

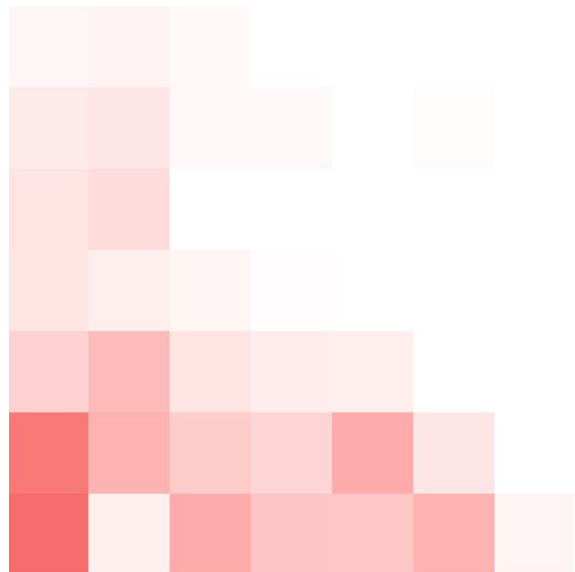
БГТУ им. В.Г. Шухова  
Кафедра информационных технологий



# Дискретная математика

Коломыцева Елена Павловна, 2020

# Тема 1 Множества



# Множества

Понятие множества относится к неопределяемым понятиям.

*Множество* состоит из некоторых объектов различных и различаемых, которые называются *элементами множества*.

Например:

$N$ - Множество натуральных чисел.

$N_0$  - множество натуральных чисел и 0.

$Z$ - Множество целых чисел.

$Q$  - Множество рациональных чисел. Множество  $Q$  так же можно

представить в виде множества дробей  $\frac{p}{q}$ , где  $p$  и  $q$  – целые числа.

$R$ - Множество действительных чисел.

Одинаковые элементы, входящие во множество, не различаются и считаются один раз.

Порядок элементов во множестве не определен.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* -  $\emptyset$ .

**Способы задания множества:**

1) Перечислением всех элементов множества.  $A = \{3, 1, 2, 5\}$ .

2) С помощью характеристического свойства.

$B = \{x \in R / (x+3) < 4\}$  или

$B = \{x \in (-\infty; 1)\}$ .

3) Процедурой.  $A = \{x^2 / x \in N\}$

# Подмножества

Пусть задано множество  $A$ . Множество  $B$ , состоящее из элементов множества  $A$ , называется *подмножеством  $A$* .

Например.  $A = \{a, w, b, c\}$  и  $B = \{w, a, b\}$ , тогда  $B \subset A$  или  $A \supset B$  ( $B$  включается в  $A$  или  $A$  включается в  $B$ ).

Множество  $A$  является собственным подмножеством.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым  $\emptyset$* .

Пустое множество является подмножеством любого множества.

# Равенство множеств

Два множества называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов.

$A = \{3, 2, a\}$ .  $B = \{a, 3, a, 3, 2, a\}$ . Имеем  $A = B$ .

**Теорема.** Множество  $A$  равняется множеству  $B$ , если  $A$  является подмножеством  $B$ , а  $B$  является подмножеством  $A$ .

Доказательство:

1) Пусть  $x \in A$  и  $A \subset B$ . По определению подмножества  $x \in B$ . Так как  $x$ - произвольный элемент  $A$ , то все элементы множества  $A \in$  множеству  $B$ .

2) Пусть  $x \in B$  и  $B \subset A$ . По определению подмножества  $x \in A$ . Так как  $x$ - произвольный элемент  $B$ , то все элементы множества  $B \in$  множеству  $A$ .

3) Так как все элементы множества  $A \in$  множеству  $B$ , а все элементы множества  $B \in$  множеству  $A$ , то по определению равенства множеств  $A = B$ .

Что и требовалось доказать.

Все множества рассматриваются как подмножества некоторого универсального множества  $U$ .

# Мощность множеств

Количество элементов, входящих во множество, называется его *мощностью*.

Для бесконечных множеств говорить о количестве элементов не имеет смысла, но говорить о мощности множества можно.

Два множества называются *равномощными*, если существует метод, позволяющий каждому элементу одного множества поставить в соответствие элемент другого множества.

Пример:

Имеется множество натуральных чисел и имеется множество четных чисел. Равномощны ли они?

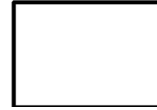
Ответ: Да.

1	2	3	4	5...
↓	↓	↓	↓	↓
2	4	6	8	10...

Множества, равномощные множеству натуральных чисел, называются *счетными*.

# Алгебра множеств. Операции над множествами.

Условимся  $U$  изображать в виде прямоугольника



а множество  $A$  -  (круги Эйлера-Венна)

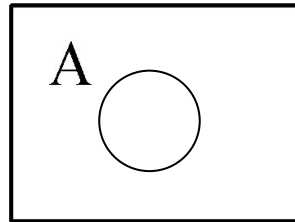


Рис. 1. Множества  $A$  и  $U$ .

1).Объединение множеств.  $A \cup B$ .

**Объединением множеств  $A$  и  $B$**  называется множество, состоящее из элементов, входящих или в  $A$ , или в  $B$ .

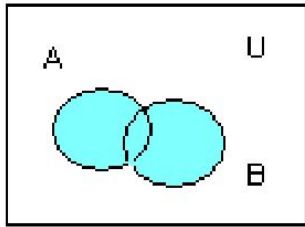
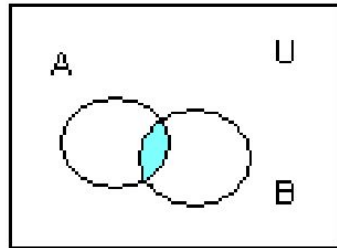


Рис.2. Объединение множеств.

2).Пересечение.  $A \cap B$ .

**Пересечением двух множеств** называется множество, состоящее из элементов, входящих и в  $A$ , и в  $B$ .



3).Разность.  $A \setminus B$ .

**Разностью множеств  $A$  и  $B$**  называется множество, состоящее из элементов, входящих в  $A$ , но не входящих в  $B$ .

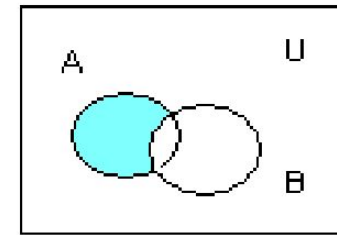


Рис.4.Разность множеств.

1) Дополнение.  $\bar{A}$ .

**Дополнением множества  $A$**  называется множество, состоящее из элементов не входящих в  $A$ .

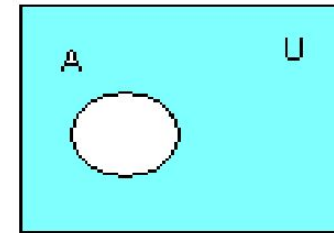


Рис.5.Дополнение множества  $A$ .



5. Симметрическая разность  $A \Delta B$ .

*Симметрической разностью множеств  $A$  и  $B$*  называется множество, состоящее из тех элементов множества  $A$ , которые не принадлежат множеству  $B$  и тех элементов множества  $B$ , которые не принадлежат множеству  $A$ .

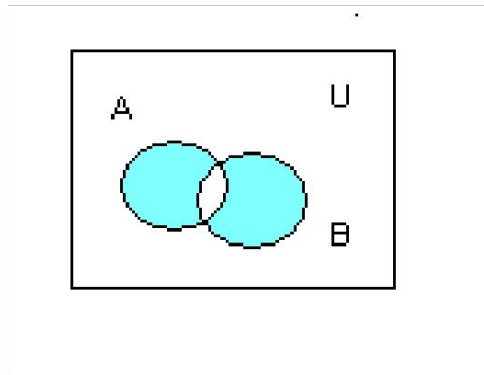


Рис.4. Симметрическая разность множеств.

# Включение множеств

*Множество*  $A$ , все элементы которого принадлежат множеству  $B$ , называется *подмножеством* множества  $B$ .

*Обозначение.* Нестрогое включение обозначается  $A \subseteq B$ , означает, что  $A$  - несобственное подмножество множества  $B$ , возможно совпадающее с  $B$ . Строгое включение обозначается  $A \subset B$ , и означает, что  $A$  - подмножество множества  $B$ , не совпадающее с  $B$ .  $A \subset B$  читается "А включено в В".

Отличия  $A \subset B$  и  $A \subseteq B$  заключается в том, что отношение  $A \subseteq B$  допускает и *тождественность* ( $A=B$ ), т.е. любое множество можно рассматривать как подмножество самого себя ( $A \subseteq A$ ), в то время как символ *строгого включения* ( $A \subset B$ ) ставится тогда, когда мы хотим подчеркнуть, что  $A \neq B$ , то есть во множестве  $B$  содержатся не только элементы множества  $A$ . Выполнение соотношений  $A \subseteq B$  и  $B \subseteq A$  возможно только при  $A=B$ . И обратно,  $A=B$ , если  $A \subseteq B$  и  $B \subseteq A$ . Эти соотношения являются признаком *равенства множеств* через отношение включения. Заметим, что иногда в литературе символом  $\boxtimes$  обозначают "нестрогое" включение, допускающее и равенство множеств. В этом случае символ  $\boxtimes$  не используется, а строгое включение записывают двумя соотношениями  $A \subseteq B, A \neq B$ .

# Свойства операций

- 1) Коммутативность.  
 $A \cup B = B \cup A$ .     $A \cap B = B \cap A$ .
- 2) Ассоциативность.  
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ .     $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ .
- 3) Дистрибутивность.  
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .     $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .
- 4) Законы Де-Моргана.  
 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$      $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- 5)  $A \cup A = A$      $A \cap A = A$
- 6)  $A \cup \emptyset = A$      $A \cap \emptyset = \emptyset$
- 7)  $A \cup U = U$      $A \cap U = A$
- 8)  $A \cap \overline{A} = \emptyset$      $A \cup \overline{A} = U$
- 9)  $\overline{\overline{A}} = A$
- 10)  $A \setminus B = \overline{B} \cap A$

# Разбиение множества на классы

Пусть задано некоторое множество, например множество треугольников. В этом множестве выделим свойство  $\alpha$  (например, быть прямоугольным). Тогда множество разбивается на два класса: прямоугольные и непрямоугольные.

**Разбиение множества на классы (классификация)** означает, что данное множество  $A$  разбивается на подмножества  $k_1, k_2, \dots, k_m$  таких, что

1) Эти подмножества попарно не пересекаются, то есть

$$k_i \cap k_j = \emptyset \quad (i, j=1, \dots, m, i \neq j)$$

2) Объединение всех подмножеств дает множество  $A$

$$\bigcup_{i=1}^m k_i = A$$

3) Ни одно из подмножеств не пусто

$$k_i \neq \emptyset$$

Пример: Пусть имеется  $A$  - множество всех грибов.

Свойства:

1)  $\alpha_1$  - быть съедобным грибом.

2)  $\alpha_2$  - быть трубчатым грибом.

Таким образом, с помощью этих свойств мы получаем 4 подмножества:

съедобные и несъедобные  
трубчатые и не трубчатые

Такое разбиение классификацией не является, так как эти подмножества могут пересекаться, и пересечение не пусто.

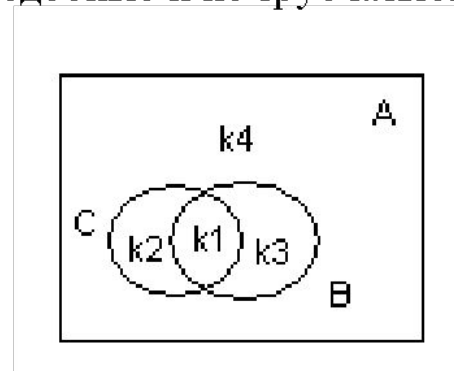
Пусть  $B$  - множество съедобных грибов, а  $C$  - множество трубчатых.

$k_1 = B \cap C$  - съедобные и трубчатые.

$k_2 = B \cap \bar{C}$  - съедобные и не трубчатые.

$k_3 = \bar{B} \cap C$  - несъедобные и трубчатые

$k_4 = \bar{B} \cap \bar{C}$  - несъедобные и не трубчатые.



# Декартово (прямое) произведение множеств

Пусть у нас имеется два элемента  $a_1$  и  $a_2$ . Пара  $(a_1, a_2)$  называется *упорядоченной*. 1-ый элемент ее -  $a_1$ , 2-ой-  $a_2$ .

Пары  $(a_1, a_2)$  и  $(b_1, b_2)$  считаются *равными*, если  $a_1 = b_1$ , а  $a_2 = b_2$ ;

Пара  $(a_1, a_2) = (a_2, a_1)$ , если только  $a_1 = a_2$ .

Пусть заданы два множества

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \text{ и } B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}.$$

*Декартовым или прямым произведением множества A на множество B* называется множество упорядоченных пар, 1-ый элемент которых принадлежит множеству A, а 2-ой множеству B.

Обозначается декартово произведение знаком X.

Для данных множеств получим

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), \dots, (a_1, b_m), \dots, (a_2, b_1), \dots, (a_n, b_m)\}$$

Мощность декартового произведения равна nm.

Обозначение:  $|A \times B| = nm$ .

Пример:

$$A = \{1, 4\} \text{ и } B = \{2, 3, 4\}. A \times B = \{(1,2), (1,3), (1,4), (4,2), (4,3), (4,4)\}$$

Геометрически каждой паре чисел соответствует точка координатной плоскости.

Пример1

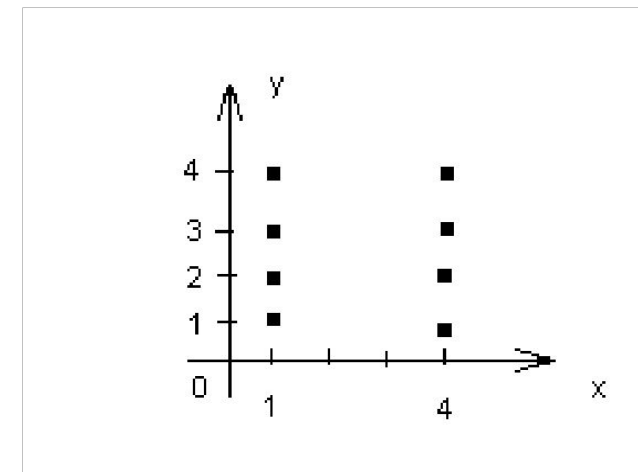


Рис.8. Декартово произведение  $A \times B$  для конечных A и B.

Пример2

$$A = \{x \in \mathbb{R}, \ x \in [-1; 2]\};$$

$$B = \{y \in \mathbb{Z}, \ y \in [-3; 3]\};$$

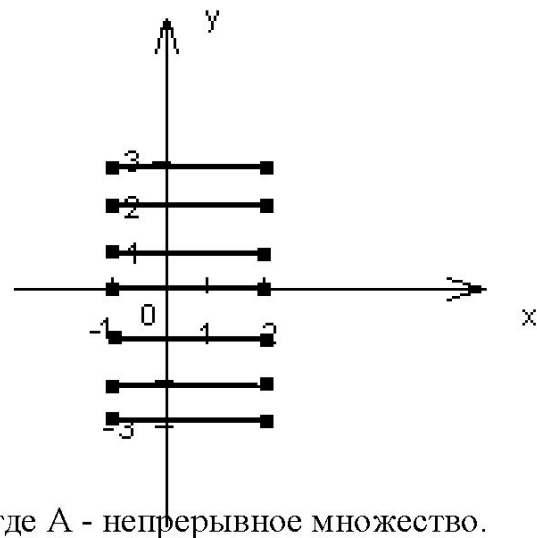


Рис.9.  $A \times B$ , где  $A$  - непрерывное множество.

Пример 3.

$$A = \{x \in \mathbb{R}, \ x \in [-1; 2]\};$$

$$B = \{y \in \mathbb{R}, \ y \in [-3; +\infty)\};$$

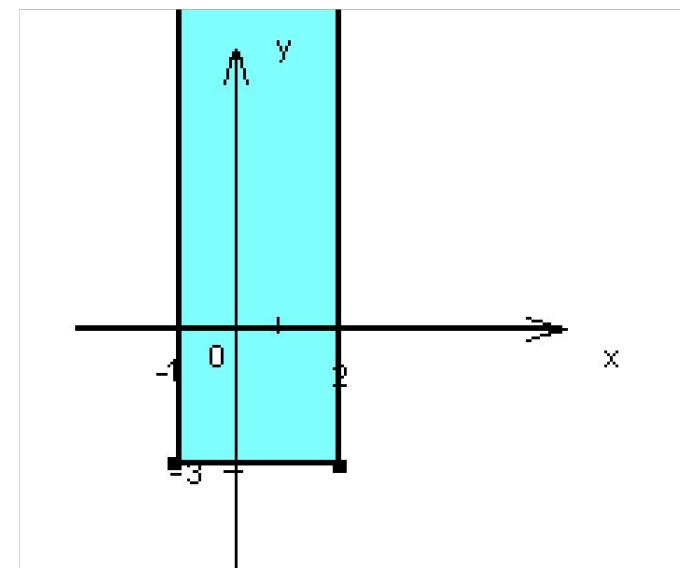


Рис.10. Декартово произведение  $A \times B$ . Оба множества непрерывны.

# Декартова степень.

Если в качестве множества В в декартовом произведении выбрать множество А, мы будем говорить о декартовом квадрате.

$$A \times A = A^2$$

$$A \times A^2 = A^3$$

...

$$A \times A^{n-1} = A^n$$

Набор n-элементов будем зазывать *кортежем*.

*Декартовым произведением n-множеств*

$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n$  будем называть множество упорядоченных кортежей, 1-ый элемент которых принадлежит множеству  $A_1$ , 2-ой множеству  $A_2$  и т.д.



# Свойства Декартового произведения.

- 1)  $A \times B \neq B \times A$ .
- 2)  $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$ .
- 3)  $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ .
- 4)  $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ .
- 5)  $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ .
- 6)  $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$ .
- 7)  $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ .
- 8)  $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$ .

# Отношения.

Пусть заданы два множества  $A$  и  $B$ . Найдем  $A \times B$ .

Подмножество  $k \subset A \times B$  называется *отношением из множества  $A$  во множество  $B$* .

Отношения задаются знаками  $=, <, >, \leq, \geq$  и т.д.

Пример:

$$A = \{2, 3, 4\}, B = \{1, 4, 3\}$$

$$A \times B = \{(2, 1), (2, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (3, 3), (4, 1), (4, 4), (4, 3)\}$$

Выделим отношения больше  $>$   $k_1 = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (4, 3)\}$

и меньше  $<$   $k_2 = \{(2, 4), (2, 3), (3, 4)\}$

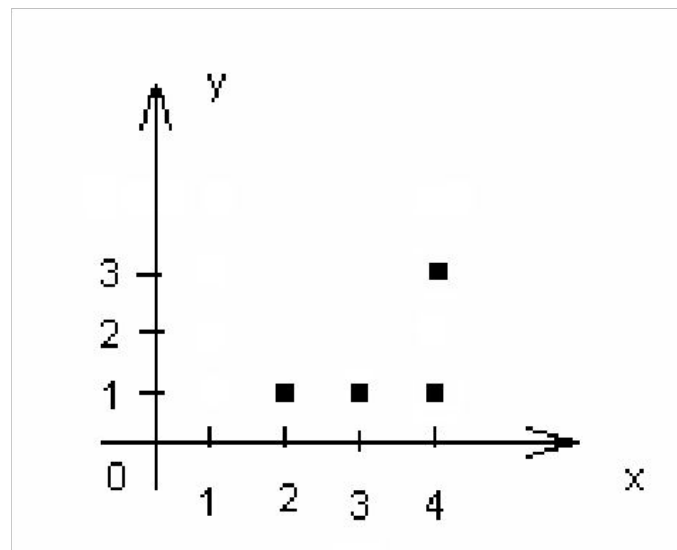


Рис.11. Отношение  $>$ .

# Композиция отношений.

Пусть отношение  $k_1 \subset A \times C$  и отношение  $k_2 \subset C \times B$ .

*Композицией этих отношений* является отношение  $k = k_1 \circ k_2$ , где  $k \in A \times B$ .

*Композицией отношений из  $A$  в  $B$*  называется множество пар  $(a,b)$  таких, что,  $a \in A$ ,  $b \in B$  и существует такое  $c \in C$ , что  $(a, c) \in k_1$  и  $(c,b) \in k_2$ .

Пример:

$A = \{2,3,4\}$ ,  $B = \{1,4,3\}$ ,  $C = \{2,5\}$

$A \times B = \{(2,1), (2,4), (2,3), (3,1), (3,4), (3,3), (4,1), (4,4), (4,3)\}$

$A \times C = \{(2,2), (2,5), (3,2), (3,5), (4,2), (4,5)\}$

$C \times B = \{(2,1), (5,1), (2,4), (5,4), (2,3), (5,3)\}$

Определим отношение

$\succ: k_1 \subset A \times C = \{(3,2), (4,2)\}$  и отношение  $\prec k_2 \subset C \times B = \{(2,4), (2,3)\}$

Возьмем пару  $(3,2) \in k_1$ . В  $k_2$  есть пары, начинающиеся с 2. Это пары  $(2,4)$  и  $(2,3)$ . Значит пары  $(3,4)$  и  $(3,3)$  войдут в композицию  $k$ .

Берем пару  $(4,2) \in k_1$ . В  $k_2$  есть пары, начинающиеся с 2. Это те же пары  $(2,4)$  и  $(2,3)$ . Значит пары  $(4,4)$  и  $(4,3)$  войдут в  $k$ .

Получим  $k = k_1 \circ k_2 = (k \in A \times B) = \{(3,4), (3,3), (4,4), (4,3)\}$

Таким образом, для элемента  $(2,4) \in A \times B$ , в  $k$  войдут  $\{(2,x), (y,4)\}$ , где  $(2,x) \in k_1$ , а  $(y,4) \in k_2$  для всех  $x$  и  $y$ .

# Отношения на множестве.

Если в декартовом произведении в качестве множества  $B$  выбрать множество  $A$  (то есть  $A \times A = A^2$ ), то отношение  $k$  из  $A^2$  называется *отношением на множестве*.

Для отношений на множестве вводятся понятия:

*Обратное отношение*-это множество пар  $(a,b)$  таких, что  $(b,a) \in A^2$ .

Обозначение  $k^{-1}$

*Дополнение*-это множество пар  $(a,b) \notin k$ . Обозначение  $\bar{k}$

*Тождественное отношение*-множество пар  $(a, a)$  таких, что,  $a \in A$ ,  
 $I = \{(a, a), a \in A\}$

*Универсальное отношение*  $U = \{(a,b), a \in A, b \in A\}$

# Виды отношений

## 1) Инъекция.

Если каждый элемент множества  $A$  соответствует элементу из множества  $B$ , то отношение  $f$  называется инъективным.

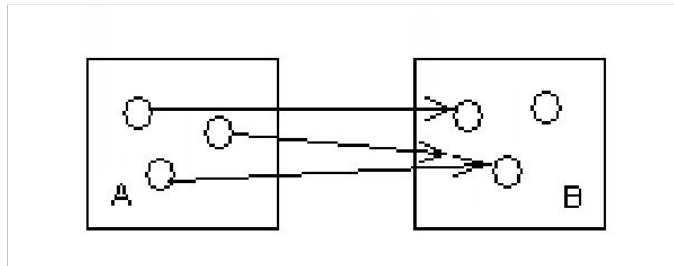
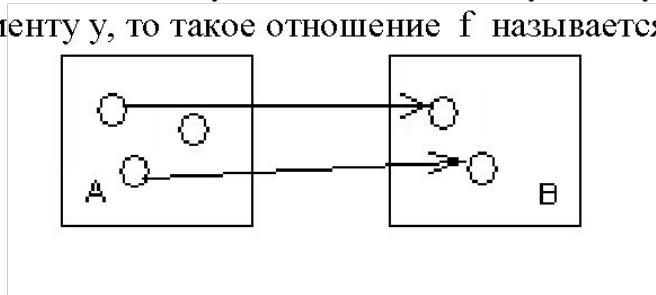


Рис.12.Инъекция.

## 2) Сюръекция.

Если для каждого элемента  $y$  множества  $B$  существует элемент  $x \in A$ , соответствующий элементу  $y$ , то такое отношение  $f$  называется сюръекцией.



## 3) Биекция.

Если для каждого элемента  $y \in B$  существует ровно один элемент  $x \in A$ , которому соответствует  $y$ , то такое отношение называется биективным.

Биективное отношение инъективно и сюръективно.

Биективное отношение имеет обратное отношение.

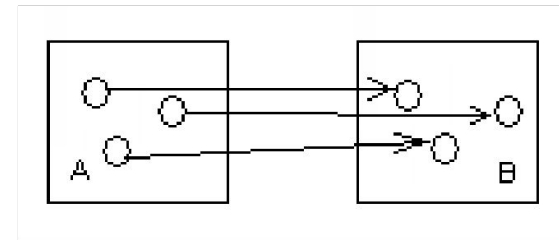


Рис.14. Биекция.

# Функции.

Пусть заданы множества  $A$  и  $B$ . Найдем  $A \times B$ .

Выберем отношение  $f \subset A \times B = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots\}$ , состоящее из пар таких, что  $a_i \neq a_j$ ,  $i=1, 2, 3, \dots$ , то есть отношение, в которой все первые элементы пар различны. Такие отношения называются **функциями**.

Способы задания:

$$A \xrightarrow{f} B; \quad f: A \longrightarrow B; \quad b=f(a); \quad a f b.$$

Пример:  $A=\{2, 3, 4\}$ ,  $B=\{1, 4, 3\}$

$$A \times B = \{(2, 1), (2, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (3, 3), (4, 1), (4, 4), (4, 3)\}$$

Выделим: функции  $f_1 = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$  и  $f_2 = \{(2, 4), (3, 1), (4, 1)\}$

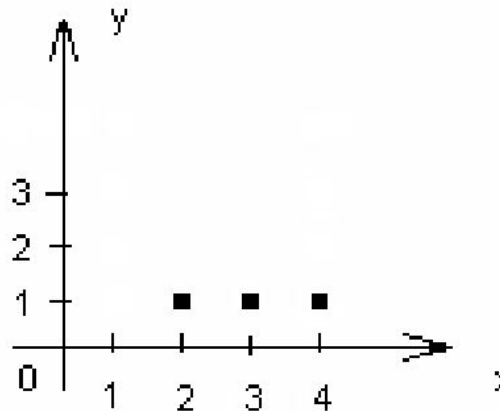


Рис.15. Функция  $f_1$ .

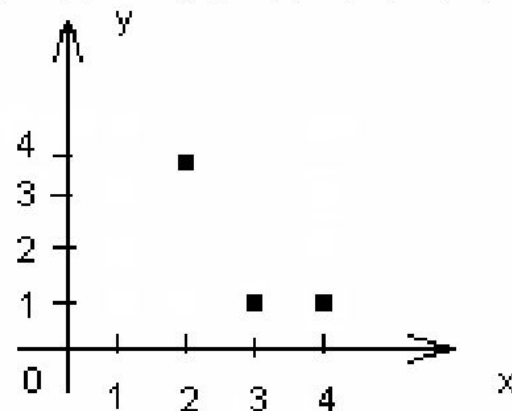
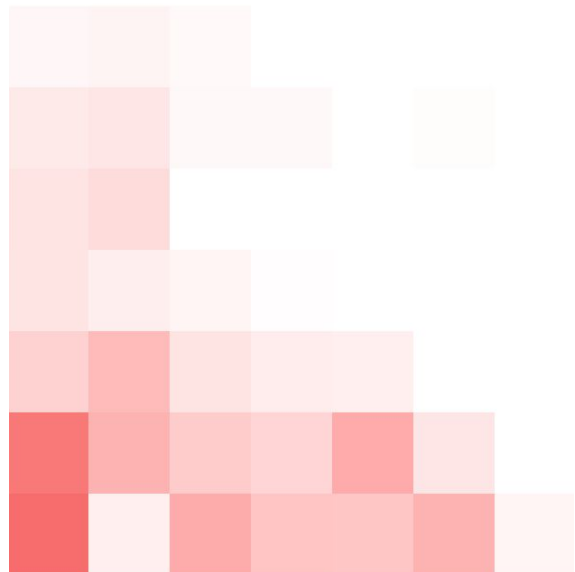


Рис.16. Функция  $f_2$ .

# Тема 2 Комбинаторика



# Комбинаторика.

Задачи, в которых требуется определить количество возможных операций, называется *комбинаторными*.

Пусть имеется группа некоторых объектов  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ , которые мы будем называть *элементами*.

Из этой группы элементов будем образовывать подгруппы. Такие подгруппы будем называть *соединениями*.

Из этих соединений выделим классы, которые будем называть *размещениями*.





# Размещени

## Я.

Размещения по 3: В каждой строке будет (m-2) размещений

$$A_m^2 \text{ -строк} \begin{cases} a_1 a_2 a_3, a_1 a_2 a_4, \dots, a_1 a_2 a_m \\ a_1 a_3 a_2, a_1 a_3 a_4, \dots, a_1 a_3 a_m \\ \dots \dots \dots \\ a_m a_{m-1} a_1, a_m a_{m-1} a_2, \dots, a_m a_{m-1} a_{m-2} \end{cases}$$

Ясно, что  $A_m^3 = A_m^2 (m-2) = m(m-1)(m-2)$

$$A_m^4 = m(m-1)(m-2)(m-3)$$

.....

$$A_m^n = m(m-1)(m-2) \dots (m-(n-1)) \quad ( * )$$

# Размещения.

Пример:

В группе 21 студент. Требуется выбрать старосту, профорга и физорга. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

Каждая тройка студентов может отличаться от другой тройки или распределением обязанностей, или хотя бы одним из студентов, то есть мы должны вычислить число размещений из 21 по 3:

$$m=21, n=3.$$

$$A_{21}^3 = 21 * 20 * 19 = 7980.$$

# Размещения.

*Другой вид формулы числа размещений.*

Умножим числитель и знаменатель формулы ( \* ) на  $(m-n)!$  Получим

$$A_m^n = \frac{m * (m - 1) * (m - n + 1) * (m - n) * (m - n - 1) \dots 2 * 1}{(m - n) * (m - n - 1) \dots 2 * 1}, \text{ или}$$

$$A_m^n = \frac{m!}{(m - n)!}$$

Каждое размещение содержит одно и то же количество элементов, взятых из данных  $m$ .

# Перестановки.

Размещения из  $n$ -элементов по  $n$ , каждое из которых отличается друг от друга только порядком элементов, называются *перестановками*.

Их число обозначается  $P_n$ :

$$P_n = A_n^n = n * (n-1) * (n-2) * \dots * 2 * 1, \text{ то есть } P_n = n!$$

Пример:

Сколькими способами могут сесть 6 человек на 6-местную лавочку?

Решение:

В данном случае каждое расположение лиц на лавочке отличается от другого расположения только порядком. Поэтому мы имеем дело с перестановками:

$$P_6 = 6! = 720.$$

# Сочетания.

*Сочетания* - это размещения, каждое из которых отличается от других хотя бы одним элементом.

Другими словами: *Сочетания* - это соединения, содержащие  $n$  элементов из данных  $m$ , отличающиеся хотя бы одним элементом.

Число сочетаний  $C_m^n$ . Если мы имеем  $m$ -элементов, и из них составим всевозможные сочетания по  $n$  и внутри каждого произведем перестановку, то получим размещения.

$$C_m^n * P_n = A_m^n \text{ отсюда}$$

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)!n!}$$

# Сочетания.

Пример:

В группе 20 студентов. Требуется выбрать 5 делегатов на конференцию. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

Так как внутри каждой пятерки делегатов перестановки дают одну и ту же пятерку, то каждая пятерка должна отличаться от других хотя бы одним делегатом. В данном случае мы должны посчитать число сочетаний из 20 по 5:

$$C_{20}^5 = \frac{20!}{15! * 5!} = 15504.$$

# Свойства сочетаний.

1)  $C_m^n = C_m^{m-n}$ , достаточно выписать формулы левой и правой части равенства.

2)  $C_0^0 = \frac{0!}{(0-0)!0!} = 1$ , т.к. по определению  $0! = 1$

3)  $C_1^0 = \frac{1!}{1!*0!} = 1$ , т.к. по определению  $1! = 1$

4)  $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

Доказательство:

$$\begin{aligned} C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \\ \frac{(n-1)!*k + (n-1)!*(n-k)}{k!*(n-k)!} &= \frac{(n-1)!*(k+n-k)}{k!*(n-k)!} = \frac{(n-1)!*n}{k!*(n-k)!} = \\ \frac{n!}{k!*(n-k)!} &= C_n^k \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

1)  $C_n^k = C_n^{k-1} * \frac{(n-k+1)}{k}$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \frac{C_n^k}{C_n^{k-1}} &= \frac{n!*(k-1)!(n-(k-1))!}{k!*(n-k)!*n!} = \frac{(n-k+1)}{k}, \text{ следовательно, } C_n^k = C_n^{k-1} \\ &* \frac{(n-k+1)}{k}. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.



# Размещения с повторениями.

До сих пор мы рассматривали комбинации элементов, которые в каждой комбинации не повторялись. Рассмотрим размещения из  $m$ -элементов по  $n$ , в которых каждый элемент может повторяться. Такие размещения называются **размещениями с повторениями**:  $\hat{A}_m^n$ .

Рассмотрим задачу.

В лифт 9 этажного дома на 1-ом этаже вошло 10 человек, каждый из которых может выйти на любом этаже, начиная со второго. Сколькими способами они могут выйти из лифта?

Решение:

Каждый из пассажиров может выйти 8 способами. Два пассажира могут выйти

$\hat{A}_8^2 = 8 * 8 = 8^2 = 64$ . Десять человек могут выйти  $\hat{A}_8^{10} = 8^{10}$ .

Таким образом, так как каждый элемент попадает в комбинацию  $m$  способами, где  $n$  комбинаций, то

$$\hat{A}_m^n = m^n.$$

# Задача о числе подмножеств данного множества.

Пусть имеется  $M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ . Пустое множество  $\emptyset$  входит в это множество как подмножество. Одноэлементные множества тоже. Поставим каждому подмножеству кортеж длиной  $n$ , состоящий из 0 и 1.

0-если соответствующий элемент не входит в подмножество.

1-если входит.

Например, подмножеству  $\{a_2, a_4\}$  будет соответствовать кортеж 01010000....0000...

Для всех подмножеств получим  $(0,0,0,\dots,0)$ ,  $(1,0,0,\dots,0)$ ,  $(0,1,0,0,\dots,0)$ ...  $(1,1,1,\dots,1)$

Кортежей столько, сколько подмножеств. Это размещения, состоящие из двух элементов (0 и 1) и отличающиеся друг от друга либо элементами, либо их порядком. Это размещения с повторениями из двух по  $n$ : Получим

$$\hat{A}_2^n = 2^n.$$

Таким образом, мы доказали *теорему*:

Число подмножеств  $n$ -элементного множества равно  $2^n$ .

*Следствие*: Так как число пустых подмножеств  $C_n^0 = 1$ , одноэлементных- $C_n^1 = n$ , двухэлементных- $C_n^2$ , трехэлементных- $C_n^3$ ,  $n$ -элементных  $C_n^n$ , то сумма

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n.$$

# Перестановки с повторениями.

Пусть мы имеем  $n$  элементов  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ,  $P_n = n!$ . Пусть элемент  $a_1$  повторяется  $k_1$  раз, элемент  $a_2$  -  $k_2$  раз, ...,  $a_n$  -  $k_n$  раз, где  $\sum_{i=1}^n k_i = n$ . Тогда число различных перестановок будет в  $k_1!$  меньше за счет одинаковых элементов  $a_1$ , в  $k_2!$  раз меньше за счет одинаковых элементов  $a_2, \dots$  и в  $k_n!$  раз меньше за счет одинаковых элементов  $a_n$ . Тогда число различных перестановок будет равно:

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{n!}{k_1! * k_2! * \dots * k_n!}.$$

Пример:

Сколько различных перестановок можно составить из слова МОЛОТОК?

Решение:

$$k_1(M)=1; k_2(O)=3; k_3(Л)=1; k_5(Т)=1; k_7(К)=1;$$

$$P_7(1,3,1,1,1) = \frac{7!}{1! * 3! * 1! * 1! * 1!} = 840.$$

# Сочетания с повторениями.

Пример:

На почте имеются открытки четырех видов: красные, желтые, зеленые и синие. Требуется 10 открыток. Сколькими способами можно их скомбинировать?

Решение:

Пусть мы отобрали 4 красных, 2 желтых, 2 зеленых и 2 синих открытки. Составим кортеж из 0 и 1. Выпишем столько единиц, сколько красная открытка встречается в нашем наборе, и поставим 0: 11110. Затем добавим кортеж для желтых -110. Получим 11110110. Добавим кортеж для зеленых и синих открыток. В последнем 0 не ставим. Получим кортеж 1111011011011. В нем 10 единиц и 3 нуля. Общая длина кортежа – 13. Таких кортежей можно составить столько, сколько перестановок с повторениями из 13.

$$P_{13}(10,3) = \frac{13!}{10! * 3!} = 286 \text{ – это и будет число сочетаний с повторениями из 4 по 10.}$$

$$P_{13}(10,3) = C_{13}^{10} \quad \text{Таким образом,} \quad \hat{C}_4^{10} = C_{13}^{10} .$$

В общем случае.

# Сочетания с повторениями.

Пусть мы имеем  $n$  элементов  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ , из которых создаются сочетания с повторениями, и каждое сочетание содержит  $k$  элементов. Составим кортеж, который запишем вначале столько единиц, сколько элемент  $a_1$  входит в сочетание, затем запишем 0. припишем кортеж из единиц и нуль для элемента  $a_2$  и т.д. без последнего нуля. Получим: 111... 1011... 10... 11... 1

Единиц –  $k$ . Нулей –  $n-1$ . Длина кортежа  $n+k-1$

Общее число сочетаний с повторениями

$$\hat{C}_n^k = P_{n+k-1}(k, n-(k-1)) = \frac{(n+k-1)!}{k! * (n-(k-1))!} = C_{n+k-1}^k,$$

Итак,  $\hat{C}_n^k = C_{n+k-1}^k,$

БГТУ им. В.Г. Шухова  
Кафедра информационных технологий



Спасибо за  
внимание!