Задачі без початкових умов

$$(\mathrm{I}_\alpha)\ \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} - \alpha u_t \quad (\alpha > 0), \quad 0 < x < l, \quad t > -\infty \\ u(0, t) = \mu_1(t) \\ u(l, t) = \mu_2(t) \end{cases}$$

Розглянемо задачу про поширення періодичного граничного режиму:

$$u(l, t) = A\cos\omega t \quad \text{або} \quad u(l, t) = A\, e^{i\omega t}$$
$$u(0, t) = 0$$

$$u(x, t) = u^{(1)}(x, t) + i\, u^{(2)}(x, t)$$

$$u^{(1)}(l, t) = A\cos\omega t$$
$$u^{(2)}(l, t) = A\sin\omega t$$

Відповідно знайдемо вирішення задачі:

$$\left.\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} - \alpha u_t, \\ u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= A\, e^{i\omega t}. \end{aligned}\right\}$$

Нехай $u(x, t) = X(x)\, e^{i\omega t}$

$$\begin{cases} X'' + k^2 X = 0 \quad \left(k^2 = \dfrac{\omega^2}{a^2} - i\alpha\dfrac{\omega}{a^2}\right) \\ X(0) = 0 \\ X(l) = A \end{cases}$$

З 1ї граничної умови: $X(x) = C\sin kx$

З 2ї граничної умови: $C = \dfrac{A}{\sin kl}$

Відповідно отримаємо:

$$X(x) = A\,\frac{\sin kx}{\sin kl} = X_1(x) + i\, X_2(x)$$

$$u^{(1)}(x,\, t) = X_1(x)\cos\omega t - X_2(x)\sin\omega t$$

$$u(x,\, t) = [X_1(x) + i\,X_2(x)]\,e^{i\omega t} = u^{(1)}(x,\, t) + i\,u^{(2)}(x,\, t)$$

$$u^{(2)}(x,\, t) = X_1(x)\sin\omega t + X_2(x)\cos\omega t$$

Переходимо до границі α –> 0:

$$\bar{k} = \lim_{\alpha\to 0} k = \frac{\omega}{a}$$

$$\bar{u}^{(1)}(x,\, t) = \lim_{\alpha\to 0} u^{(1)}(x,\, t) = A\,\frac{\sin(\omega/a\cdot x)}{\sin(\omega/a\cdot l)}\,\cos\omega t$$

$$\bar{u}^{(2)}(x,\, t) = \lim_{\alpha\to 0} u^{(2)}(x,\, t) = A\,\frac{\sin(\omega/a\cdot x)}{\sin(\omega/a\cdot l)}\,\sin\omega t.$$

Розглянемо наступну задачу:

$$(\mathrm{I}_0)\qquad \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l, \quad t > -\infty; \\ u(0,\, t) = \mu_1(t),\ t > -\infty; \\ u(l,\, t) = \mu_2(t), \end{cases}$$

$$\bar{u}^{(1)}(0,\, t) = 0, \quad \bar{u}^{(1)}(l,\, t) = A\cos\omega t$$

$$\bar{u}^{(2)}(0,\, t) = 0, \quad \bar{u}^{(2)}(l,\, t) = A\sin\omega t.$$

a = 0

?

a ≠ 0

Нехай $\mu_1(t) = 0$, а $\mu_2(t)$ Періодична ф-я, що розкладається в ряд

$$\mu_2(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\omega n t + B_n\sin\omega n t)$$

$$\bar{u}(x,\, t) = \frac{A_0}{2l}\,x + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\omega n t + B_n\sin\omega n t)\,\frac{\sin(\omega n/a\cdot x)}{\sin(\omega n/a\cdot l)}$$

Для a = 0 рішення визначено неоднозначно, якщо не накладати додаткових умов

$$\sum \left(A_n \cos\frac{\pi n}{l}\,at + B_n \sin\frac{\pi n}{l}\,at\right) \sin\frac{\pi n}{l}\,x$$

Для отримання одного рішення задачі Iα при α=0 необхідно ввести поняття «зникаючого тертя».

Розв’язок задачі I_0 буде задовольняти даній умові, якщо воно є розв’язком задачі Iα при α=0

Аналогічно, якщо x = l закріплений, а на x = 0 заданий граничний режим

Єдиність обмеженого розв'язку

Припустимо неперервність рішень із похідними до 2го порядку включно в області $0 \leqslant x \leqslant l, \ -\infty < t < t_0$

При цьому граничні значення $u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t)$ Визначені на $-\infty < t < t_0$

Нехай $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ Два обмежені рішення задачі ($|u_1| < M, \quad |u_2| < M$):

$v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t) \ (|v| < 2M)$, і задовольняє одн.гр. ум $v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0$

Коеф. Фур'є для v $v_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l v(x, t)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx$ Задовольняють $\ddot{v}_n + \alpha\dot{v}_n + \omega_n^2 v_n = 0 \quad \left(\omega_n = \frac{\pi n}{l}a\right)$

$v_n(t) = A_n e^{q_n^{(1)}t} + B_n e^{q_n^{(2)}t}$ - загальний розв'язок рівняння вище, де

$$q_n^{(1)} = -\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \omega_n^2}$$

$$q_n^{(2)} = -\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \omega_n^2} \qquad (\alpha > 0)$$

Так як α>0, то $\operatorname{Re} q_n^{(1,2)} < 0$. Отже розв'язок обмежений при t -> - ∞ лише для An=0, Bn=0, тобто $v_n(t)=0$ для n≠0

Відповідно, $v(x, t) \equiv 0, \ u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$

Дякую за увагу!