

20.2. ТЕОРЕМА ГАУССА-ОСТРОГРАДСКОГО

*Эта формула связывает интеграл по
объему V с интегралом по
поверхности S , ограничивающей этот
объем.*

ТЕОРЕМА.

Пусть V – некоторая область в пространстве, S – граница этой области.

Если функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными во всех точках области V , то справедлива формула:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV =$$
$$= \iint_S (P \cdot \cos \alpha + Q \cdot \cos \beta + R \cdot \cos \gamma) dS$$

Где α , β , γ – углы, образованные внешней нормалью и осями x, y, z .

формула

Гаусса-Острограда

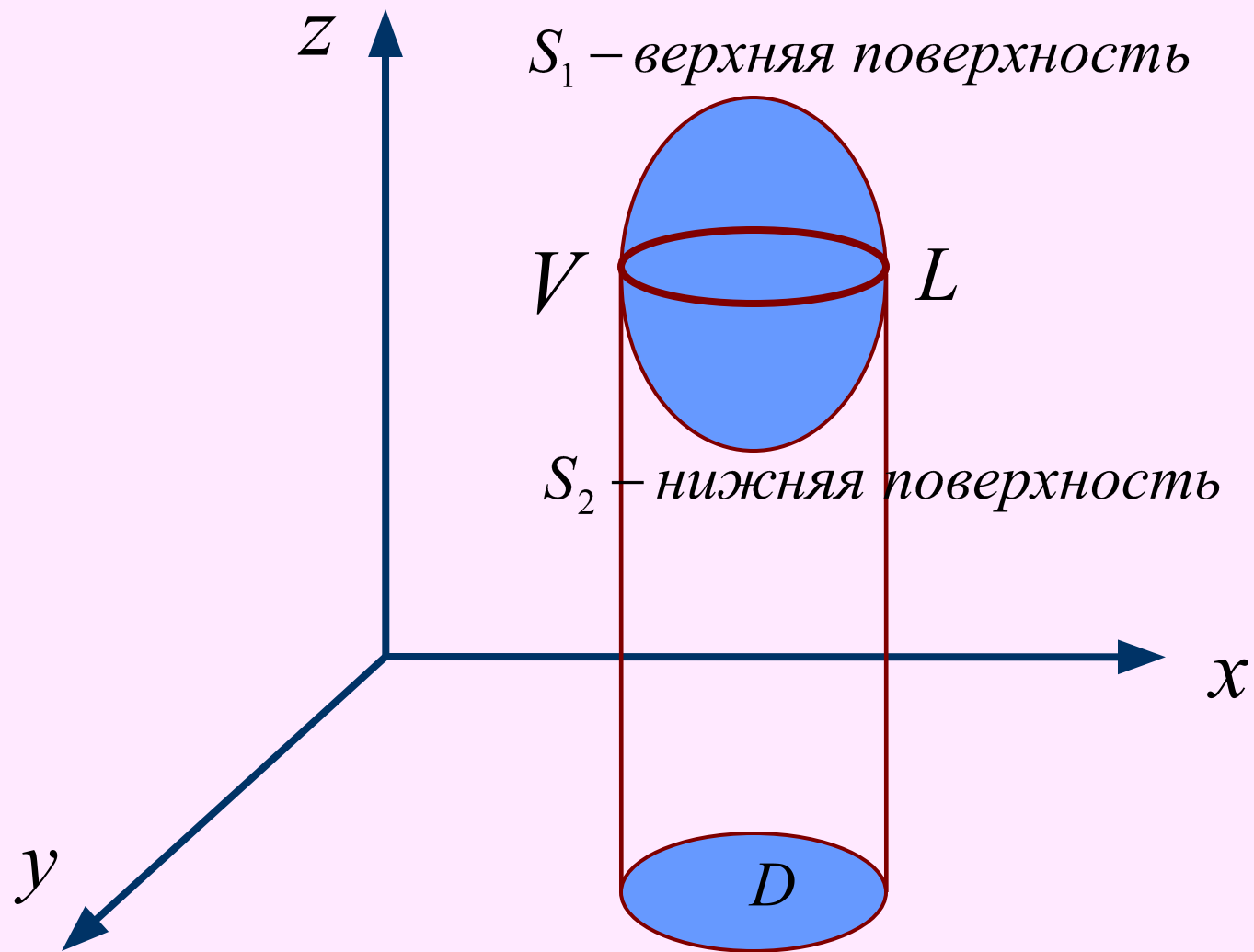
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Рассмотрим область V , ограниченную поверхностью S .

Пусть существует интеграл

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV$$

Проведем цилиндрическую поверхность, проектирующую область V на плоскость XOY .



D – проекция областей S_1 и S_2 на плоскость XOY .

$$S_1 : z_1 = z_1(x, y)$$

$$S_2 : z_2 = z_2(x, y)$$

Сначала проинтегрируем по z :

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \\ &= \iint_D R(x, y, z_2(x, y)) dx dy - \iint_D R(x, y, z_1(x, y)) dx dy = \end{aligned}$$

Учтем, что

$$\iint_S R(x, y, z) \cos \gamma dG = \iint_D R(x, y, z(x, y)) dx dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \iint_{+S_2} R(x, y, z) \cos \gamma dG - \iint_{+S_1} R(x, y, z) \cos \gamma dG = \\
 &= \iint_{+S_2} R(x, y, z) \cos \gamma dG + \iint_{-S_1} R(x, y, z) \cos \gamma dG
 \end{aligned}$$

Верхняя и нижняя стороны являются внешними сторонами поверхности S, поэтому

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_S R \cos \gamma dG$$

1

Аналогично

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_S Q \cos \beta dG$$

2

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_S P \cos \alpha dG$$

3

Складываем почленно (1), (2), (3):

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \\ & = \iint_S (P \cdot \cos \alpha + Q \cdot \cos \beta + R \cdot \cos \gamma) dS \end{aligned}$$

