БГТУ им. В.Г. Шухова
Кафедра информационных технологий

Дискретная математика

Коломыцева Елена Павловна, 2020

Тема 1 Множества

Множества

Понятие множества относится к неопределяемым понятиям.

Множество состоит из некоторых объектов различных и различаемых, которые называются ***элементами множества.***

Например:

N- Множество натуральных чисел.

N_0 - множество натуральных чисел и 0.

Z- Множество целых чисел.

Q - Множество рациональных чисел. Множество Q так же можно представить в виде множества дробей $\frac{p}{q}$, где p и q – целые числа.

R- Множество действительных чисел.

Одинаковые элементы, входящие во множество, не различаются и считаются один раз.

Порядок элементов во множестве не определен.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым*** **-** Ø.

Способы задания множества:

1) Перечислением всех элементов множества. A={3,1,2,5}.
2) С помощью характеристического свойства.

$B=\{x \in R / (x+3)<4\}$ или

$B=\{x\in (-\infty;1)\}$.

3) Процедурой. $A=\{x^2 / x\in N\}$

Подмножества

Пусть задано множество A. Множество B, состоящее из элементов множества A, называется ***подмножеством A.***

Например. A={a, w, b, c} и B={w, a,b}, тогда B $\subset$ A или A $\supset$ B (B включается в A или A включается в B).

Множество A является собственным подмножеством.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым Ø.***

Пустое множество является подмножеством любого множества.

Равенство множеств

Два множества называются ***равными***, если они состоят из одних и тех же элементов.

A={3, 2, a}. B={a, 3, a, 3, 2, a}. Имеем A=B.

Теорема. Множество A ровняется множеству B, если A является подмножеством B, а B является подмножеством A.

Доказательство:

1) Пусть $x \in A$ и $A \subset B$. По определению подмножества $x \in B$. Так как x- произвольный элемент A, то все элементы множества A $\in$ множеству B.

2) Пусть $x \in B$ и $B \subset A$. По определению подмножества $x \in A$. Так как x- произвольный элемент B, то все элементы множества B $\in$ множеству A.

3) Так как все элементы множества A $\in$ множеству B, а все элементы множества B $\in$ множеству A, то по определению равенства множеств A=B.

Что и требовалось доказать.

Все множества рассматриваются как подмножества некоторого универсального множества **U**.

Мощность множеств

Количество элементов, входящих во множество, называется его ***мощностью***.

Для бесконечных множеств говорить о количестве элементов не имеет смысла, но говорить о мощности множества можно.

Два множества называются ***равномощными***, если существует метод, позволяющий каждому элементу одного множества поставить в соответствие элемент другого множества.

Пример:

Имеется множество натуральных чисел и имеется множество четных чисел. Равномощны ли они?

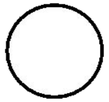
Ответ: Да.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10\ldots \end{array}$$

Множества, равномощные множеству натуральных чисел, называются ***счетными*.**

Алгебра множеств. Операции над множествами.

Условимся U изображать в виде прямоугольника 

а множество А-  (круги Эйлера-Венна)

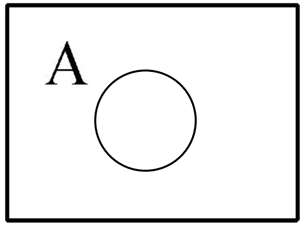


Рис.1. Множества А и U.

1).Объединение множеств.   A U B.

Объединением множеств А и В называется множество, состоящее из элементов, входящих или в А, или в В.

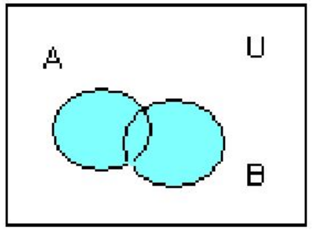
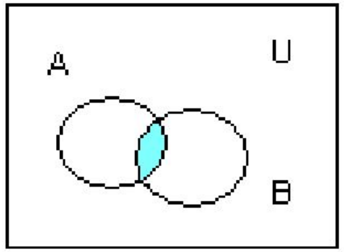


Рис.2. Объединение множеств.

2).Пересечение.   A∩B.

Пересечением двух множеств называется множество, состоящее из элементов, входящих и в А, и в В.



3).Разность. A\B.

Разностью множеств А и В называется множество, состоящее из элементов, входящих в А, но не входящих в В.

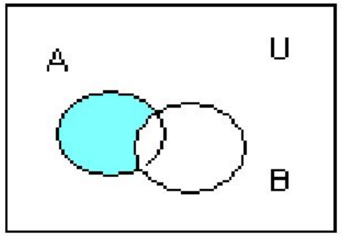


Рис.4.Разность множеств.

1) Дополнение. $\bar{A}$.

Дополнением множества А называется множество, состоящее из элементов не входящих в А.

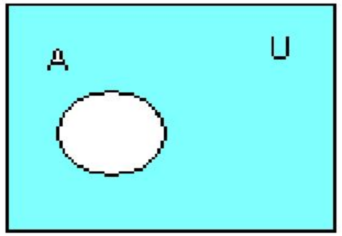


Рис.5.Дополнение множества А.

5.Симметрическая разность A Δ B.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество, состоящее из тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B и тех элементов множества B, которые не принадлежат множеству A.

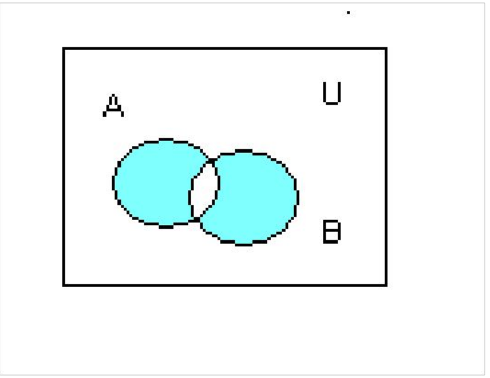


Рис.4.Симметрическая разность множеств.

Включение множеств

Множество** А*, все элементы которого принадлежат множеству В, называется ***подмножеством множества В.

Обозначение. Нестрогое включение обозначается $A \subseteq B$, означает, что А - несобственное подмножество множества В, возможно совпадающее с В. Строгое включение обозначается $A \subset B$, и означает, что А - подмножество множества В, не совпадающее с В. $A \subset B$ читается "А включено в В".

Отличия $A \subset B$ и $A \subseteq B$ заключается в том, что отношение $A \subseteq B$ допускает и ***тождественность*** (А=В), т.е. любое множество можно рассматривать как подмножество самого себя $(A \subseteq A)$, в то время как символ ***строгого включения*** $(A \subset B)$ ставится тогда, когда мы хотим подчеркнуть, что $A \neq B$, то есть во множестве В содержатся не только элементы множества А. Выполнение соотношений $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$ возможно только при А=В. И обратно, А=В, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Эти соотношения являются признаком ***равенства множеств*** через отношение включения. Заметим, что иногда в литературе символом ▯ обозначают "нестрогое" включение, допускающее и равенство множеств. В этом случае символ ▯ не используется, а строгое включение записывают двумя соотношениями $A \subseteq B$, $A \neq B$.

Свойства операций

1) Коммутативность.
$A \cup B = B \cup A$. $A \cap B = B \cap A$.
2) Ассоциативность.
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
3) Дистрибутивность.
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
4) Законы Де-Моргана.
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
5) $A \cup A = A$ $A \cap A = A$
6) $A \cup \varnothing = A$ $A \cap \varnothing = \varnothing$
7) $A \cup U = U$ $A \cap U = A$
8) $A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \varnothing$
9) $\overline{\overline{A}} = A$
10) $A \setminus B = \overline{B} \cap A$

Разбиение множества на классы

Пусть задано некоторое множество, например множество треугольников. В этом множестве выделим свойство α (например, быть прямоугольным). Тогда множество разбивается на два класса: прямоугольные и непрямоугольные.

Разбиение множества на классы (классификация) означает, что данное множество А разбивается на подмножества $k_1, k_2, .., k_m$ таких, что

1) Эти подмножества попарно не пересекаются, то есть

$k_i \cap k_j = \varnothing$ (i, j=1,…m, i≠j)

2) Объединение всех подмножеств дает множество А

$$\bigcup_{i=1}^{m} k_i = A$$

3) Ни одно из подмножеств не пусто

$k_i \neq \varnothing$

Пример: Пусть имеется А - множество всех грибов.

Свойства:

1) α_1 -быть съедобным грибом.

2) α_2 -быть трубчатым грибом.

Таким образом, с помощью этих свойств мы получаем 4 подмножества:

съедобные и несъедобные

трубчатые и не трубчатые

Такое разбиение классификацией не является, так как эти подмножества могут пересекаться, и пересечение не пусто.

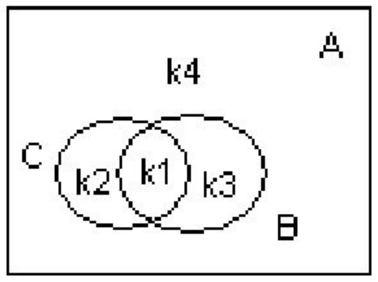
Пусть В-множество съедобных грибов, а С - множество трубчатых.

k_1 =B∩C-съедобные и трубчатые.

k_2 =B∩$\overline{C}$ -съедобные и не трубчатые.

k_3 = $\overline{B}$ ∩C-несъедобные и трубчатые

k_4 = $\overline{B}$ ∩ $\overline{C}$ -несъедобные и не трубчатые.



Декартово (прямое) произведение множеств

Пусть у нас имеется два элемента a_1 и a_2. Пара (a_1, a_2) называется ***упорядоченной***. 1-ый элемент ее - a_1, 2-ой- a_2.

Пары (a_1, a_2) и (b_1, b_2) считаются ***равными,*** если $a_1 = b_1$, а $a_2 = b_2$;

Пример1

Пара (a_1, a_2)=(a_2, a_1), если только $a_1 = a_2$.

Пусть заданы два множества

A={$\grave{a}_1, \grave{a}_2, \ldots, \grave{a}_n$} и B={$b_1, b_2, \ldots b_m$}.

Декартовым или прямым произведением множества А на множество В называется множество упорядоченных пар, 1-ый элемент которых принадлежит множеству А , а 2-ой множеству В.

Обозначается декартово произведение знаком X.

Для данных множеств получим

AxB={$(\grave{a}_1, b_1)$,$(\grave{a}_1, b_2)$,...,$(\grave{a}_1, b_m)$,...,(a_2, b_1),...,$(\grave{a}_n, b_m)$}

Мощность декартового произведения равна nm.

Обозначение: |A X B|=nm.

Пример:

A= {1, 4} и B {2, 3, 4}. A X B={(1,2),(1,3),(1,4),(4,2),(4,3),(4,4)}

Геометрически каждой паре чисел соответствует точка координатной плоскости.

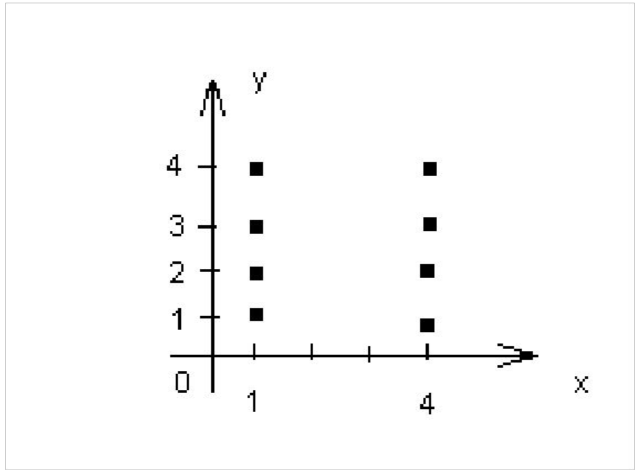


Рис.8. Декартово произведение A X B для конечных A и B.

Пример2

$A=\{x \in R, \setminus x \in [-1; 2]\};$
$B=\{y \in Z, \setminus y \in [-3; 3]\};$

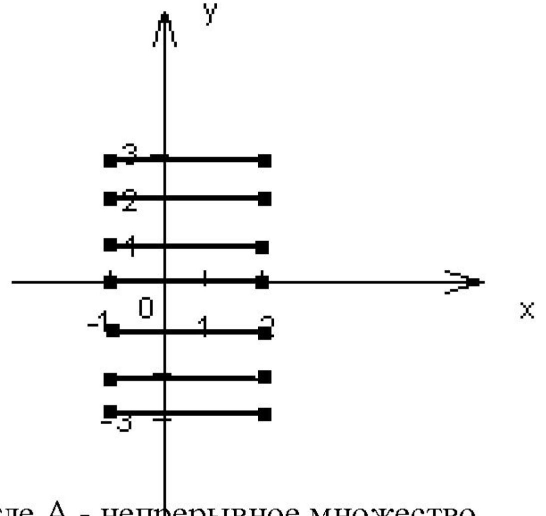


Рис.9. A x B, где A - непрерывное множество.

Пример 3.

$A=\{x \in R, \setminus x \in [-1; 2]\};$
$B=\{y \in R, \setminus y \in [-3; +\infty)\};$

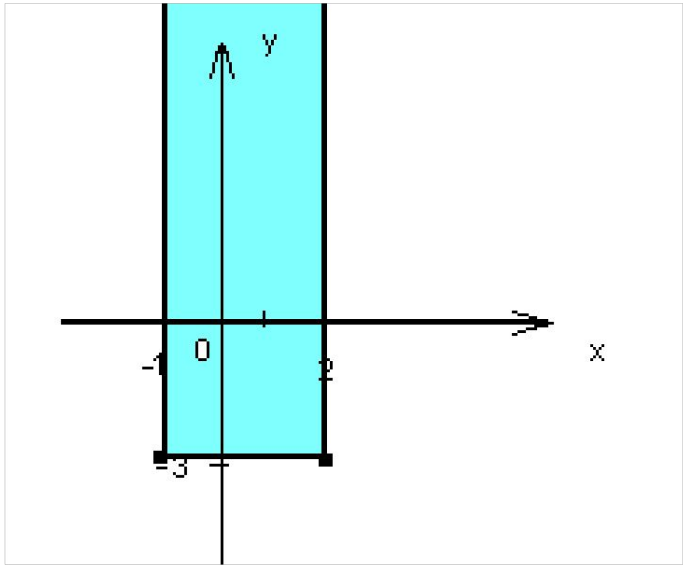


Рис.10.Декатрово произведение A X B. Оба множества непрерывны.

Декартова степень.

Если в качестве множества B в декартовом произведении выбрать множество A, мы будем говорить о декартовом квадрате.

$$A \times A = A^2$$

$$A \times A^2 = A^3$$

…

$$A \times A^{n-1} = A^n$$

Набор n-элементов будем зазывать ***кортежем.***

Декартовым произведением n-множеств

$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n$ будем называть множество упорядоченных кортежей, 1-ый элемент которых принадлежит множеству A_1, 2-ой множеству A_2 и т.д.

Свойства Декартового произведения.

1) $A \times B \neq B \times A$.
2) $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$.
3) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
4) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
5) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.
6) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
7) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.
8) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

Отношения.

Пусть заданы два множества A и B. Найдем A X B.

Подмножество $k \subset A \ X \ B$ называется ***отношением из множества A во множество B.***

Отношения задаются знаками $=, <, >, \leq, \geq$ и т.д.

Пример:

A={2,3,4}, B={1,4,3}

A X B={(2,1),(2,4),(2,3),(3,1),(3,4),(3,3),(4,1),(4,4),(4,3)}

Выделим отношения больше $>$ k_1={(2,1),(3,1),(4,1),(4,3)}

и меньше $<$ k_2={(2,4),(2,3),(3,4)}

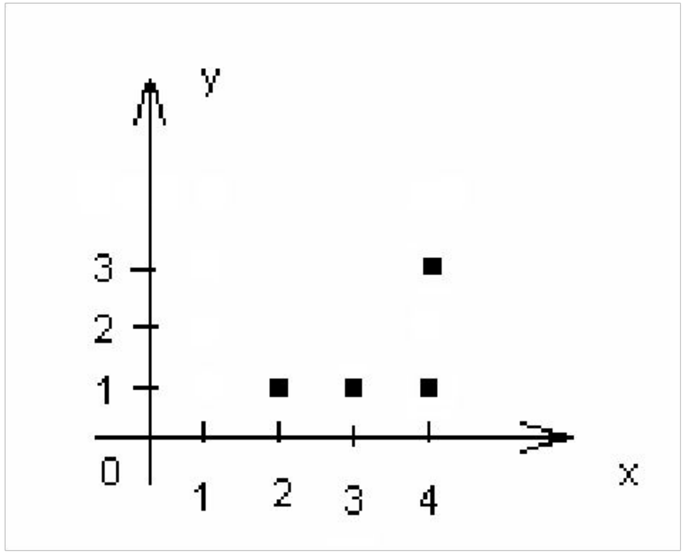


Рис.11. Отношение >.

Композиция отношений.

Пусть отношение $k_1 \subset A \times C$ и отношение $k_2 \subset C \times B$.

Композицией этих отношений является отношение $k = k_1 \circ k_2$, где $k \in A \times B$.

Композицией отношений из A в B называется множество пар (a,b) таких, что, $a \in A$, $b \in B$ и существует такое $c \in C$, что $(a, c) \in k_1$ и $(c,b) \in k_2$.

Пример:

A={2,3,4}, B={1,4,3}, C={2,5}

A X B={(2,1),(2,4),(2,3),(3,1),(3,4),(3,3),(4,1),(4,4),(4,3)}

A X C={(2,2),(2,5),(3,2),(3,5),(4,2),(4,5)}

C X B={(2,1),(5,1),(2,4),(5,4),(2,3),(5,3)}

Определим отношение

>: $k_1 \subset A \times C$={(3,2),(4,2)} и отношение < $k_2 \subset C \times B$= {(2, 4), (2, 3)}

Возьмем пару $(3,2) \in k_1$. В k_2 есть пары, начинающиеся с 2. Это пары (2,4) и (2,3). Значит пары (3, 4) и (3, 3) войдут в композицию k.

Берем пару $(4,2) \in k_1$. В k_2 есть пары, начинающиеся с 2. Это те же пары (2,4) и (2,3). Значит пары (4, 4) и (4, 3) войдут в k.

Получим $k = k_1 \circ k_2 = (k \in AXB)$= {(3, 4), (3, 3), (4, 4), (4, 3)}

Таким образом, для элемента $(2,4) \in$ A X B, в k войдут {(2,x), (y,4)}, где $(2,x) \subset k_1$, а $(y,4) \subset k_2$ для всех x и y.

Отношения на множестве.

Если в декартовом произведении в качестве множества B выбрать множество A (то есть A X A= A^2), то отношение *k из* A^2 называется ***отношением на множестве.***

Для отношений на множестве вводятся понятия:

Обратное отношение-это множество пар (a,b) таких, что (b,a) $\in$ A^2.

Обозначение k^{-1}

Дополнение-это множество пар (a,b) $\notin$ *k*. Обозначение $\overline{k}$

Тождественное отношение-множество пар (a, a) таких, что, a $\in$ A,

I= {(a, a), a $\in$ A}

Универсальное отношение *U*={(a,b),a $\in$ A, b $\in$ A}

Виды отношений

1) Инъекция.

Если каждый элемент множества A соответствует элементу из множества B, то отношение f называется инъективным.

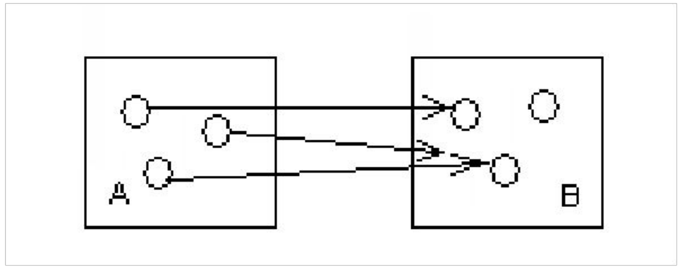
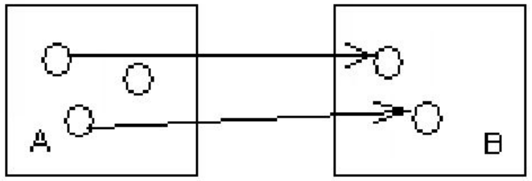


Рис.12.Инъекция.

2) Сюръекция.

Если для каждого элемента y множества B существует элемент $x \in A$, соответствующий элементу y, то такое отношение f называется сюръекцией.



3) Биекция.

Если для каждого элемента $y \in B$ существует ровно один элемент $x \in A$, которому соответствует y , то такое отношение называется биективным.

Биективное отношение инъективно и сюръективно.

Биективное отношение имеет обратное отношение.

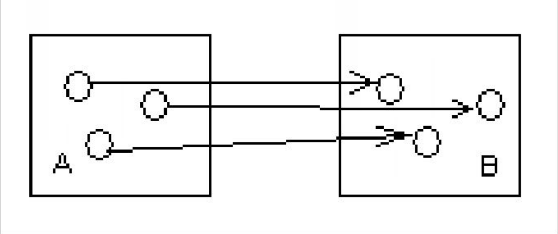


Рис.14. Биекция.

Функции.

Пусть заданы множества A и B. Найдем A X B.

Выберем отношение f $\subset$ AXB={$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots$}, состоящее из пар таких, что $a_i \neq a_j$, i=1,2,3,…., то есть отношение, в которой все первые элементы пар различны. Такие отношения называются ***функциями.***

Способы задания:

$A \xrightarrow{F} B$; f: $A \longrightarrow B$; b=f (a); a f b.

Пример: A={2,3,4}, B={1,4,3}

A X B={(2,1),(2,4),(2,3),(3,1),(3,4),(3,3),(4,1),(4,4),(4,3)}

Выделим: функции f_1={(2,1),(3,1),(4,1)} и f_2={(2,4),(3,1),(4,1)}

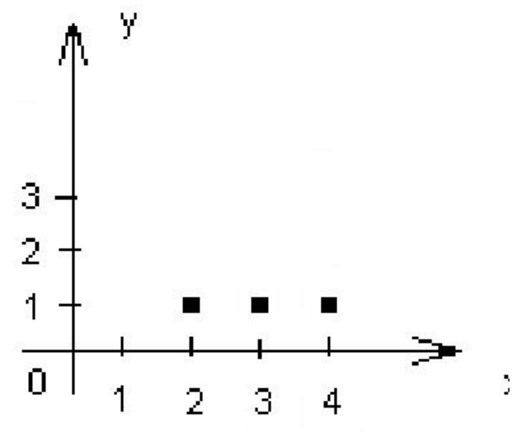


Рис.15.Функция f_1.

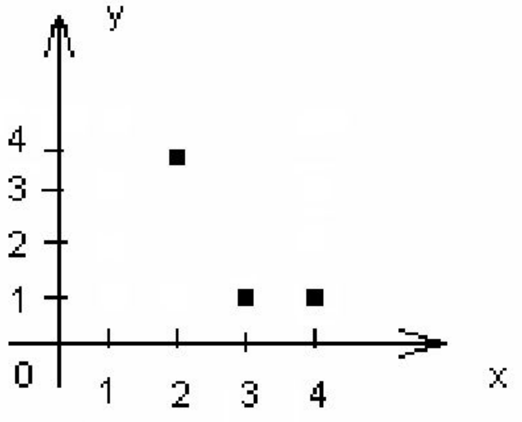


Рис.16.Функция f_2.

Тема 2 Комбинаторика

Комбинаторика.

Задачи, в которых требуется определить количество возможных операций, называется ***комбинаторными.***

Пусть имеется группа некоторых объектов $\alpha_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$, которые мы будем называть ***элементами.***

Из этой группы элементов будем образовывать подгруппы. Такие подгруппы будем называть ***соединениями.***

Из этих соединений выделим классы, которые будем называть ***размещениями.***

Размещения.

Размещениями из m-элементов по n называются соединения, каждое из которых содержит n элементов, взятых из данных m и которые отличаются друг от друга или элементами, или их порядком.

Предполагается, что элементы водном размещении не повторяются.

Формула числа размещений без повторений.

Размещения из m по одному. Очевидно, что их число: $A_m^1 = m$

Составим размещения по 2:

$\alpha_1, a_2, a_1a_3, a_1a_4, \ldots, a_1a_m$ -размещений (m-1)

$$\text{m-строк} \begin{cases} a_2a_1, a_2a_3, a_2a_4, \ldots, a_2a_m \\ a_3a_1, a_3a_2, a_3a_4, \ldots, a_3a_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_ma_1, a_ma_2, a_ma_3, \ldots, a_ma_{m-1} \end{cases}$$

Итого: $A_m^2 = m(m-1)$

Размещения.

Размещения по 3: В каждой строке будет (m-2) размещений

$$A_m^2 \text{ -строк} \begin{cases} a_1a_2a_3, a_1a_2a_4, \ldots, a_1a_2a_m \\ a_1a_3a_2, a_1a_3a_4, \ldots, a_1a_3a_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_ma_{m-1}a_1, a_ma_{m-1}a_2, \ldots, a_ma_{m-1}a_{m-2} \end{cases}$$

Ясно, что $A_m^3 = A_m^2(m-2)=m(m-1)(m-2)$

$A_m^4 = m(m-1)(m-2)(m-3)$

…………………………………

$\boldsymbol{A_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots.(m-(n-1))} \qquad \boldsymbol{(\ *\ )}$

Размещения.

Пример:

В группе 21 студент. Требуется выбрать старосту, профорга и физорга. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

Каждая тройка студентов может отличаться от другой тройки или распределением обязанностей, или хотя бы одним из студентов, то есть мы должны вычислить число размещений из 21 по 3:

$m=21$, $n=3$.

$A_{21}^{3}=21*20*19=7980$.

Размещения.

Другой вид формулы числа размещений.

Умножим числитель и знаменатель формулы (*) на (m-n)! Получим

$$A_m^n = \frac{m*(m-1)*(m-n+1)*(m-n)*(m-n-1).....2*1}{(m-n)*(m-n-1)....2*1}$$, или

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Каждое размещение содержит одно и то же количество элементов, взятых из данных m.

Перестановки.

Размещения из n-элементов по n, каждое из которых отличается друг от друга только порядком элементов, называются ***перестановками.***

Их число обозначается P_n:

$P_n = A_n^n = n*(n-1)*(n-2).....2*1$, то есть $P_n = n!$

Пример:

Сколькими способами могут сесть 6 человек на 6-местную лавочку?

Решение:

В данном случае каждое расположение лиц на лавочке отличается от другого расположения только порядком. Поэтому мы имеем дело с перестановками:

$P_6 = 6! = 720.$

Сочетания.

Сочетания - это размещения, каждое из которых отличается от других хотя бы одним элементом.

Другими словами: ***Сочетания*** - это соединения, содержащие n элементов из данных m, отличающиеся хотя бы одним элементом.

Число сочетаний C_m^n. Если мы имеем m- элементов, и из них составим всевозможные сочетания по n и внутри каждого произведем перестановку, то получим размещения.

$C_m^n * P_n = A_m^n$ отсюда

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}$$

Сочетания.

Пример:

В группе 20 студентов. Требуется выбрать 5 делегатов на конференцию. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

Так как внутри каждой пятерки делегатов перестановки дают одну и ту же пятерку, то каждая пятерка должна отличаться от других хотя бы одним делегатом. В данном случае мы должны посчитать число сочетаний из 20 по 5:

$$C_{20}^{5} = \frac{20!}{15!*5!} = 15504.$$

Свойства сочетаний.

1) $C_m^n = C_m^{m-n}$, достаточно выписать формулы левой и правой части равенства.

2) $C_0^0 = \frac{0!}{(0-0)!0!} = 1$, т.к. по определению 0!=1

3) $C_1^0 = \frac{1!}{1!*0!} = 1$, т.к. по определению 1!=1

4) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

Доказательство:

$$C_{n-1}^{k-1} + \quad C_{n-1}^k = \quad \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} =$$

$$\frac{(n-1)!*k+(n-1)!*(n-k)}{k!*(n-k)!} = \frac{(n-1)!*(k+n-k)}{k!*(n-k)!} = \frac{(n-1)!*n}{k!*(n-k)!} =$$

$$\frac{n!}{k!*(n-k)!} = C_n^k$$

Что и требовалось доказать.

1) $C_n^k = C_n^{k-1} * \frac{(n-k+1)}{k}$

Доказательство:

$$\frac{C_n^k}{C_n^{k-1}} = \frac{n!*(k-1)!(n-(k-1))!}{k!*(n-k)!*n!} = \frac{(n-k+1)}{k}$$, следовательно, $C_n^k = C_n^{k-1}$

$* \frac{(n-k+1)}{k}$.

Что и требовалось доказать.

Размещения с повторениями.

До сих пор мы рассматривали комбинации элементов, которые в каждой комбинации не повторялись. Рассмотрим размещения из m-элементов по n, в которых каждый элемент может повторяться. Такие размещения называются ***размещениями с повторениями:*** $\hat{A}_m^n$.

Рассмотрим задачу.

В лифт 9 этажного дома на 1-ом этаже вошло 10 человек, каждый из которых может выйти на любом этаже, начиная со второго. Сколькими способами они могут выйти из лифта?

Решение:

Каждый из пассажиров может выйти 8 способами. Два пассажира могут выйти $\hat{A}_8^2=8*8=8^2=64$. Десять человек могут выйти $\hat{A}_8^{10}=8^{10}$.

Таким образом, так как каждый элемент попадает в комбинацию m способами, где n комбинаций, то

$$\hat{A}_m^n = m^n.$$

Задача о числе подмножеств данного множества.

Пусть имеется М={ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ }. Пустое множество Ø входит в это множество как подмножество. Одноэлементные множества тоже. Поставим каждому подмножеству кортеж длиной n, состоящий из 0 и 1.

0-если соответствующий элемент не входит в подмножество.

1-если входит.

Например, подмножеству $\{a_2, a_4\}$ будет соответствовать кортеж 010100000….0000…

Для вех подмножеств получим (0,0,0,…0), (1,0,0,…0), (0,1,0,0,...,0)… (1,1,1,…1)

Кортежей столько, сколько подмножеств. Это размещения, состоящие из двух элементов (0 и 1) и отличающиеся друг от друга либо элементами, либо их порядком. Это размещения с повторениями из двух по n: Получим

$\bar{A}_2^n = 2^n$.

Таким образом, мы доказали ***теорему***:

Число подмножеств n-элементного множества равно 2^n.

Следствие: Так как число пустых подмножеств C_n^0 (0)=1, одноэлементных-C_n^1 =n, двухэлементных-C_n^2, трехэлементных-C_n^3, n-элементных C_n^n, то сумма

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k = 2^n.$$

Перестановки с повторениями.

Пусть мы имеем n элементов $\grave{a}_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, P_n=***n*!**. Пусть элемент $\grave{a}_1$ повторяется k_1 раз, элемент $\grave{a}_2$ - k_2 раз,…., $\grave{a}_n$ - k_n раз, где $\sum_{i=1}^{n} k_i = n$. Тогда число различных перестановок будет в k_1! меньше за счет одинаковых элементов $\grave{a}_1$, в k_2! раз меньше за счет одинаковых элементов $\grave{a}_2$,…и в k_n! раз меньше за счет одинаковых элементов $\grave{a}_n$. Тогда число различных перестановок будет равно:

$$P_n(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{n!}{k_1!*k_2!*\ldots*k_n!}.$$

Пример:

Сколько различных перестановок можно составить из слова МОЛОТОК?

Решение:

k_1(М)=1; k_2(О)=3; k_3(Л)=1; k_5(Т)=1; k_7(К)=1;

$$P_7(1,3,1,1,1) = \frac{7!}{1!*3!*1!*1!*1!} = 840.$$

Сочетания с повторениями.

Пример:

На почте имеются открытки четырех видов: красные, желтые, зеленые и синие. Требуется 10 открыток. Сколькими способами можно их скомбинировать?

Решение:

Пусть мы отобрали 4 красных, 2 желтых, 2 зеленых и 2 синих открытки. Составим кортеж из 0 и 1. Выпишем столько единиц, сколько красная открытка встречается в нашем наборе, и поставим 0: 11110. Затем добавим кортеж для желтых -110. Получим 11110110. Добавим кортеж для зеленых и синих открыток. В последнем 0 не ставим. Получим кортеж 1111011011011. В нем 10 единиц и 3 нуля. Общая длина кортежа – 13. Таких кортежей можно составить столько, сколько перестановок с повторениями из 13.

$P_{13}(10,3)=\dfrac{13!}{10!*3!}$=286 – это и будет число сочетаний с повторениями из 4 по 10.

$P_{13}(10,3)= C^{10}_{13}$ Таким образом, $\hat{C}^{10}_{4} = C^{10}_{13}$.

В общем случае.

Сочетания с повторениями.

Пусть мы имеем n элементов $\grave{a}_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, из которых создаются сочетания с повторениями, и каждое сочетание содержит k элементов. Составим кортеж, который запишем вначале столько единиц, сколько элемент $\grave{a}_1$ входит в сочетание, затем запишем 0. припишем кортеж из единиц и нуль для элемента a_2 и т.д. без последнего нуля. Получим: 111…1011…10…11…1

Единиц – k. Нулей – n-1. Длина кортежа n+ k-1

Общее число сочетаний с повторениями

$$\hat{C}_n^k = P_{n+k-1}(k,\text{n-}(k\text{-}1)) = \frac{(n+k-1)!}{k!*(n-(k-1))!} = C^k_{n+k-1},$$

Итак, $\hat{C}_n^k = C^k_{n+k-1},$

Спасибо за внимание!