

Движение в геометрии

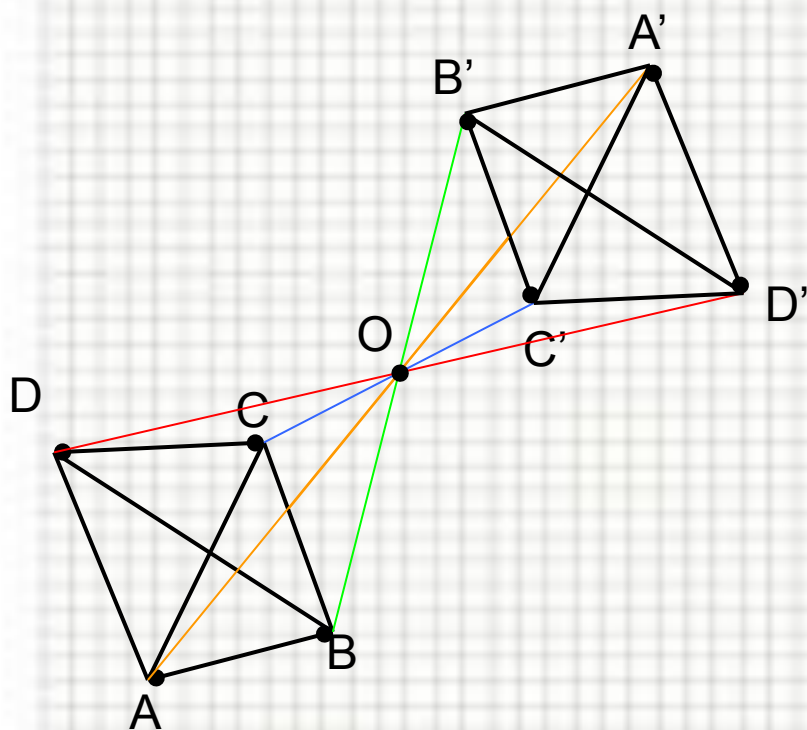
Понятие движения

Движение – это отображение пространства на себя, сохраняющее расстояния между точками

Виды движения

- Центральная симметрия
- Осевая симметрия
- Зеркальная симметрия
- Параллельный перенос

Центральная симметрия



Дано: $O(x_0; y_0; z_0)$, $A(x_A; y_A; z_A)$

Найти: $A'(x_{A'}; y_{A'}; z_{A'})$

Решение:

$A \rightarrow A'$, O – середина AA' ,

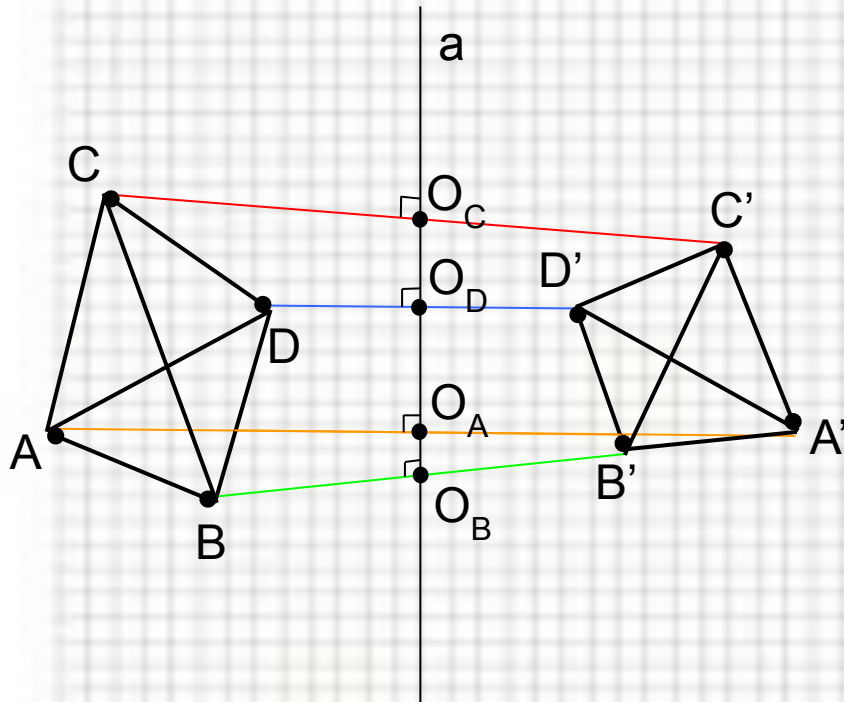
$$\frac{x_A + x_{A'}}{2} = x_0 \Rightarrow x_{A'} = 2x_0 - x_A$$

$$\frac{y_A + y_{A'}}{2} = y_0 \Rightarrow y_{A'} = 2y_0 - y_A$$

$$\frac{z_A + z_{A'}}{2} = z_0 \Rightarrow z_{A'} = 2z_0 - z_A$$

$$A'(2x_0 - x_A; 2y_0 - y_A; 2z_0 - z_A)$$

Осевая симметрия



Дано: $a: M_0(x_0, y_0, z_0), \vec{q}\{x_1, y_1, z_1\}$

$A(x_A, y_A, z_A)$

Найти: $A'(x_{A'}, y_{A'}, z_{A'})$

Решение:

$$\frac{x-x_0}{x_1} = \frac{y-y_0}{y_1} = \frac{z-z_0}{z_1} \quad - \text{уравнение прямой } a$$

$H(x_H, y_H, z_H), \overrightarrow{AH} \perp a, H \in a$

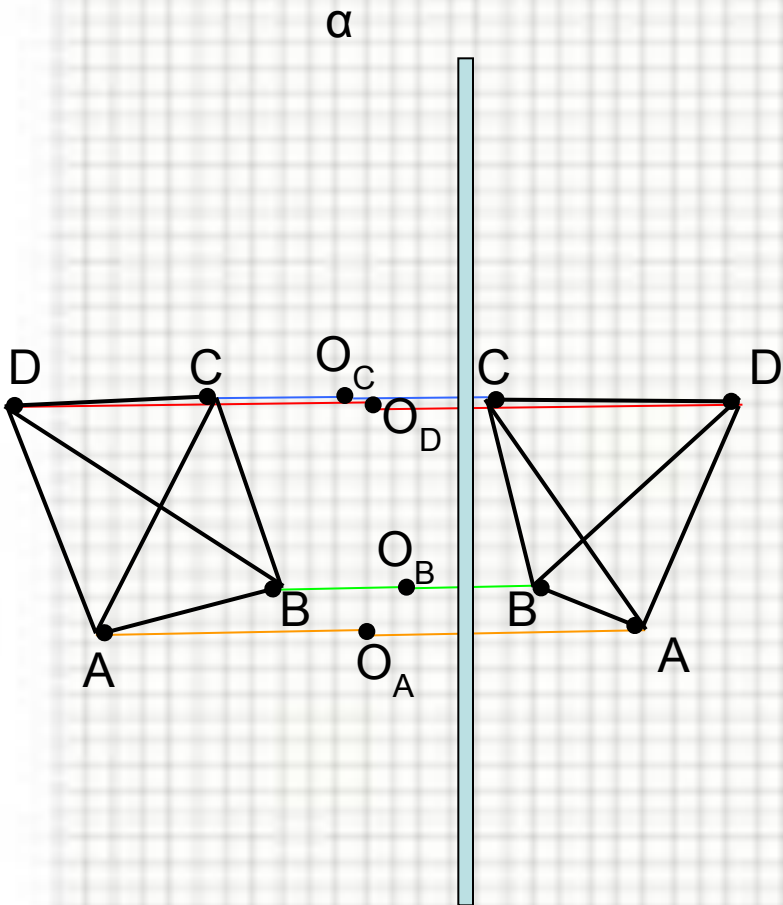
$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \vec{q} = 0 \\ H \in a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_H - x_A)x_1 + (y_H - y_A)y_1 + (z_H - z_A)z_1 = 0 \\ \frac{x_H - x_0}{x_1} = \frac{y_H - y_0}{y_1} = \frac{z_H - z_0}{z_1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_H = \frac{x_A x_1^2 + x_0 y_1^2 + x_0 z_1^2 - x_1(y_1(y_0 - y_A) + z_1(z_0 - z_A))}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \\ y_H = \frac{y_1(x_H - x_0)}{x_1} + y_0 \\ z_H = \frac{z_1(x_H - x_0)}{x_1} + z_0 \end{cases}$$

$\overrightarrow{AH}\{x_H - x_A; y_H - y_A; z_H - z_A\}$

$A \xrightarrow{2\overrightarrow{AH}} A'; A'(2x_H - x_A; 2y_H - y_A; 2z_H - z_A)$

Зеркальная симметрия



Дано : $\alpha : ax + by + cz + d = 0$

$A(x_A, y_A, z_A)$

Найти : $A'(x_{A'}, y_{A'}, z_{A'})$

Решение :

$ax + by + cz + d = 0$ – уравнение плоскости, где $\vec{q}(a, b, c) \perp \alpha$

$\overrightarrow{AH} \{x_H, y_H, z_H\} \parallel \vec{q}(a, b, c), H \in \alpha$

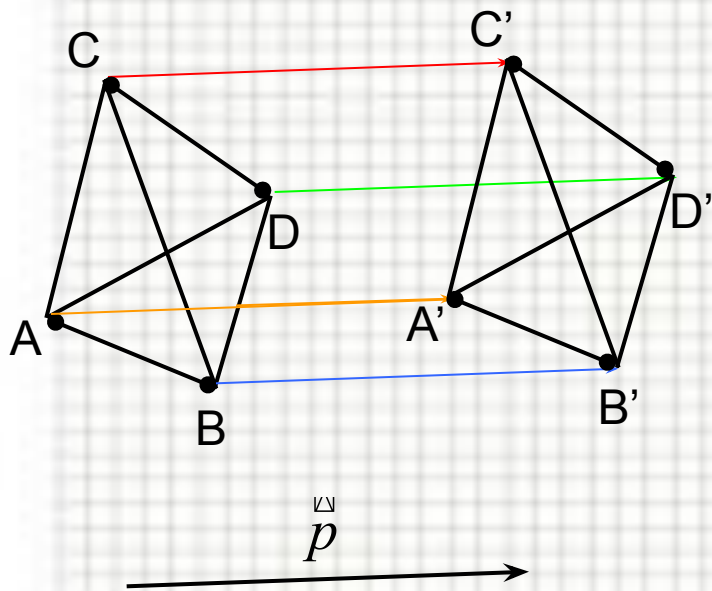
$$\begin{cases} \frac{x_H - x_A}{a} = \frac{y_H - y_A}{b} = \frac{z_H - z_A}{c} \Rightarrow \\ ax_H + by_H + cz_H + d = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_H = \frac{a(y_A b + z_A c + d) + b^2 x_A + c^2 x_A}{a^2 + b^2 + c^2} \\ y_H = \frac{b(x_H - x_A)}{a} + y_A \\ z_H = \frac{c(x_H - x_A)}{a} + z_A \end{cases}$$

$\overrightarrow{AH} \{x_H - x_A; y_H - y_A; z_H - z_A\}$

$A \xrightarrow{2\overrightarrow{AH}} A', A'(2x_H - x_A; 2y_H - y_A; 2z_H - z_A)$

Параллельный перенос



Дано : $\vec{p}\{x_p, y_p, z_p, \}$

$A(x_A, y_A, z_A)$

Найти : $A'(x_{A'}, y_{A'}, z_{A'})$

Решение :

$$A \xrightarrow{\vec{p}} A'$$

$$A'(x_A + x_p; y_A + y_p; z_A + z_p)$$