

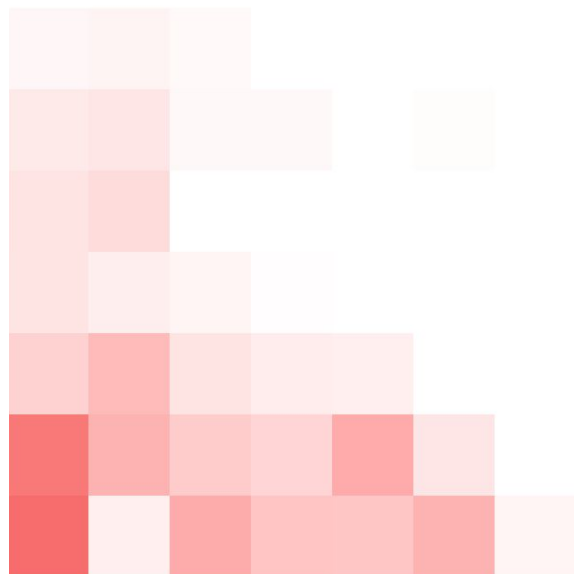
БГТУ им. В.Г. Шухова
Кафедра информационных технологий



Дискретная математика

Коломыцева Елена Павловна, 2020

Тема 1 Множества



Множества

Понятие множества относится к неопределяемым понятиям.

Множество состоит из некоторых объектов различных и различаемых, которые называются *элементами множества*.

Например:

N - Множество натуральных чисел.

N_0 - множество натуральных чисел и 0.

Z - Множество целых чисел.

Q - Множество рациональных чисел. Множество Q так же можно

представить в виде множества дробей $\frac{p}{q}$, где p и q – целые числа.

R - Множество действительных чисел.

Одинаковые элементы, входящие во множество, не различаются и считаются один раз.

Порядок элементов во множестве не определен.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* - \emptyset .

Способы задания множества:

1) Перечислением всех элементов множества. $A = \{3, 1, 2, 5\}$.

2) С помощью характеристического свойства.

$B = \{x \in R / (x+3) < 4\}$ или

$B = \{x \in (-\infty; 1)\}$.

3) Процедурой. $A = \{x^2 / x \in N\}$

Подмножества

Пусть задано множество A . Множество B , состоящее из элементов множества A , называется *подмножеством A* .

Например. $A = \{a, w, b, c\}$ и $B = \{w, a, b\}$, тогда $B \subset A$ или $A \supset B$ (B включается в A или A включается в B).

Множество A является собственным подмножеством.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым \emptyset* .

Пустое множество является подмножеством любого множества.

Равенство множеств

Два множества называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов.

$A = \{3, 2, a\}$. $B = \{a, 3, a, 3, 2, a\}$. Имеем $A = B$.

Теорема. Множество A равняется множеству B , если A является подмножеством B , а B является подмножеством A .

Доказательство:

1) Пусть $x \in A$ и $A \subset B$. По определению подмножества $x \in B$. Так как x - произвольный элемент A , то все элементы множества $A \in$ множеству B .

2) Пусть $x \in B$ и $B \subset A$. По определению подмножества $x \in A$. Так как x - произвольный элемент B , то все элементы множества $B \in$ множеству A .

3) Так как все элементы множества $A \in$ множеству B , а все элементы множества $B \in$ множеству A , то по определению равенства множеств $A = B$.

Что и требовалось доказать.

Все множества рассматриваются как подмножества некоторого универсального множества U .

Мощность множеств

Количество элементов, входящих во множество, называется его *мощностью*.

Для бесконечных множеств говорить о количестве элементов не имеет смысла, но говорить о мощности множества можно.

Два множества называются *равномощными*, если существует метод, позволяющий каждому элементу одного множества поставить в соответствие элемент другого множества.

Пример:

Имеется множество натуральных чисел и имеется множество четных чисел. Равномощны ли они?

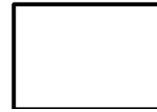
Ответ: Да.

1	2	3	4	5...
↓	↓	↓	↓	↓
2	4	6	8	10...

Множества, равномощные множеству натуральных чисел, называются *счетными*.

Алгебра множеств. Операции над множествами.

Условимся U изображать в виде прямоугольника



а множество A -  (круги Эйлера-Венна)

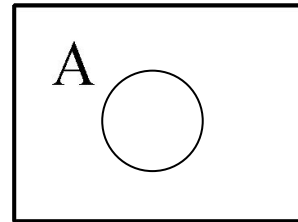


Рис. 1. Множества A и U .

1).Объединение множеств. $A \cup B$.

Объединением множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, входящих или в A , или в B .

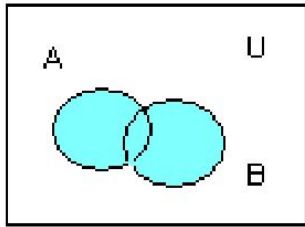
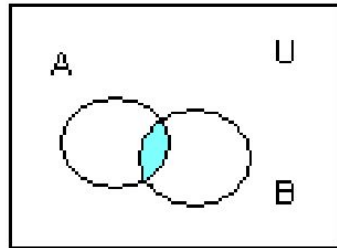


Рис.2. Объединение множеств.

2).Пересечение. $A \cap B$.

Пересечением двух множеств называется множество, состоящее из элементов, входящих и в A , и в B .



3).Разность. $A \setminus B$.

Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, входящих в A , но не входящих в B .

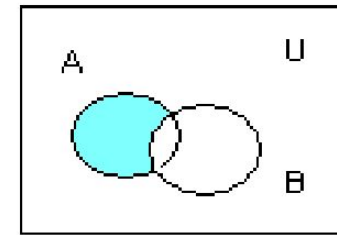


Рис.4.Разность множеств.

1) Дополнение. \bar{A} .

Дополнением множества A называется множество, состоящее из элементов не входящих в A .

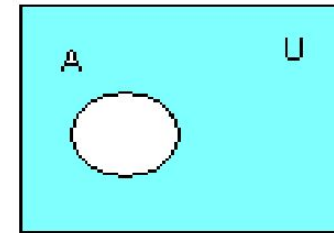


Рис.5.Дополнение множества A .

5. Симметрическая разность $A \Delta B$.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество, состоящее из тех элементов множества A , которые не принадлежат множеству B и тех элементов множества B , которые не принадлежат множеству A .

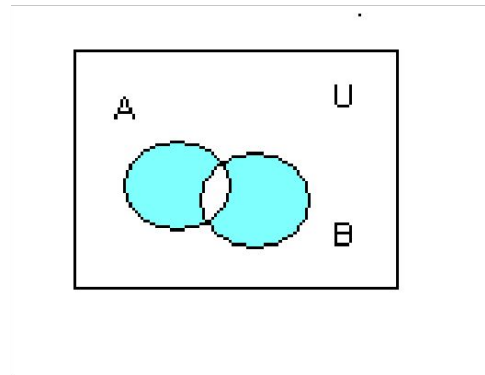


Рис.4. Симметрическая разность множеств.

Включение множеств

Множество A , все элементы которого принадлежат множеству B , называется *подмножеством* множества B .

Обозначение. Нестрогое включение обозначается $A \subseteq B$, означает, что A - несобственное подмножество множества B , возможно совпадающее с B . Строгое включение обозначается $A \subset B$, и означает, что A - подмножество множества B , не совпадающее с B . $A \subset B$ читается "А включено в В".

Отличия $A \subset B$ и $A \subseteq B$ заключается в том, что отношение $A \subseteq B$ допускает и *тождественность* ($A=B$), т.е. любое множество можно рассматривать как подмножество самого себя ($A \subseteq A$), в то время как символ *строгого включения* ($A \subset B$) ставится тогда, когда мы хотим подчеркнуть, что $A \neq B$, то есть во множестве B содержатся не только элементы множества A . Выполнение соотношений $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$ возможно только при $A=B$. И обратно, $A=B$, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Эти соотношения являются признаком *равенства множеств* через отношение включения. Заметим, что иногда в литературе символом \boxtimes обозначают "нестрогое" включение, допускающее и равенство множеств. В этом случае символ \boxtimes не используется, а строгое включение записывают двумя соотношениями $A \subseteq B, A \neq B$.

Свойства операций

- 1) Коммутативность.
 $A \cup B = B \cup A$. $A \cap B = B \cap A$.
- 2) Ассоциативность.
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$.
- 3) Дистрибутивность.
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- 4) Законы Де-Моргана.
 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- 5) $A \cup A = A$ $A \cap A = A$
- 6) $A \cup \emptyset = A$ $A \cap \emptyset = \emptyset$
- 7) $A \cup U = U$ $A \cap U = A$
- 8) $A \cap \overline{A} = \emptyset$ $A \cup \overline{A} = U$
- 9) $\overline{\overline{A}} = A$
- 10) $A \setminus B = \overline{B} \cap A$

Разбиение множества на классы

Пусть задано некоторое множество, например множество треугольников. В этом множестве выделим свойство α (например, быть прямоугольным). Тогда множество разбивается на два класса: прямоугольные и непрямоугольные.

Разбиение множества на классы (классификация) означает, что данное множество A разбивается на подмножества k_1, k_2, \dots, k_m таких, что

1) Эти подмножества попарно не пересекаются, то есть

$$k_i \cap k_j = \emptyset \quad (i, j=1, \dots, m, i \neq j)$$

2) Объединение всех подмножеств дает множество A

$$\bigcup_{i=1}^m k_i = A$$

3) Ни одно из подмножеств не пусто

$$k_i \neq \emptyset$$

Пример: Пусть имеется А - множество всех грибов.

Свойства:

1) α_1 -быть съедобным грибом.

2) α_2 -быть трубчатым грибом.

Таким образом, с помощью этих свойств мы получаем 4 подмножества:

съедобные и несъедобные
трубчатые и не трубчатые

Такое разбиение классификацией не является, так как эти подмножества могут пересекаться, и пересечение не пусто.

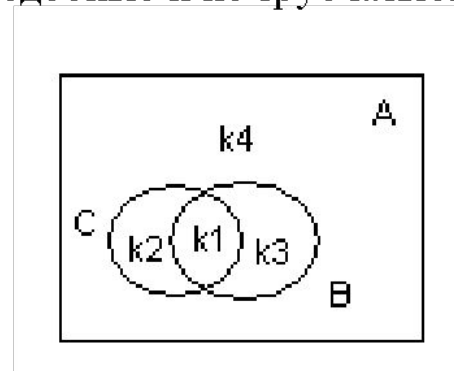
Пусть В-множество съедобных грибов, а С - множество трубчатых.

$k_1 = B \cap C$ -съедобные и трубчатые.

$k_2 = B \cap \bar{C}$ -съедобные и не трубчатые.

$k_3 = \bar{B} \cap C$ -несъедобные и трубчатые

$k_4 = \bar{B} \cap \bar{C}$ -несъедобные и не трубчатые.



Декартово (прямое) произведение множеств

Пусть у нас имеется два элемента a_1 и a_2 . Пара (a_1, a_2) называется *упорядоченной*. 1-ый элемент ее - a_1 , 2-ой- a_2 .

Пары (a_1, a_2) и (b_1, b_2) считаются *равными*, если $a_1 = b_1$, а $a_2 = b_2$;

Пара $(a_1, a_2) = (a_2, a_1)$, если только $a_1 = a_2$.

Пусть заданы два множества

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \text{ и } B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}.$$

Декартовым или прямым произведением множества A на множество B называется множество упорядоченных пар, 1-ый элемент которых принадлежит множеству A, а 2-ой множеству B.

Обозначается декартово произведение знаком X.

Для данных множеств получим

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), \dots, (a_1, b_m), \dots, (a_2, b_1), \dots, (a_n, b_m)\}$$

Мощность декартового произведения равна nm.

Обозначение: $|A \times B| = nm$.

Пример:

$$A = \{1, 4\} \text{ и } B = \{2, 3, 4\}. A \times B = \{(1,2), (1,3), (1,4), (4,2), (4,3), (4,4)\}$$

Геометрически каждой паре чисел соответствует точка координатной плоскости.

Пример1

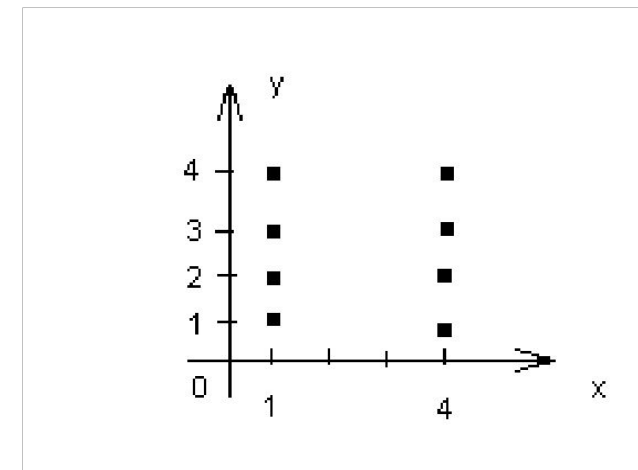


Рис.8. Декартово произведение $A \times B$ для конечных A и B.

Пример2

$$A = \{x \in \mathbb{R}, \ x \in [-1; 2]\};$$

$$B = \{y \in \mathbb{Z}, \ y \in [-3; 3]\};$$

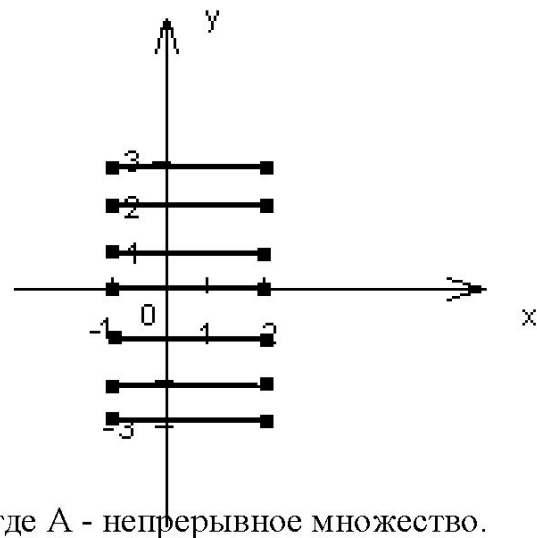


Рис.9. $A \times B$, где A - непрерывное множество.

Пример 3.

$$A = \{x \in \mathbb{R}, \ x \in [-1; 2]\};$$

$$B = \{y \in \mathbb{R}, \ y \in [-3; +\infty)\};$$

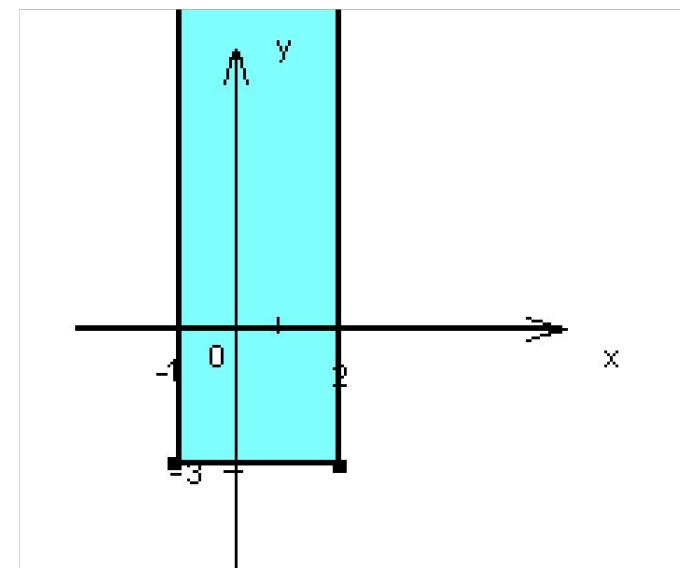


Рис.10. Декартово произведение $A \times B$. Оба множества непрерывны.

Декартова степень.

Если в качестве множества В в декартовом произведении выбрать множество А, мы будем говорить о декартовом квадрате.

$$A \times A = A^2$$

$$A \times A^2 = A^3$$

...

$$A \times A^{n-1} = A^n$$

Набор n-элементов будем зазывать *кортежем*.

Декартовым произведением n-множеств

$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n$ будем называть множество упорядоченных кортежей, 1-ый элемент которых принадлежит множеству A_1 , 2-ой множеству A_2 и т.д.

Свойства Декартового произведения.

- 1) $A \times B \neq B \times A$.
- 2) $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$.
- 3) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
- 4) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.
- 5) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.
- 6) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.
- 7) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.
- 8) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

Отношения.

Пусть заданы два множества A и B . Найдем $A \times B$.

Подмножество $k \subset A \times B$ называется *отношением из множества A во множество B* .

Отношения задаются знаками $=, <, >, \leq, \geq$ и т.д.

Пример:

$$A = \{2, 3, 4\}, B = \{1, 4, 3\}$$

$$A \times B = \{(2, 1), (2, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (3, 3), (4, 1), (4, 4), (4, 3)\}$$

Выделим отношения больше $>$ $k_1 = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (4, 3)\}$

и меньше $<$ $k_2 = \{(2, 4), (2, 3), (3, 4)\}$

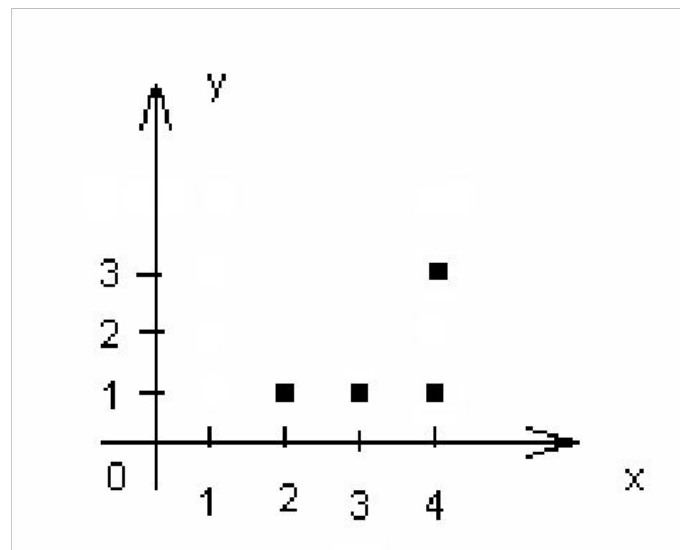


Рис.11. Отношение $>$.

Композиция отношений.

Пусть отношение $k_1 \subset A \times C$ и отношение $k_2 \subset C \times B$.

Композицией этих отношений является отношение $k = k_1 \circ k_2$, где $k \in A \times B$.

Композицией отношений из A в B называется множество пар (a,b) таких, что, $a \in A$, $b \in B$ и существует такое $c \in C$, что $(a, c) \in k_1$ и $(c,b) \in k_2$.

Пример:

$$A = \{2,3,4\}, \quad B = \{1,4,3\}, \quad C = \{2,5\}$$

$$A \times B = \{(2,1), (2,4), (2,3), (3,1), (3,4), (3,3), (4,1), (4,4), (4,3)\}$$

$$A \times C = \{(2,2), (2,5), (3,2), (3,5), (4,2), (4,5)\}$$

$$C \times B = \{(2,1), (5,1), (2,4), (5,4), (2,3), (5,3)\}$$

Определим отношение

$$\text{>: } k_1 \subset A \times C = \{(3,2), (4,2)\} \text{ и отношение } \text{< } k_2 \subset C \times B = \{(2,4), (2,3)\}$$

Возьмем пару $(3,2) \in k_1$. В k_2 есть пары, начинающиеся с 2. Это пары $(2,4)$ и $(2,3)$. Значит пары $(3,4)$ и $(3,3)$ войдут в композицию k .

Берем пару $(4,2) \in k_1$. В k_2 есть пары, начинающиеся с 2. Это те же пары $(2,4)$ и $(2,3)$. Значит пары $(4,4)$ и $(4,3)$ войдут в k .

$$\text{Получим } k = k_1 \circ k_2 = (k \in A \times B) = \{(3,4), (3,3), (4,4), (4,3)\}$$

Таким образом, для элемента $(2,4) \in A \times B$, в k войдут $\{(2,x), (y,4)\}$, где $(2,x) \in k_1$, а $(y,4) \in k_2$ для всех x и y .

Отношения на множестве.

Если в декартовом произведении в качестве множества B выбрать множество A (то есть $A \times A = A^2$), то отношение k из A^2 называется *отношением на множестве*.

Для отношений на множестве вводятся понятия:

Обратное отношение-это множество пар (a,b) таких, что $(b,a) \in A^2$.

Обозначение k^{-1}

Дополнение-это множество пар $(a,b) \notin k$. Обозначение \bar{k}

Тождественное отношение-множество пар (a, a) таких, что, $a \in A$,
 $I = \{(a, a), a \in A\}$

Универсальное отношение $U = \{(a,b), a \in A, b \in A\}$

Виды отношений

1) Инъекция.

Если каждый элемент множества A соответствует элементу из множества B , то отношение f называется инъективным.

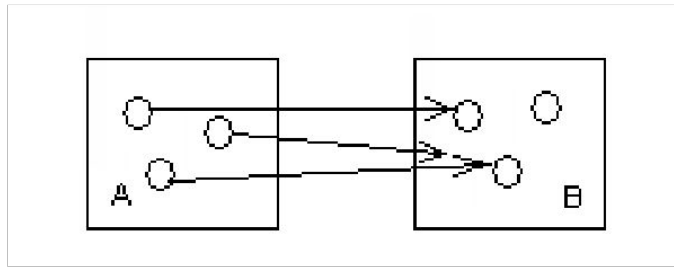
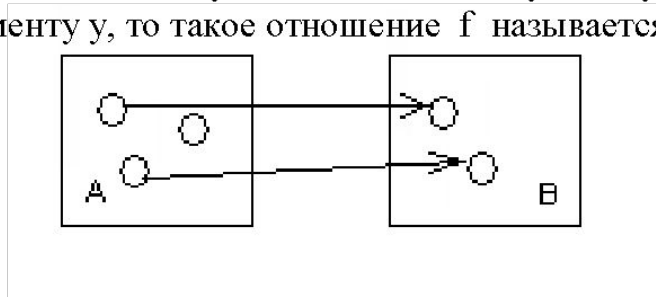


Рис.12.Инъекция.

2) Сюръекция.

Если для каждого элемента y множества B существует элемент $x \in A$, соответствующий элементу y , то такое отношение f называется сюръекцией.



3) Биекция.

Если для каждого элемента $y \in B$ существует ровно один элемент $x \in A$, которому соответствует y , то такое отношение называется биективным.

Биективное отношение инъективно и сюръективно.

Биективное отношение имеет обратное отношение.

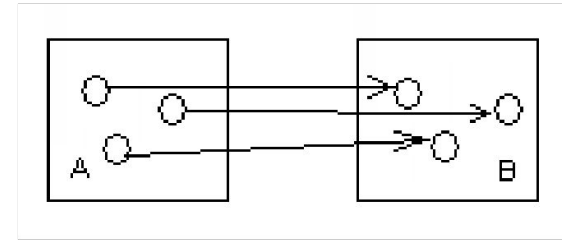


Рис.14. Биекция.

Функции.

Пусть заданы множества A и B . Найдем $A \times B$.

Выберем отношение $f \subset A \times B = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots\}$, состоящее из пар таких, что $a_i \neq a_j$, $i=1, 2, 3, \dots$, то есть отношение, в которой все первые элементы пар различны. Такие отношения называются **функциями**.

Способы задания:

$$A \xrightarrow{f} B; \quad f: A \longrightarrow B; \quad b=f(a); \quad a f b.$$

Пример: $A=\{2, 3, 4\}$, $B=\{1, 4, 3\}$

$$A \times B = \{(2, 1), (2, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (3, 3), (4, 1), (4, 4), (4, 3)\}$$

Выделим: функции $f_1 = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$ и $f_2 = \{(2, 4), (3, 1), (4, 1)\}$

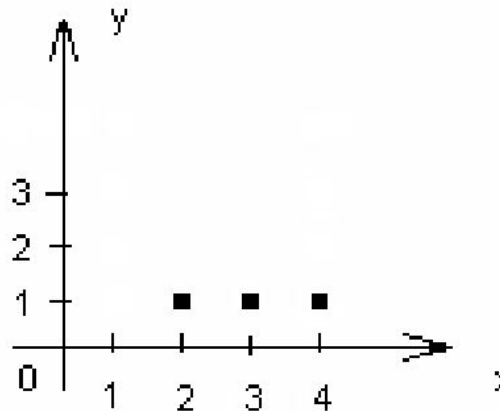


Рис.15. Функция f_1 .

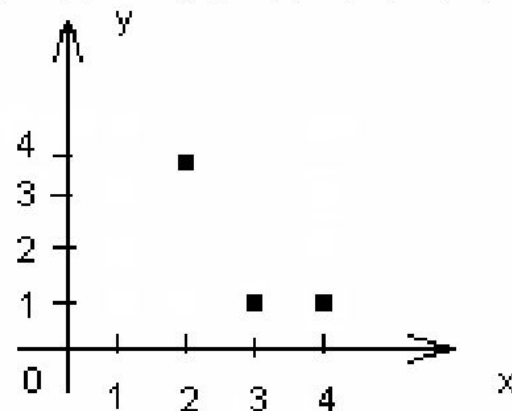
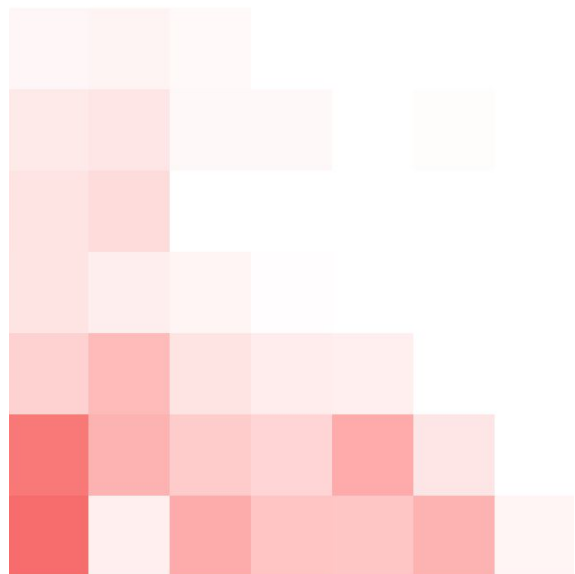


Рис.16. Функция f_2 .

Тема 2 Комбинаторика



Комбинаторика.

Задачи, в которых требуется определить количество возможных операций, называется *комбинаторными*.

Пусть имеется группа некоторых объектов $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$, которые мы будем называть *элементами*.

Из этой группы элементов будем образовывать подгруппы. Такие подгруппы будем называть *соединениями*.

Из этих соединений выделим классы, которые будем называть *размещениями*.

Размещения.

Пример:

В группе 21 студент. Требуется выбрать старосту, профорга и физорга. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

Каждая тройка студентов может отличаться от другой тройки или распределением обязанностей, или хотя бы одним из студентов, то есть мы должны вычислить число размещений из 21 по 3:

$$m=21, n=3.$$

$$A_{21}^3 = 21 * 20 * 19 = 7980.$$

Размещения.

Другой вид формулы числа размещений.

Умножим числитель и знаменатель формулы (*) на $(m-n)!$ Получим

$$A_m^n = \frac{m * (m - 1) * (m - n + 1) * (m - n) * (m - n - 1) \dots 2 * 1}{(m - n) * (m - n - 1) \dots 2 * 1}, \text{ или}$$

$$A_m^n = \frac{m!}{(m - n)!}$$

Каждое размещение содержит одно и то же количество элементов, взятых из данных m .

Перестановки.

Размещения из n -элементов по n , каждое из которых отличается друг от друга только порядком элементов, называются *перестановками*.

Их число обозначается P_n :

$$P_n = A_n^n = n * (n-1) * (n-2) * \dots * 2 * 1, \text{ то есть } P_n = n!$$

Пример:

Сколькими способами могут сесть 6 человек на 6-местную лавочку?

Решение:

В данном случае каждое расположение лиц на лавочке отличается от другого расположения только порядком. Поэтому мы имеем дело с перестановками:

$$P_6 = 6! = 720.$$

Сочетания.

Сочетания - это размещения, каждое из которых отличается от других хотя бы одним элементом.

Другими словами: *Сочетания* - это соединения, содержащие n элементов из данных m , отличающиеся хотя бы одним элементом.

Число сочетаний C_m^n . Если мы имеем m -элементов, и из них составим всевозможные сочетания по n и внутри каждого произведем перестановку, то получим размещения.

$$C_m^n * P_n = A_m^n \text{ отсюда}$$

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)!n!}$$

Сочетания.

Пример:

В группе 20 студентов. Требуется выбрать 5 делегатов на конференцию. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

Так как внутри каждой пятерки делегатов перестановки дают одну и ту же пятерку, то каждая пятерка должна отличаться от других хотя бы одним делегатом. В данном случае мы должны посчитать число сочетаний из 20 по 5:

$$C_{20}^5 = \frac{20!}{15! * 5!} = 15504.$$

Свойства сочетаний.

1) $C_m^n = C_m^{m-n}$, достаточно выписать формулы левой и правой части равенства.

2) $C_0^0 = \frac{0!}{(0-0)!0!} = 1$, т.к. по определению $0! = 1$

3) $C_1^0 = \frac{1!}{1!*0!} = 1$, т.к. по определению $1! = 1$

4) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

Доказательство:

$$\begin{aligned} C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \\ \frac{(n-1)!*k + (n-1)!*(n-k)}{k!*(n-k)!} &= \frac{(n-1)!*(k+n-k)}{k!*(n-k)!} = \frac{(n-1)!*n}{k!*(n-k)!} = \\ \frac{n!}{k!*(n-k)!} &= C_n^k \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

1) $C_n^k = C_n^{k-1} * \frac{(n-k+1)}{k}$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \frac{C_n^k}{C_n^{k-1}} &= \frac{n!*(k-1)!(n-(k-1))!}{k!*(n-k)!*n!} = \frac{(n-k+1)}{k}, \text{ следовательно, } C_n^k = C_n^{k-1} \\ &* \frac{(n-k+1)}{k}. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

Размещения с повторениями.

До сих пор мы рассматривали комбинации элементов, которые в каждой комбинации не повторялись. Рассмотрим размещения из m -элементов по n , в которых каждый элемент может повторяться. Такие размещения называются **размещениями с повторениями**: \hat{A}_m^n .

Рассмотрим задачу.

В лифт 9 этажного дома на 1-ом этаже вошло 10 человек, каждый из которых может выйти на любом этаже, начиная со второго. Сколькими способами они могут выйти из лифта?

Решение:

Каждый из пассажиров может выйти 8 способами. Два пассажира могут выйти

$\hat{A}_8^2 = 8 * 8 = 8^2 = 64$. Десять человек могут выйти $\hat{A}_8^{10} = 8^{10}$.

Таким образом, так как каждый элемент попадает в комбинацию m способами, где n комбинаций, то

$$\hat{A}_m^n = m^n.$$

Задача о числе подмножеств данного множества.

Пусть имеется $M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$. Пустое множество \emptyset входит в это множество как подмножество. Одноэлементные множества тоже. Поставим каждому подмножеству кортеж длиной n , состоящий из 0 и 1.

0-если соответствующий элемент не входит в подмножество.

1-если входит.

Например, подмножеству $\{a_2, a_4\}$ будет соответствовать кортеж 01010000...0000...

Для всех подмножеств получим $(0,0,0,\dots,0)$, $(1,0,0,\dots,0)$, $(0,1,0,0,\dots,0)$... $(1,1,1,\dots,1)$

Кортежей столько, сколько подмножеств. Это размещения, состоящие из двух элементов (0 и 1) и отличающиеся друг от друга либо элементами, либо их порядком. Это размещения с повторениями из двух по n : Получим

$$\hat{A}_2^n = 2^n.$$

Таким образом, мы доказали *теорему*:

Число подмножеств n -элементного множества равно 2^n .

Следствие: Так как число пустых подмножеств $C_n^0 = 1$, одноэлементных $C_n^1 = n$, двухэлементных C_n^2 , трехэлементных C_n^3 , n -элементных C_n^n , то сумма

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n.$$

Перестановки с повторениями.

Пусть мы имеем n элементов $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, $P_n = n!$. Пусть элемент a_1 повторяется k_1 раз, элемент a_2 - k_2 раз, ..., a_n - k_n раз, где $\sum_{i=1}^n k_i = n$. Тогда число различных перестановок будет в $k_1!$ меньше за счет одинаковых элементов a_1 , в $k_2!$ раз меньше за счет одинаковых элементов a_2, \dots и в $k_n!$ раз меньше за счет одинаковых элементов a_n . Тогда число различных перестановок будет равно:

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{n!}{k_1! * k_2! * \dots * k_n!}.$$

Пример:

Сколько различных перестановок можно составить из слова МОЛОТОК?

Решение:

$$k_1(M)=1; k_2(O)=3; k_3(Л)=1; k_5(Т)=1; k_7(К)=1;$$

$$P_7(1,3,1,1,1) = \frac{7!}{1! * 3! * 1! * 1! * 1!} = 840.$$

Сочетания с повторениями.

Пример:

На почте имеются открытки четырех видов: красные, желтые, зеленые и синие. Требуется 10 открыток. Сколькими способами можно их скомбинировать?

Решение:

Пусть мы отобрали 4 красных, 2 желтых, 2 зеленых и 2 синих открытки. Составим кортеж из 0 и 1. Выпишем столько единиц, сколько красная открытка встречается в нашем наборе, и поставим 0: 11110. Затем добавим кортеж для желтых -110. Получим 11110110. Добавим кортеж для зеленых и синих открыток. В последнем 0 не ставим. Получим кортеж 1111011011011. В нем 10 единиц и 3 нуля. Общая длина кортежа – 13. Таких кортежей можно составить столько, сколько перестановок с повторениями из 13.

$$P_{13}(10,3) = \frac{13!}{10! \cdot 3!} = 286 \text{ – это и будет число сочетаний с повторениями из 4 по 10.}$$

$$P_{13}(10,3) = C_{13}^{10} \quad \text{Таким образом,} \quad \hat{C}_4^{10} = C_{13}^{10}.$$

В общем случае.

Сочетания с повторениями.

Пусть мы имеем n элементов $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, из которых создаются сочетания с повторениями, и каждое сочетание содержит k элементов. Составим кортеж, который запишем вначале столько единиц, сколько элемент a_1 входит в сочетание, затем запишем 0. припишем кортеж из единиц и нуль для элемента a_2 и т.д. без последнего нуля. Получим: 111... 1011... 10... 11... 1

Единиц – k . Нулей – $n-1$. Длина кортежа $n+k-1$

Общее число сочетаний с повторениями

$$\hat{C}_n^k = P_{n+k-1}(k, n-(k-1)) = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-(k-1))!} = C_{n+k-1}^k,$$

Итак, $\hat{C}_n^k = C_{n+k-1}^k,$



Спасибо за
внимание!