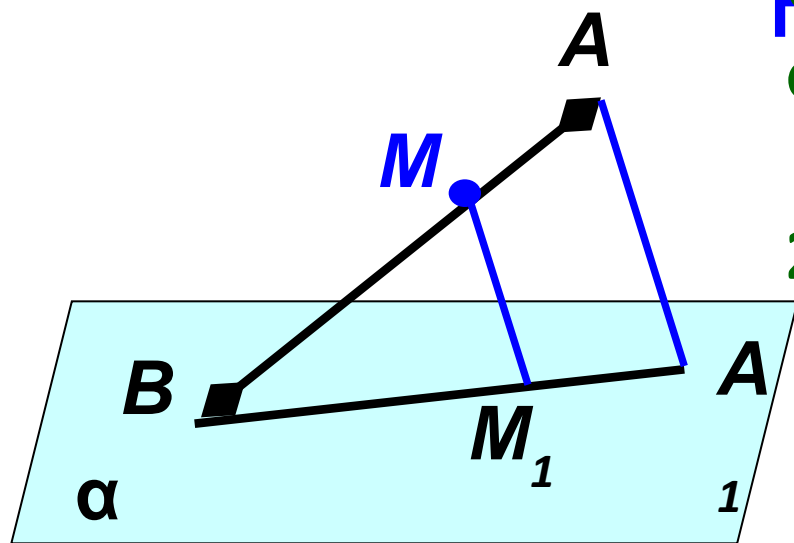
**Ответ: 6**

Точка  $M$  лежит на отрезке  $AB$ . Отрезок  $AB$  пересекает плоскость  $\alpha$  в точке  $B$ . Через  $A$  и  $B$  проведены параллельные прямые, пересекающие  $\alpha$  в точках  $A_1$  и  $M_1$ .

а) Докажите, что  $A_1$ ,  $M_1$  и  $B$

лежат на одной  
б) Найдите длину  
отрезка

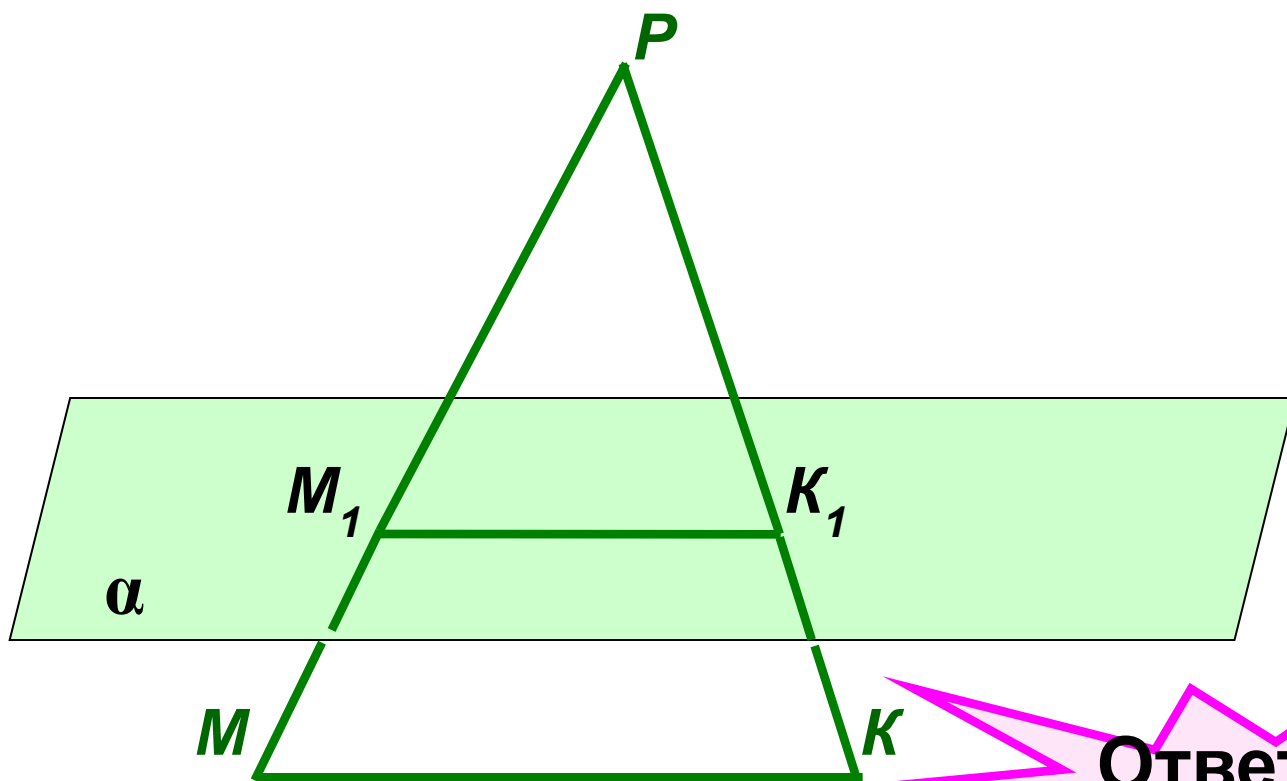
$AB$ , если  $AA_1 : MM_1 = 3 : 2$ ,  
 $AM = 6$ .



Ответ:

12

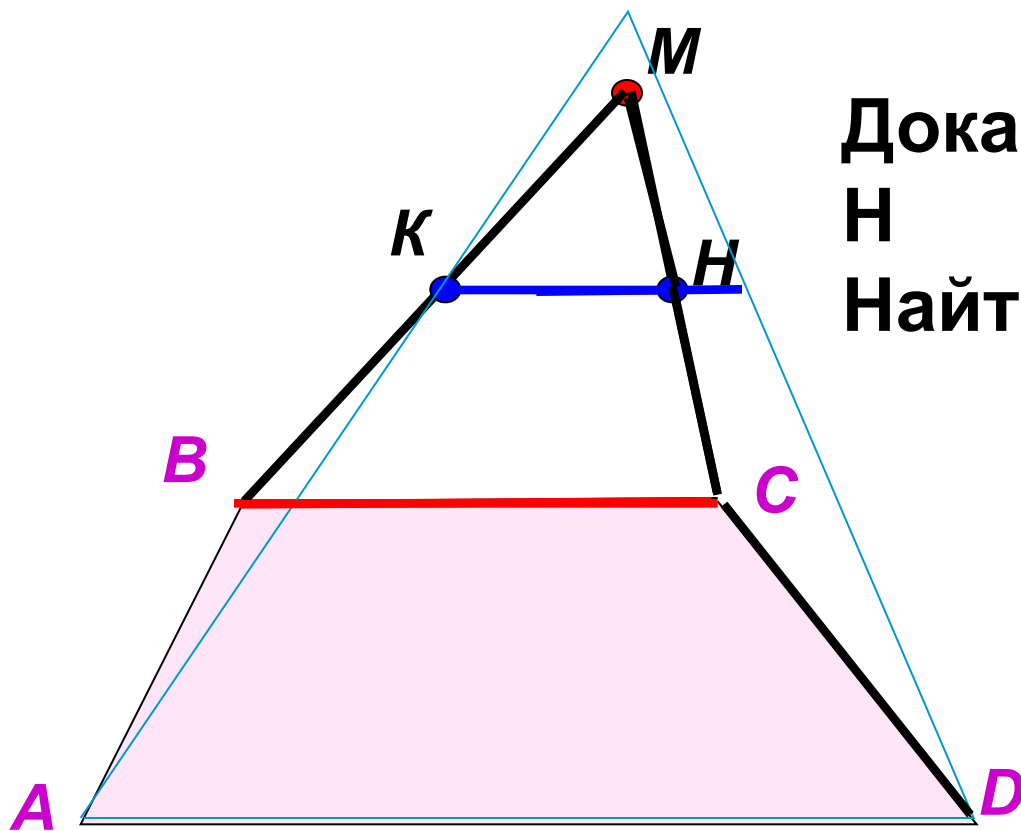
Дан треугольник  $МКР$ . Плоскость, параллельная прямой  $МК$ , пересекает  $МР$  в точке  $М_1$ ,  $РК$  – в точке  $К_1$ . Найдите  $М_1К_1$ , если  $МР : М_1Р = 12 : 5$ ,  $МК = 18$  см.



Ответ: 7,5  
см

№ 29

Дано:  $ABCD$  – трапеция,  $BC = 12$  см,  $M \in (ABC)$ ,  $BK = KM$ .



Доказать:  $(ADK) \cap MC = H$   
Найти:  $KH$ .

Ответ: 6

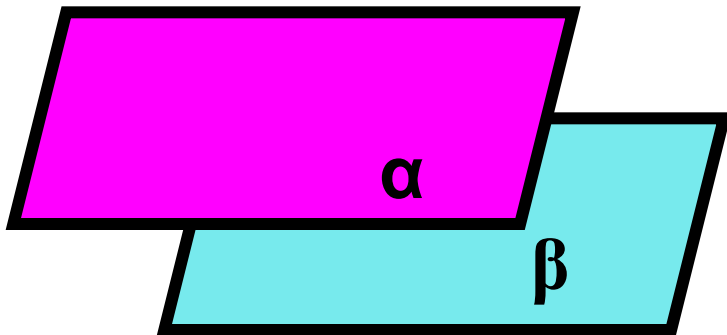
см

# Параллельность плоскостей

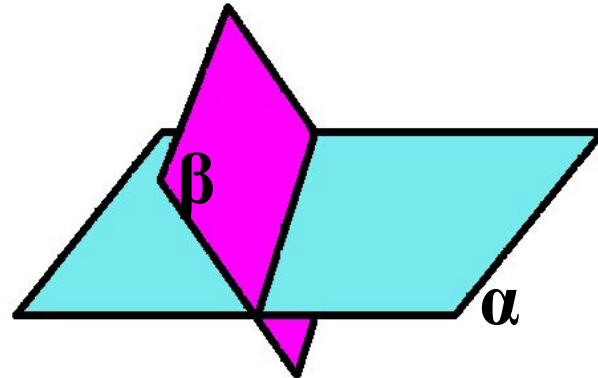
---

*Случаи взаимного расположения  
плоскостей в пространстве*

плоскости  
параллельны



плоскости  
пересекаются

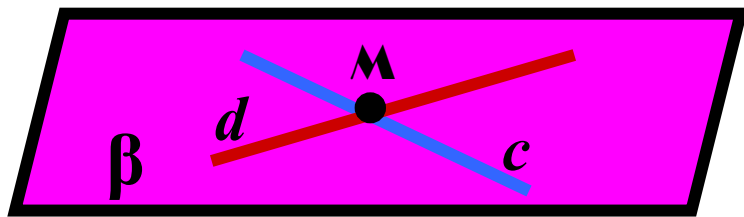
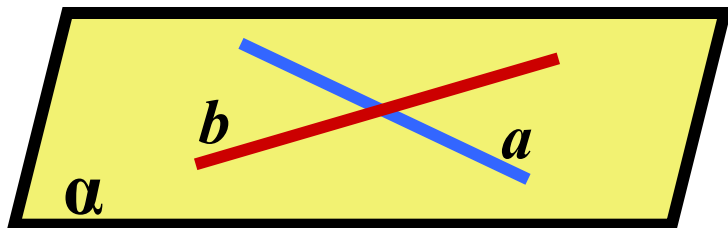




# Определени

**е:**

Две плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются.



## Теорема

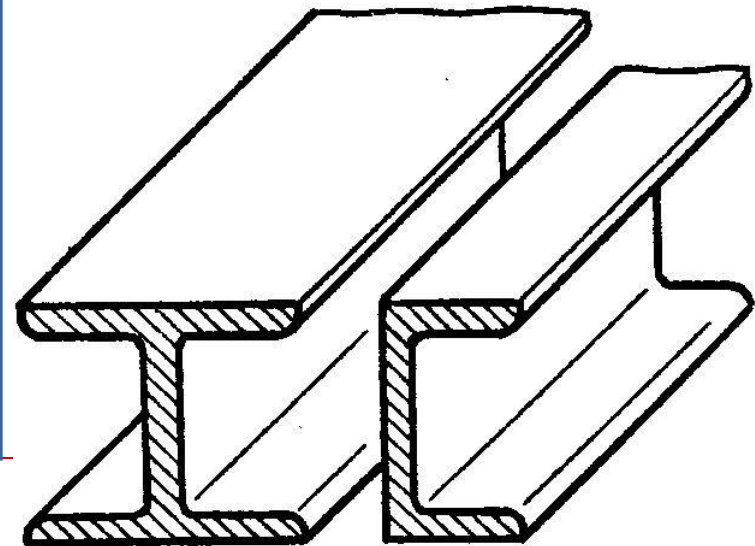
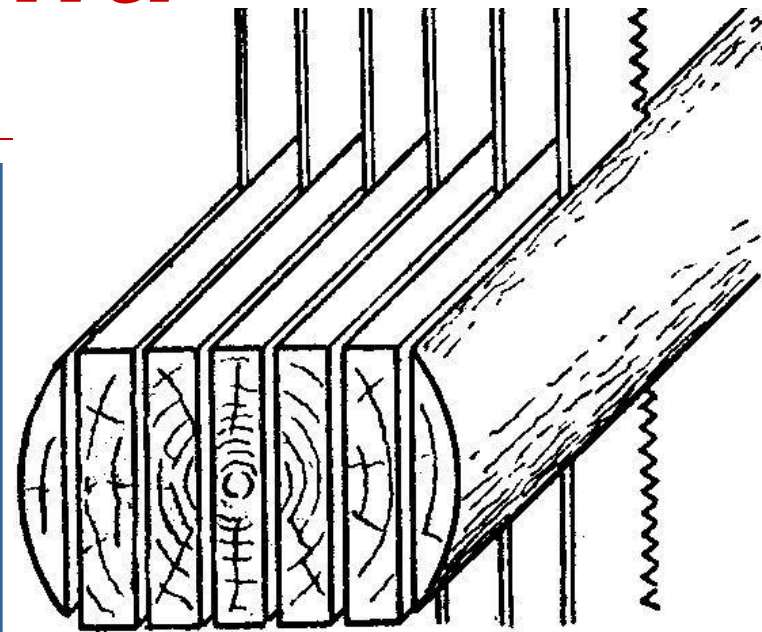
*Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.*

**? Докажите**

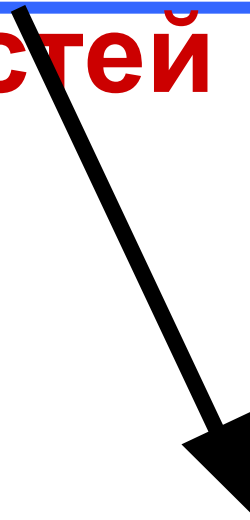
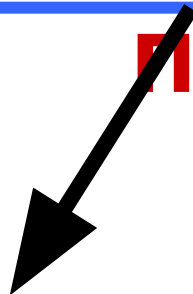
# ПЛОСКОСТИ

В параллельных плоскостях размещают перекрытия этажей многоэтажных зданий, стёкла двойных окон, верхние грани лестничных ступенек.

Параллельны слои фанеры, пилы, распиливающие бревно на доски, противоположные грани кирпича, швеллера, двутавровой балки и др.



# Свойства параллельных плоскостей



*Если две  
параллельные  
плоскости  
пересечены третьей,  
то линии их  
пересечения  
параллельны.*

*Отрезки  
параллельных  
прямых,  
заклученные  
между*

*?* Докажите свойства (стр. *параллельными*)

# А теперь небольшой тест!

1. Верно ли утверждение: если две прямые не имеют общих точек, то они параллельны?
2. Точка  $M$  не лежит на прямой  $a$ . Сколько прямых, не пересекающих прямую  $a$ , проходит через точку  $M$ ? Сколько из этих прямых параллельны прямой  $a$ ?
3. Прямые  $a$  и  $c$  параллельны, а прямые  $a$  и  $b$  пересекаются. Могут ли прямые  $b$  и  $c$  пересекаться. Могут ли прямые  $b$  и  $c$  быть параллельны?
4. Прямая  $a$  параллельна плоскости  $\alpha$ . Верно ли, что эта прямая не пересекает ни одну прямую, лежащую в плоскости  $\alpha$ ?
5. Прямая  $a$  параллельна плоскости  $\alpha$ . Сколько прямых, лежащих в плоскости  $\alpha$ , параллельны прямой  $a$ ? Параллельны ли друг другу эти прямые, лежащие в плоскости  $\alpha$ ?
6. Могут ли быть равны два непараллельных отрезка, заключенные между параллельными плоскостями?
7. Две стороны параллелограмма параллельны плоскости  $\alpha$ . Параллельны ли плоскость  $\alpha$  и плоскость параллелограмма?

# Сверим ответы!

---

**1.** -

**2.**  $\infty, 1$

**3.** +, -

**4.** +

**5.**  $\infty, +$

**6.** -

**7.** +

---

# Используемая литература

---

Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф. и другие.  
Геометрия. 10-11 классы. Учебник  
для общеобразовательных  
учреждений. – М.: Просвещение,  
2003. – 208 с.

---