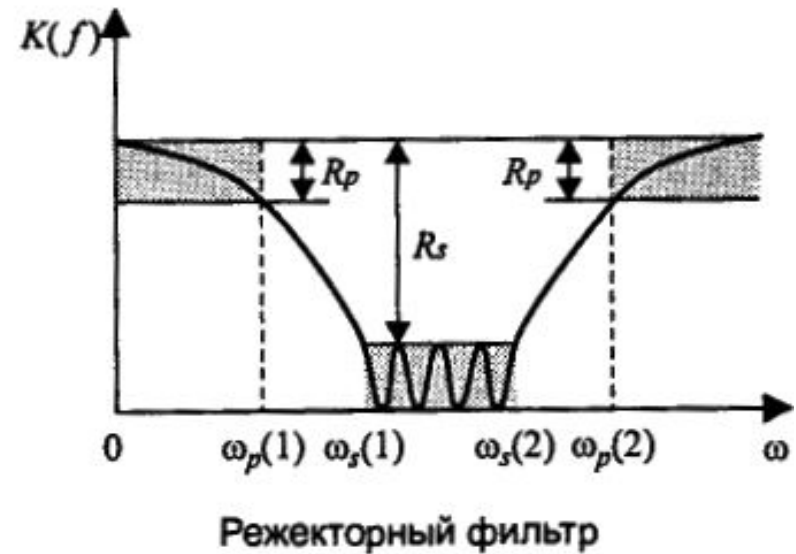
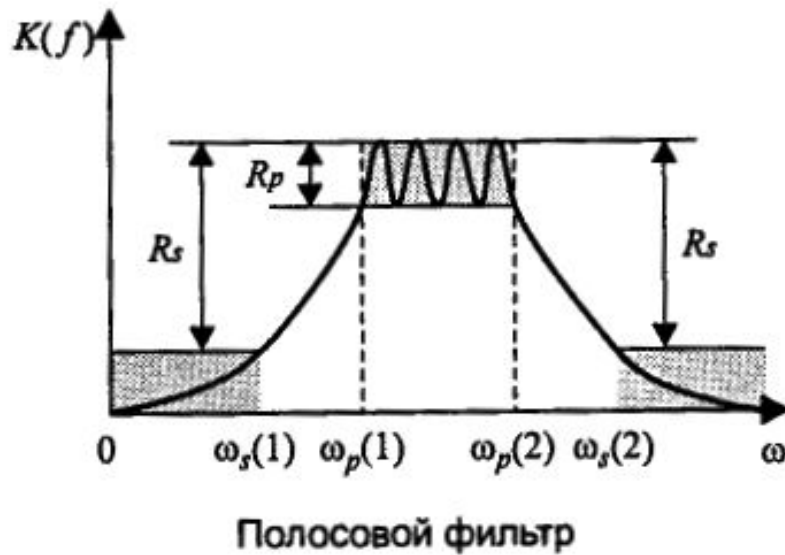
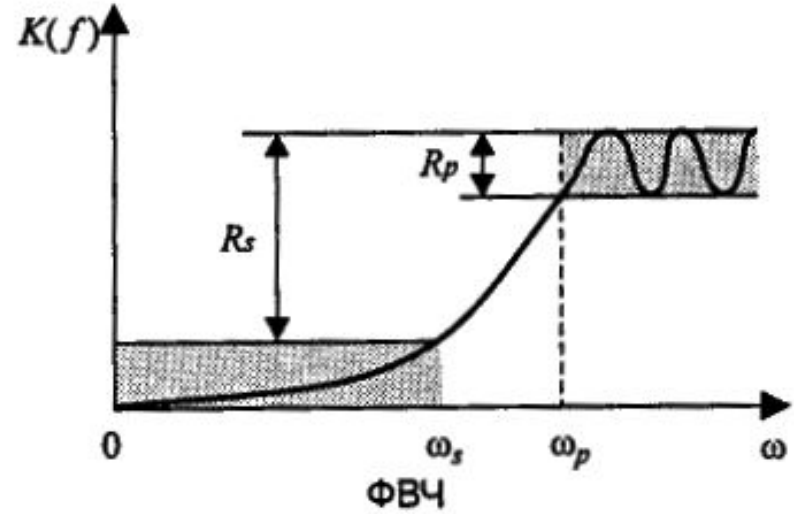
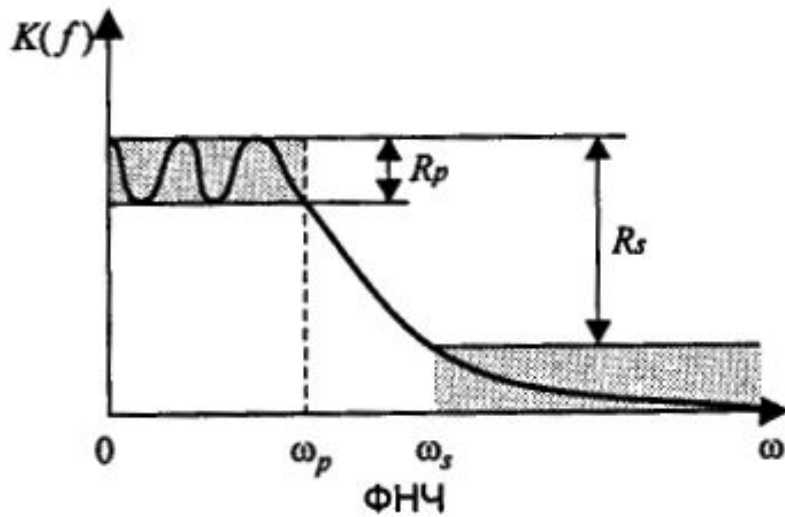


Методы расчета КИХ-фильтров

Параметры для расчета фильтров

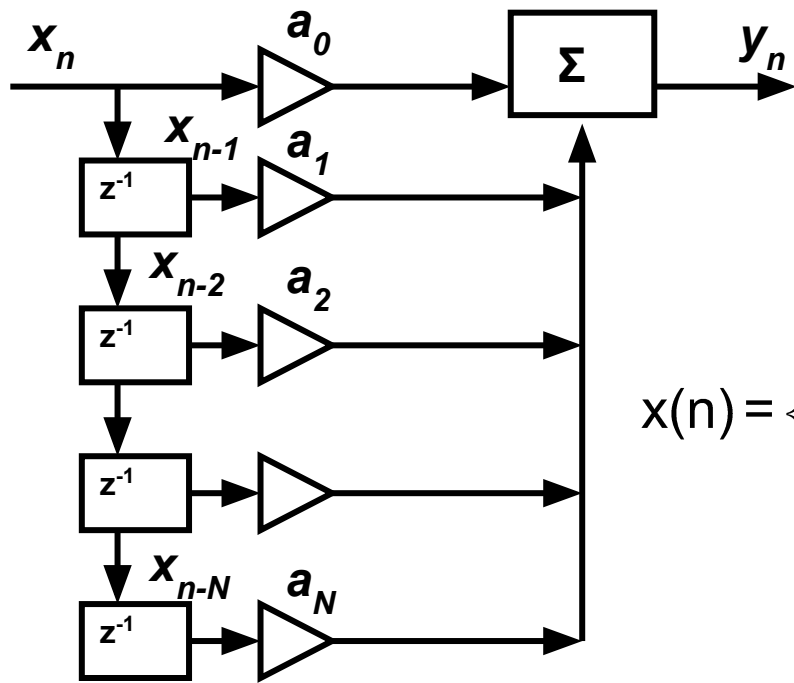


Нерекурсивные фильтры

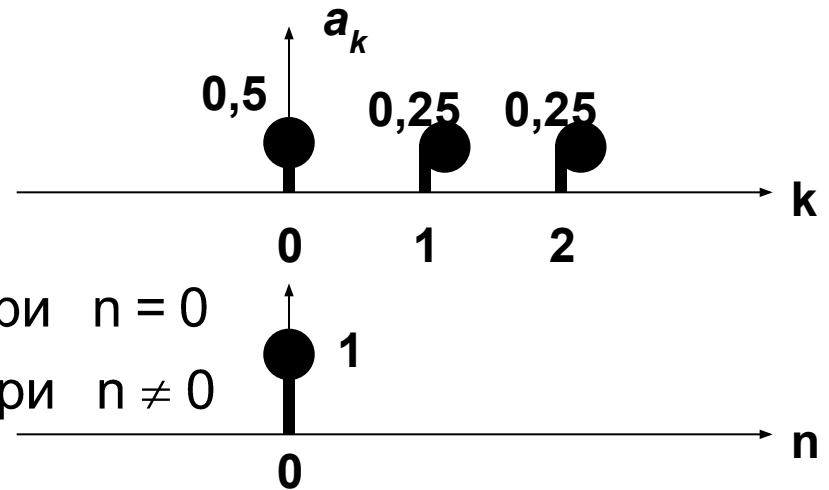
Уравнение нерекурсивного фильтра

Несимметричная форма:

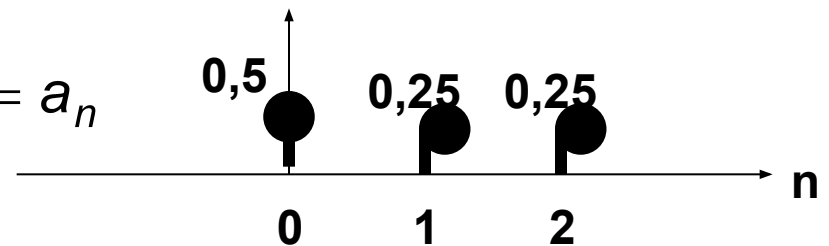
$$y(n) = \sum_{k=0}^N a_k x(n-k]$$



$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0 \\ 0 & \text{при } n \neq 0 \end{cases}$$



$$y(n) = a_n$$

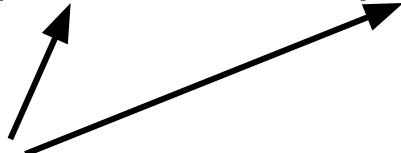


Уравнение нерекурсивного фильтра

Симметричная форма:
$$y(n) = \sum_{k=-N}^N a_k x(n-k)$$

Пример: $N=2$

$$y(n) = a_{-2}x(n+2) + a_{-1}x(n+1) + a_0x(n) + a_1x(n-1) + a_2x(n-2)$$



будущие выборки

Симметричная форма записи адекватна обработке записанных сигналов

Частотная характеристика нерекурсивного фильтра

Воздействие – комплексная гармоника: $x_n = \exp(j\omega n T_d)$

Отклик:
$$y_n = \sum_{k=-N}^N a_k \cdot \exp[j\omega(n-k)T_d]$$

Частотная характеристика:

$$H_d(\omega) = \left. \frac{y_n}{x_n} \right|_{x_n = \exp(j\omega n T_d)} = \sum_{k=-N}^N a_k \exp(-j\omega k T_d) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \exp(-j\omega k T_d)$$

$$a_{-k} = a_k \quad H_d(\omega) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^N a_k \cos \omega k T_d$$

Четность-нечетность
коэффициентов:

$$a_{-k} = -a_k \quad H_d(\omega) = -2j \sum_{k=1}^N a_k \sin \omega k T_d$$

Частотная характеристика нерекурсивного фильтра

ЧХ цифрового фильтра периодична:

$$H_{\text{д}}(\omega) = H_{\text{д}}(\omega + r \cdot 2\pi/T_{\text{д}}), \quad r = \pm 1, 2, \dots$$

Коэффициенты:

$$a_k = \frac{T_{\text{д}}}{2\pi} \int_{-\pi/T_{\text{д}}}^{\pi/T_{\text{д}}} H_{\text{д}}(\omega) \exp(j\omega k T_{\text{д}}) d\omega$$

Расчет фильтра

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{для } |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{для } |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

$$a_k = a_{-k} = \frac{T_D}{\pi} \int_0^{\omega_c} 1 \cdot \cos k\omega T_D d\omega = \frac{2f_c}{f_D} \frac{\sin k \frac{\omega_c}{f_D}}{k \frac{\omega_c}{f_D}}$$

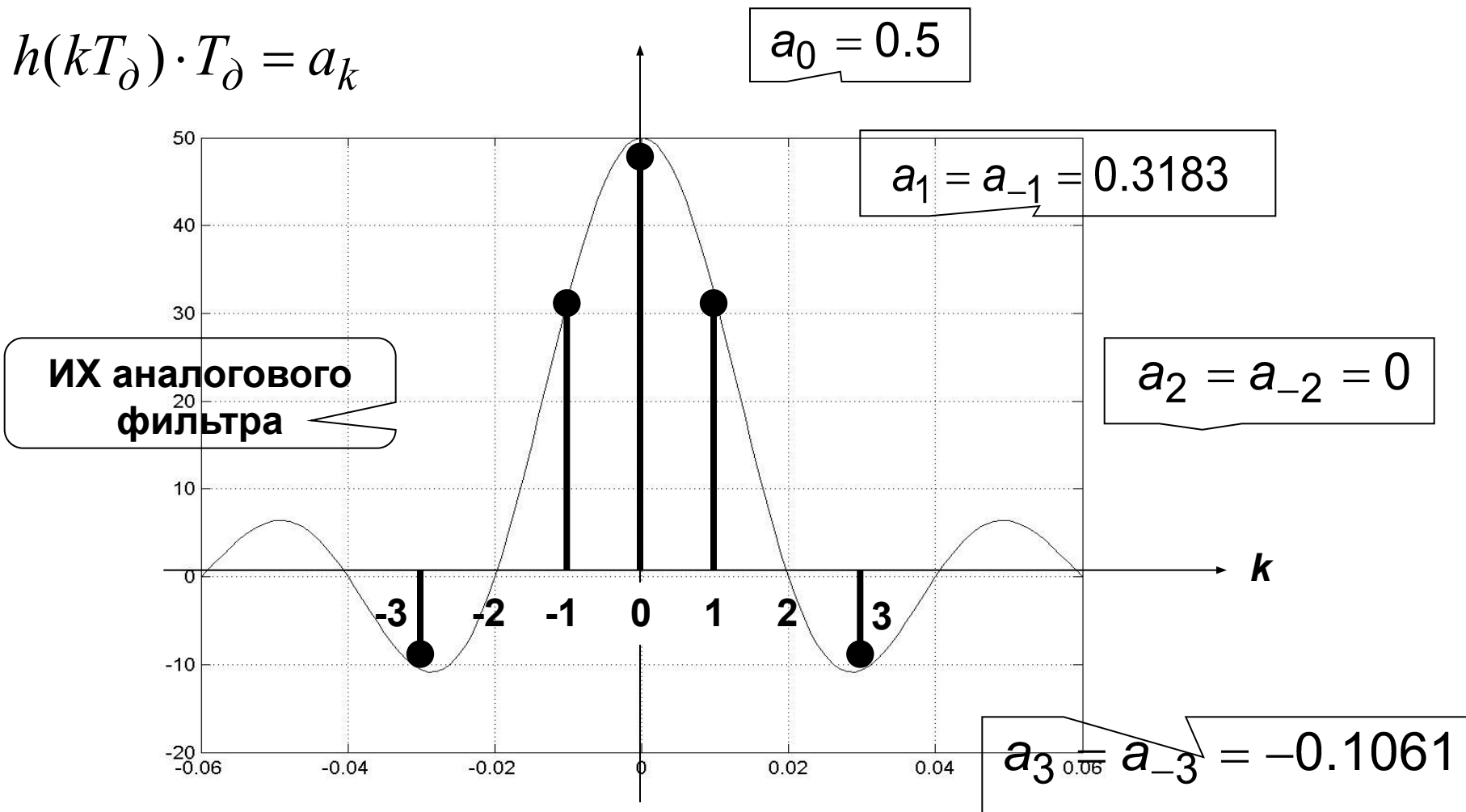
$$\Omega_c = \frac{\omega_c}{f_D} = 2\pi \frac{f_c}{f_D}$$

$$a_k = a_{-k} = \frac{\Omega_c}{\pi} \frac{\sin k\Omega_c}{k\Omega_c} = \frac{\Omega_c}{\pi} \text{Sinc}(k\Omega_c)$$

Пример расчета фильтра

$$a_k = a_{-k} = \frac{\Omega_c}{\pi} \text{Sa}(k\Omega_c) \quad N=3 \quad f_c = 25 \text{Гц} \quad f_d = 100 \text{Гц}$$

$$h(kT_d) \cdot T_d = a_k$$

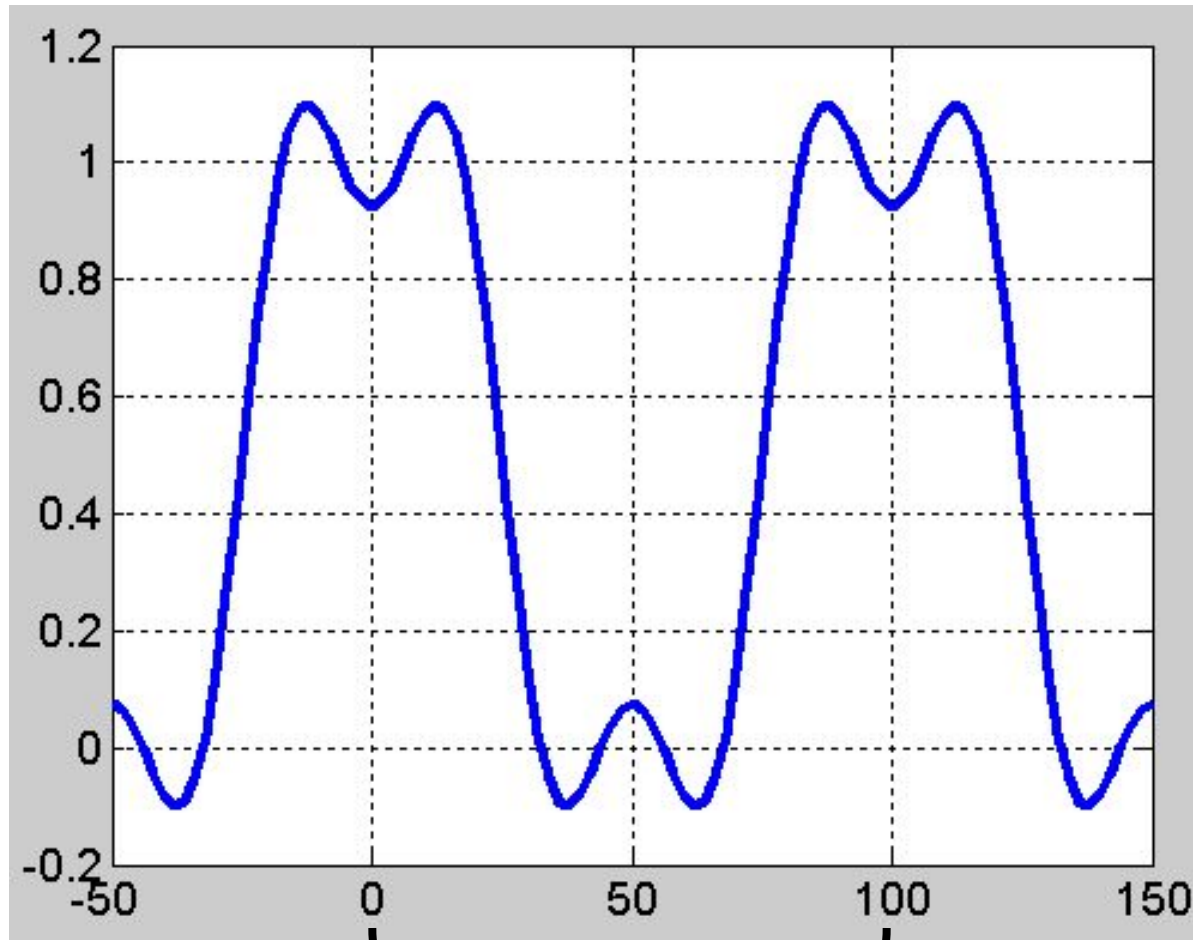


Расчет фильтра в Matlab

```
% === freq_har.m === Частотная хар-ка ФНЧ ===
a0=0.5; % нулевой коэффициент фильтра
ak=[0.3183 0 -0.1061]; % коэффициенты фильтра с 1 по 3
fd=100; % частота дискретизации
dt=1/fd; % период (шаг) дискретизации
N=3; % половина порядка фильтра
df=0.02*fd; % шаг по частоте
f=-0.5*fd:df:1.5*fd; % диапазон частот
% === расчет суммы ===
sum=0;
for k=1:N,
    sum=sum+ak(k)*cos(2*pi*f*k*dt);
end;
H=a0+2*sum; % частотная хар-ка
plot(f,H) % построение графика
grid on % построение сетки
```

Пример расчета фильтра

Частотная характеристика для $N=3$



$$F_d = 1/T_d$$

Окна в цифровых фильтрах

$$a'_k = w_k a_k \quad y_n = \sum_{k=-N}^N a'_k x_{n-k}$$

Прямоугольное (Дирихле)

$$w(n) = 1$$

Треугольное (Бартлетта)

$$w(n) = 1 - \frac{|n|}{N}$$

Хэннинга (Ханна)

$$w(n) = \cos^2\left(\frac{n}{2N}\pi\right) = 0,5 \left[1 + \cos\left(\frac{n}{N}\pi\right) \right]$$

Хэмминга

$$w(n) = 0,54 + 0,46 \cos\left(\frac{n}{N}\pi\right)$$

Блэкмана

$$w(n) = 0,42 + 0,5 \cos\left(\frac{n}{N}\pi\right) + 0,08 \cos\left(\frac{2n}{N}\pi\right)$$

Ланцоша

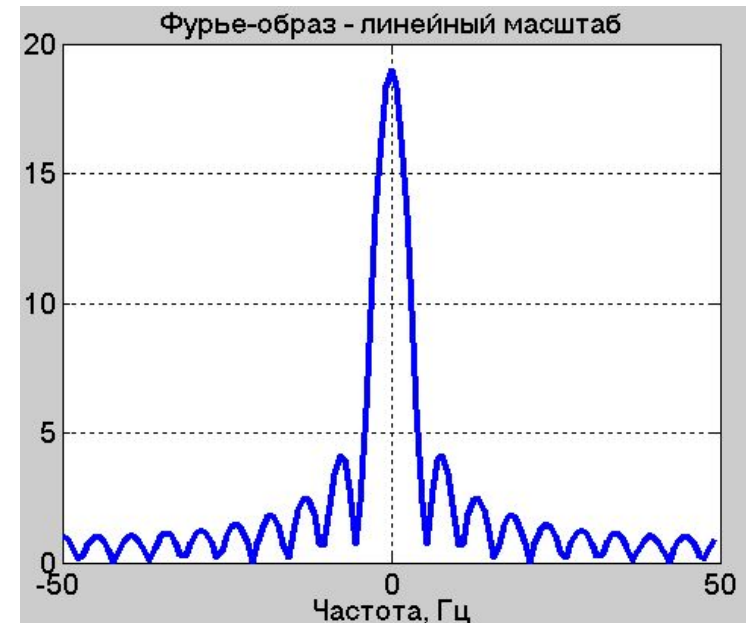
$$w(n) = \frac{\sin\left(\frac{n}{N}\pi\right)}{\frac{n}{N}\pi}$$

Прямоугольное (Дирихле)

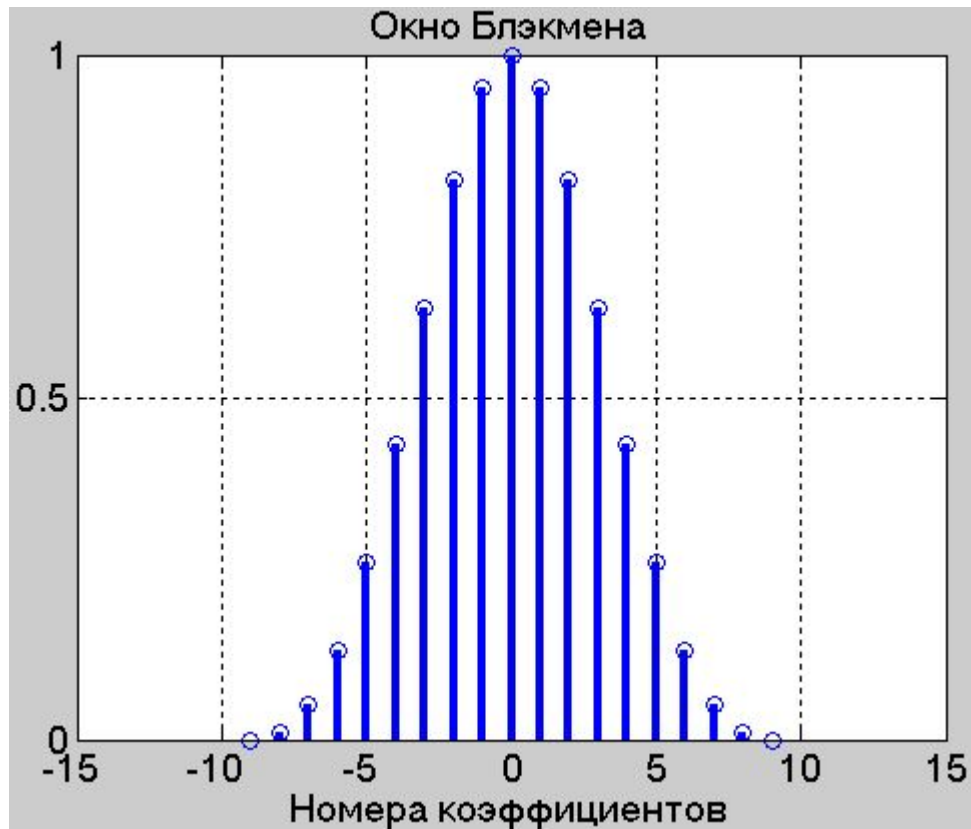


$$w(n) = 1$$

Уровень бокового лепестка: - 13 дБ

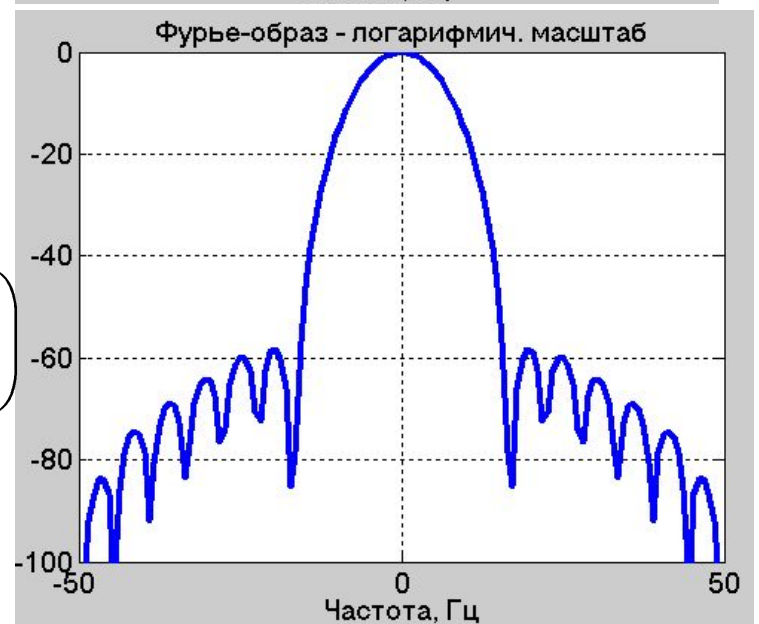
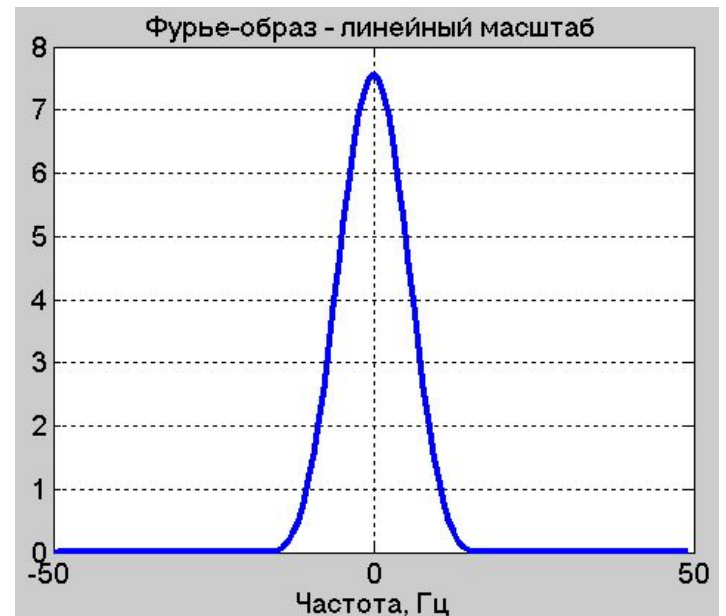


Окно Блэкмана



$$w(n) = 0,42 + 0,5 \cos\left(\frac{n}{N} \pi\right) + 0,08 \cos\left(\frac{2n}{N} \pi\right)$$

Уровень бокового лепестка: - 58 дБ



Спектральные образы окон – уровни боковых лепестков

Тип окна	Уровень бокового лепестка
Прямоугольное	-13 дБ (0,224)
Треугольное, Ланцоша	-27 дБ (0,045)
Ханна	-32 дБ (0,025)
Хэмминга	-43 дБ (0,007)
Блэкмена	-58 дБ (0,001)

Пример применения треугольного окна

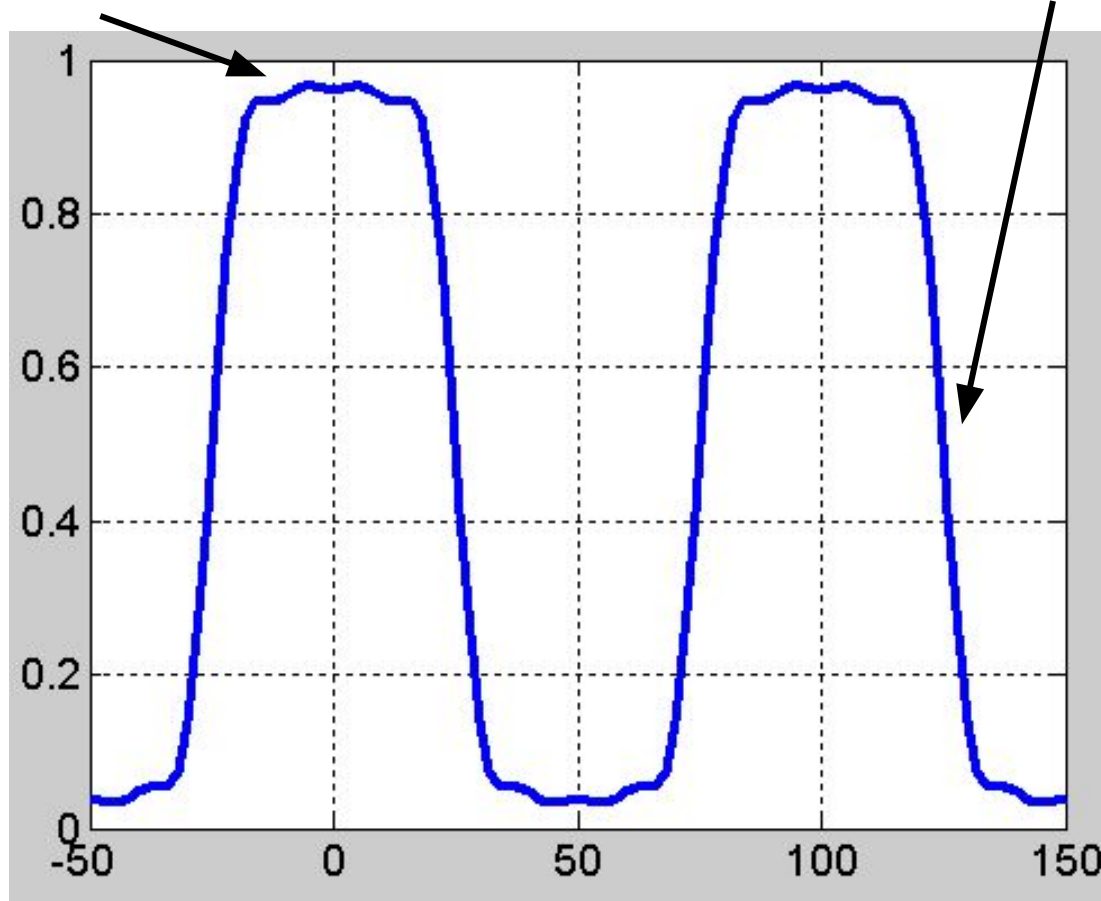
при

расчете фильтра

Частотная характеристика для $N=9$

Более гладкая АЧХ

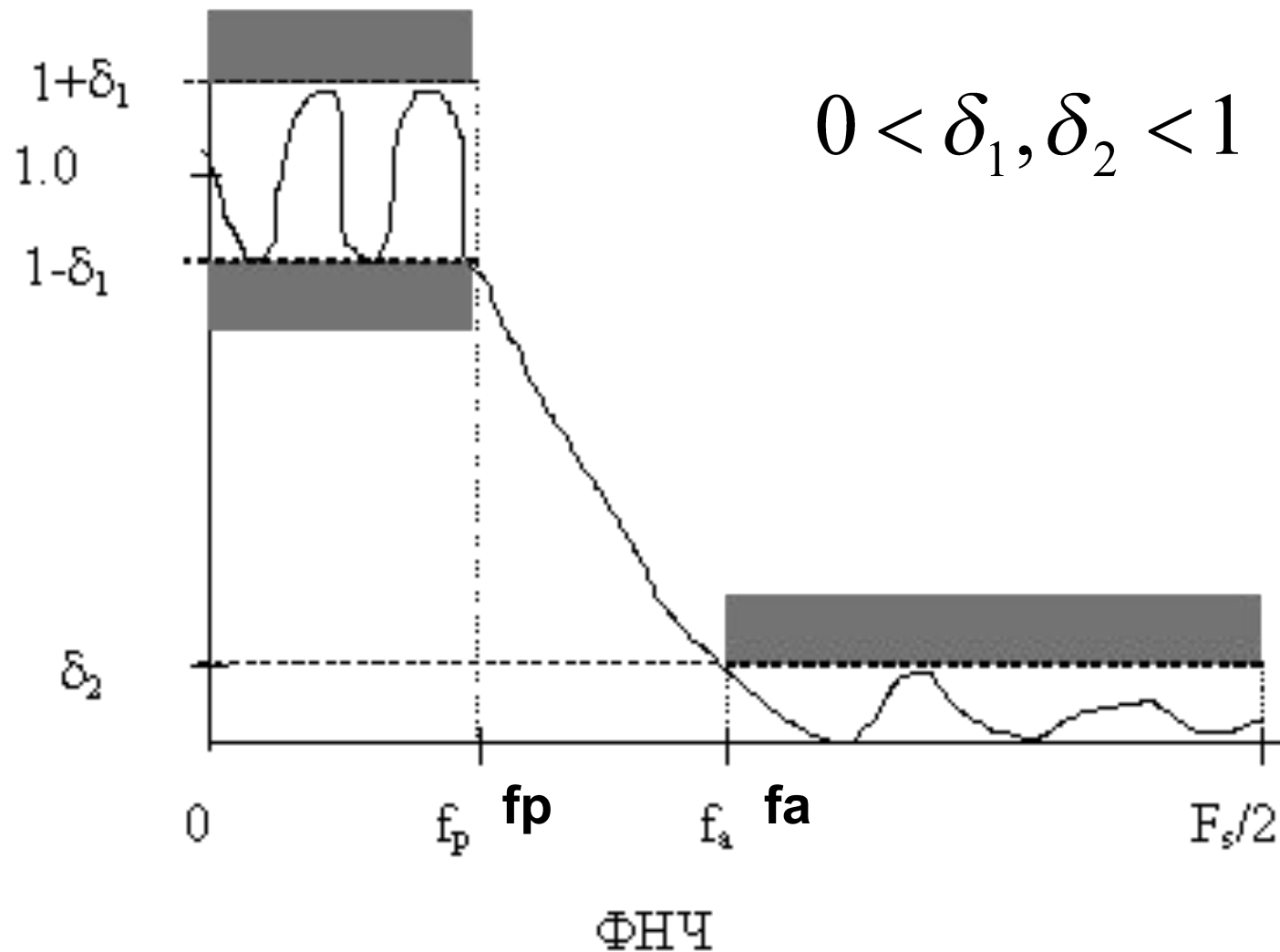
Более пологие скаты



Методика Кайзера расчета фильтра

- Выбирают значение параметра «альфа», исходя из уровня флуктуаций АЧХ
- Вычисляют порядок фильтра, исходя из:
 - уровня флуктуаций АЧХ;
 - размеров переходной зоны.
- Вычисляют коэффициенты a_k методом обратного преобразования Фурье

Уровень флуктуаций АЧХ и размеры переходной зоны



Расчет параметра «альфа»

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$$

$$A = -20 \lg \delta$$

$$\alpha = \begin{cases} 0, & A < 21 \\ 0.5842(A - 21)^{0.4} + 0.07886(A - 21), & 21 \leq A \leq 50 \\ 0.1102(A - 8.7), & A > 50 \end{cases}$$

Смысл параметра α

$\alpha = 0$:

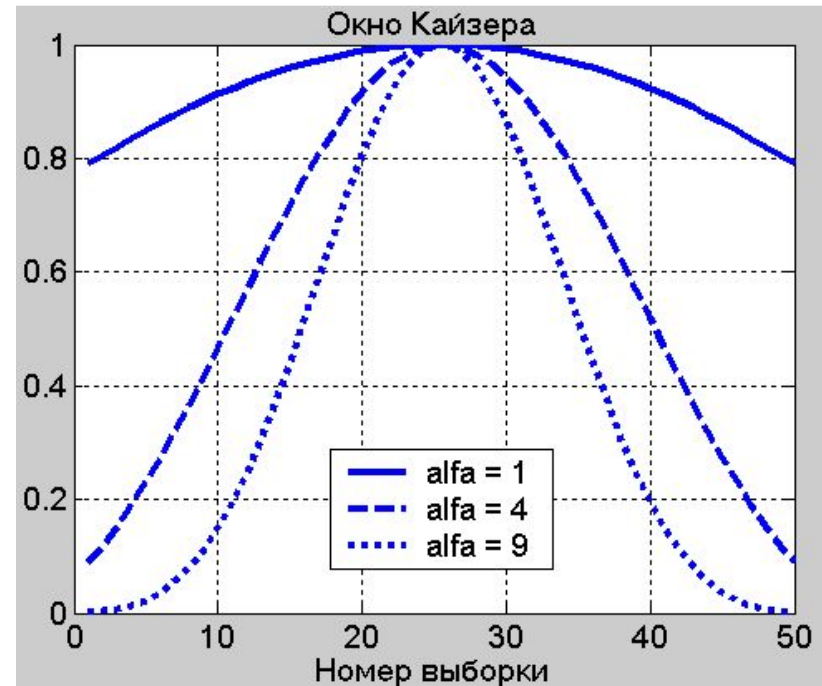
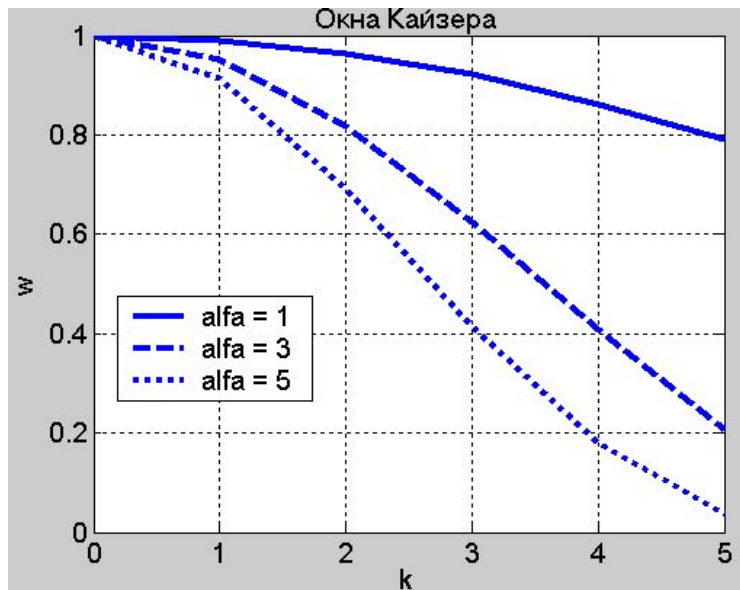
$$w_k = \frac{I_0(0)}{I_0(0)} = 1, \quad 0 \leq k \leq N$$

`N=5; alfa=1; k=0:N;`

`beta=alfa*sqrt(1-(k/N).^2);`

`w= besseli(0,beta)/ besseli(0,alfa);`

`plot(k,w)`



$\alpha = 1; 4; 9$

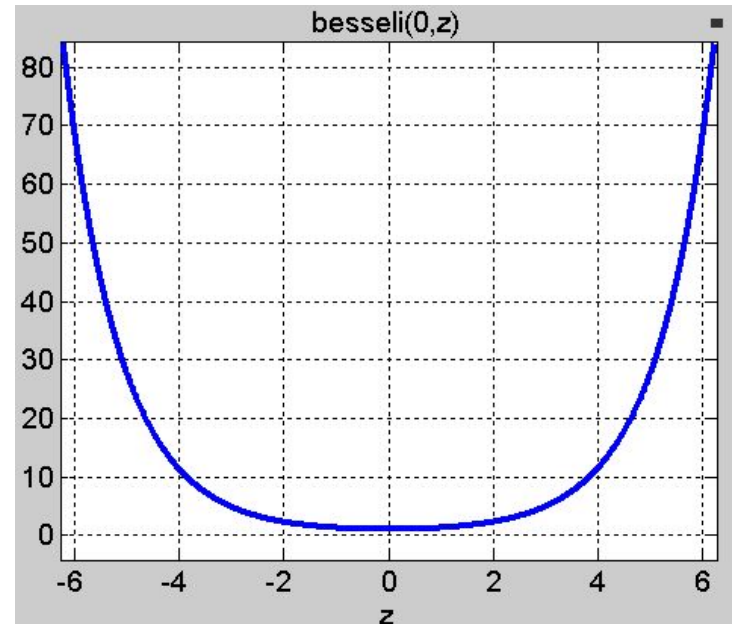
```
n = 50; k=1:n; % КОЛ-ВО ОТСЧЕТОВ ОКНА  
w1 = kaiser(n,1); plot(k,w1); hold on;  
w2 = kaiser(n,4); plot(k,w2);  
w3 = kaiser(n,9); plot(k,w3); grid on;  
legend('alfa = 1', 'alfa = 4', 'alfa = 9')
```

Функция Бесселя $I_0(x)$

$$I_0(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{1^2 \cdot 2^2} - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^6}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \dots$$

Построение графика в
Matlab:

```
>> syms x  
>> I = besseli(0,x);  
>> ezplot(I)
```



x	0	1	2	3	4	5	6
I = besseli(0,x)	1	1.266	2.280	4.881	11.302	27.240	67.234

Расчет КИХ-фильтров с окном Кайзера

$$y(n) = \sum_{k=-N}^N w_k a_k x(n-k)$$

$$w_k = w_{-k} = \frac{I_0(\beta_k)}{I_0(\alpha)}, \quad 0 \leq k \leq N$$

$$\beta_k = \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{k}{N}\right)^2}$$

$I_0(x)$ - функция Бесселя первого рода нулевого порядка

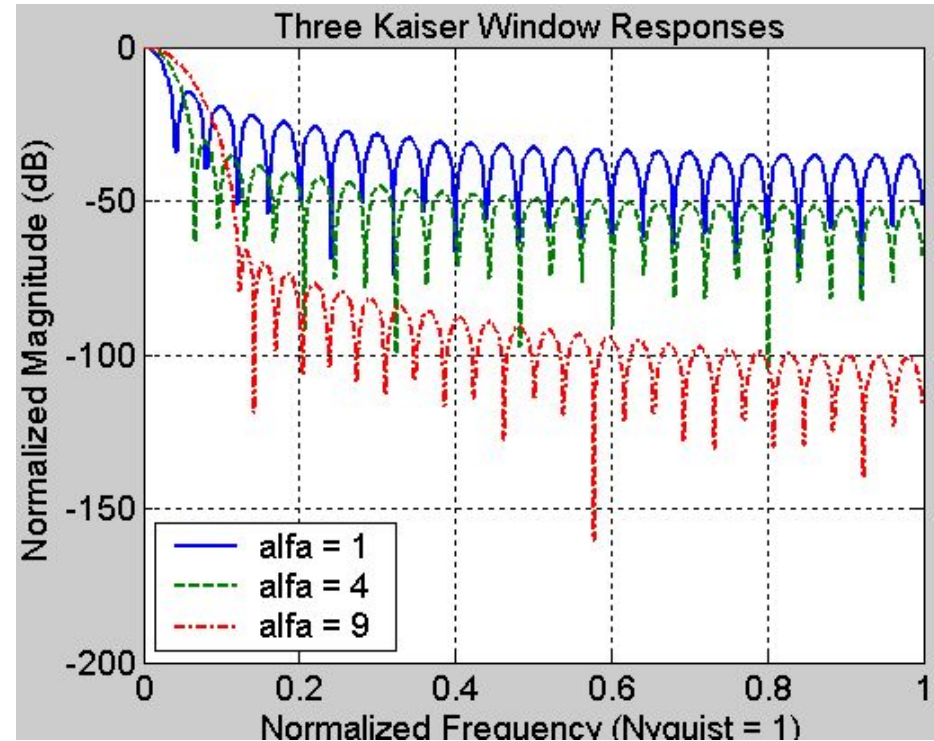
α - специальный числовой параметр окна Кайзера

АЧХ окна Кайзера

```
% W1 – Фурье-образ окна Кайзера
[W1,f] = freqz(w1/sum(w1),1,512,2);
[W2,f] = freqz(w2/sum(w2),1,512,2);
[W3,f] = freqz(w3/sum(w3),1,512,2);
plot(f,20*log10(abs(W1))); hold on;
plot(f, 20*log10(abs(W2)), 'g');
plot(f, 20*log10(abs(W3)), 'r');
legend('a=1', 'a=4', 'a=9')
grid on
```

Уровень боковых лепестков

$\alpha = 4$	-45,2
$\alpha = 9$	-90,5



С ростом параметра «альфа»
изменяются АЧХ окна Кайзера:

- 1) уменьшается уровень боковых лепестков,
- 2) расширяется главный лепесток

Размеры переходной зоны

ФНЧ:

$$B_f = f_a - f_p$$

$$f_c = f_p + \frac{B_f}{2}$$

ФВЧ:

$$B_f = f_p - f_a$$

$$f_c = f_a + \frac{B_f}{2}$$

ПФ:

$$B_f = \min\{(f_{p1} - f_{a1}), (f_{a2} - f_{p2})\}$$

$$f_{c1} = f_{p1} - \frac{B_f}{2}$$

$$f_{c2} = f_{p2} + \frac{B_f}{2}$$

РФ:

$$B_f = \min\{(f_{a1} - f_{p1}), (f_{p2} - f_{a2})\}$$

$$f_{c1} = f_{p1} + \frac{B_f}{2}$$

$$f_{c2} = f_{p2} - \frac{B_f}{2}$$

Расчет минимального порядка фильтра

Учет размеров
переходной зоны

$$P = \frac{F_s D}{B_f}$$

Учет уровня
флуктуаций

$$D = \begin{cases} 0.9222, & A \leq 21 \\ \frac{A - 7.95}{14.36}, & A > 21 \end{cases}$$

Расчеты по методике Кайзера в среде Matlab

✓ Вычисление параметров окна Кайзера:

$[p, Wn, \text{alfa}, \text{ftype}] = \text{kaiserord}(\text{fcuts}, \text{mags}, \text{devs}, \text{Fs})$

в полосе от нуля до $\text{fcuts}(1)$ АЧХ равна $\text{mags}(1)$,
в полосе от $\text{fcuts}(2)$ до $\text{fcuts}(3)$ АЧХ равна $\text{mags}(2)$, ... ,
в полосе от $\text{fcuts}(\text{end})$ до $\text{Fs}/2$ АЧХ равна $\text{mags}(\text{end})$

Параметр devs д.б. вектором той же длины, что и mags

✓ Вычисление отсчетов окна Кайзера:

$w = \text{kaiser}(p+1, \text{alfa})$

✓ Вычисление коэфф-в КИХ-фильтра с окном Кайзера:

$a = \text{fir1}(p, Wn, \text{ftype}, \text{kaiser}(p+1, \text{alfa}), \text{'noscale'})$

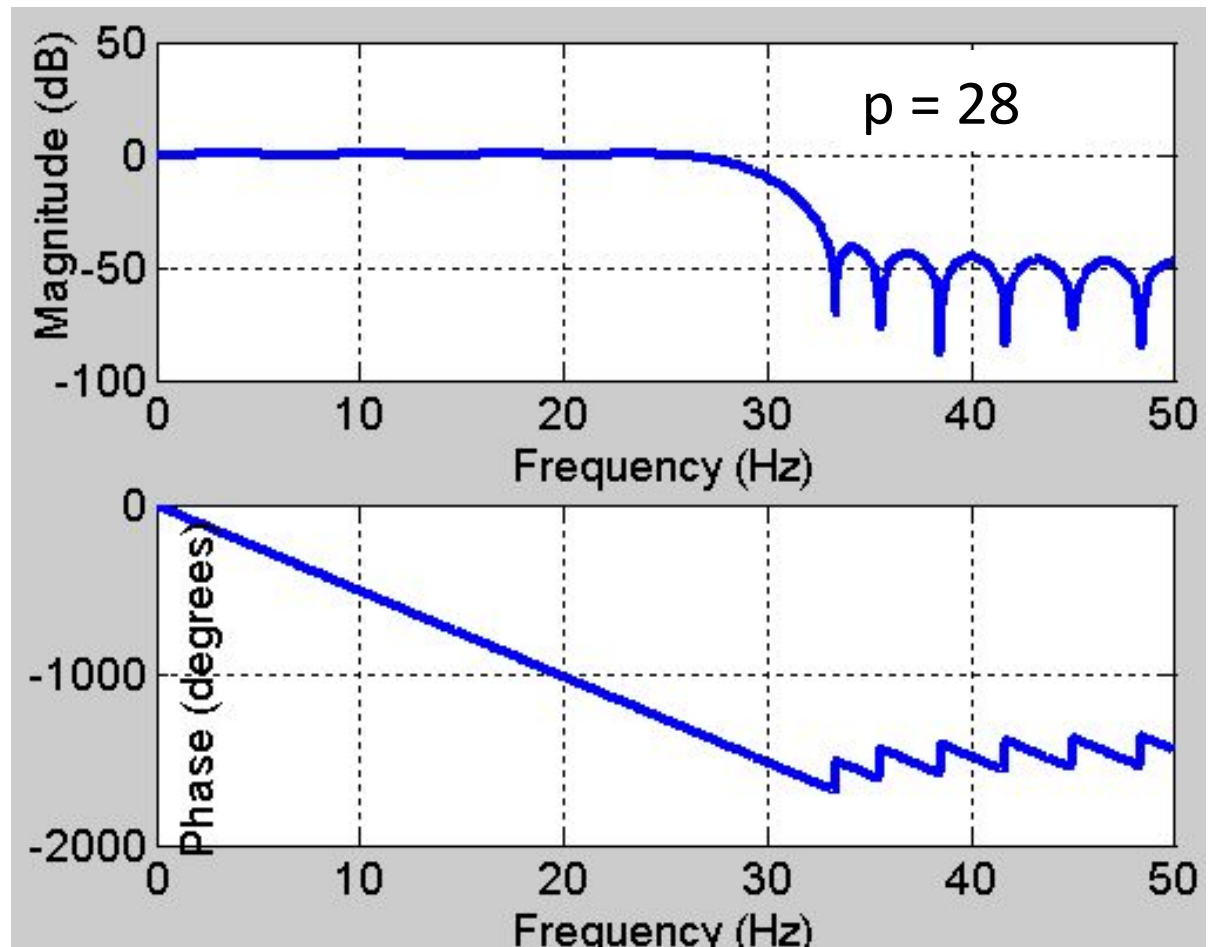
✓ Проверка расчетов путем построения АЧХ

$\text{freqz}(a, 1, 512, \text{Fs});$

Расчеты по методике Кайзера в среде Matlab

Пример:

```
Fs = 100;  
fcuts = [25 33];  
mags = [1 0];  
devs = [0.05 0.01];  
[p,Wn,alfa,ftype] = kaiserord(fcuts,mags,devs,Fs);  
a = fir1(p,Wn,ftype,kaiser(p+1,alfa),'noscale');  
freqz(a, 1, 512, Fs)
```



Синтез оптимальных (по Чебышеву) КИХ-фильтров

Теоретическое обоснование

Недостатки оконного метода:

- Уменьшение крутизны АЧХ в переходной зоне
- Трудно прогнозировать форму АЧХ фильтра

Синтез фильтров, оптимальных по Чебышеву –
задача оптимальной аппроксимации $H(\omega)$:

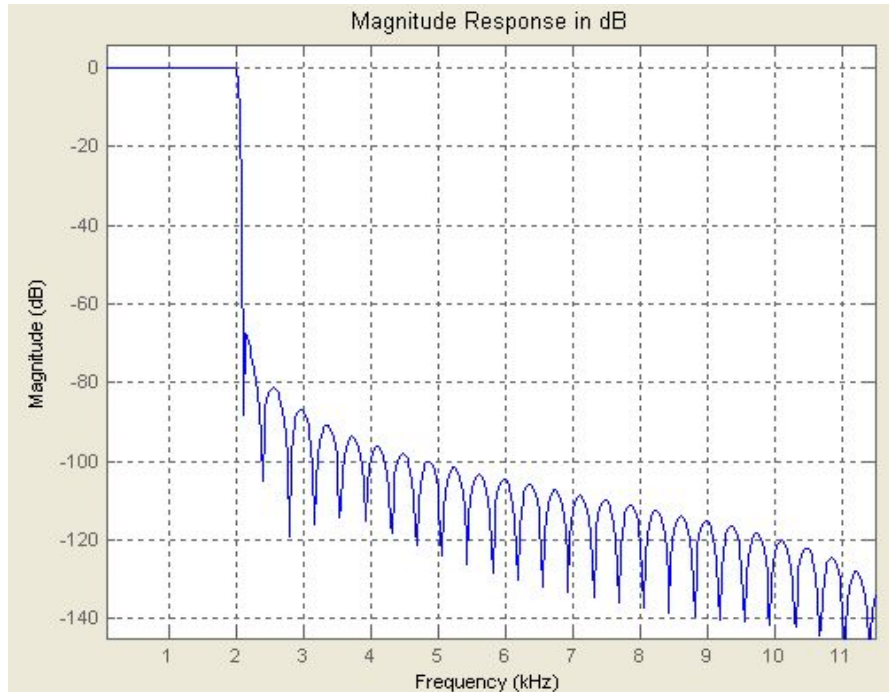
$$J = \min(\max[H_d(\omega) - H(\omega)])$$

- наилучшее равномерное приближение

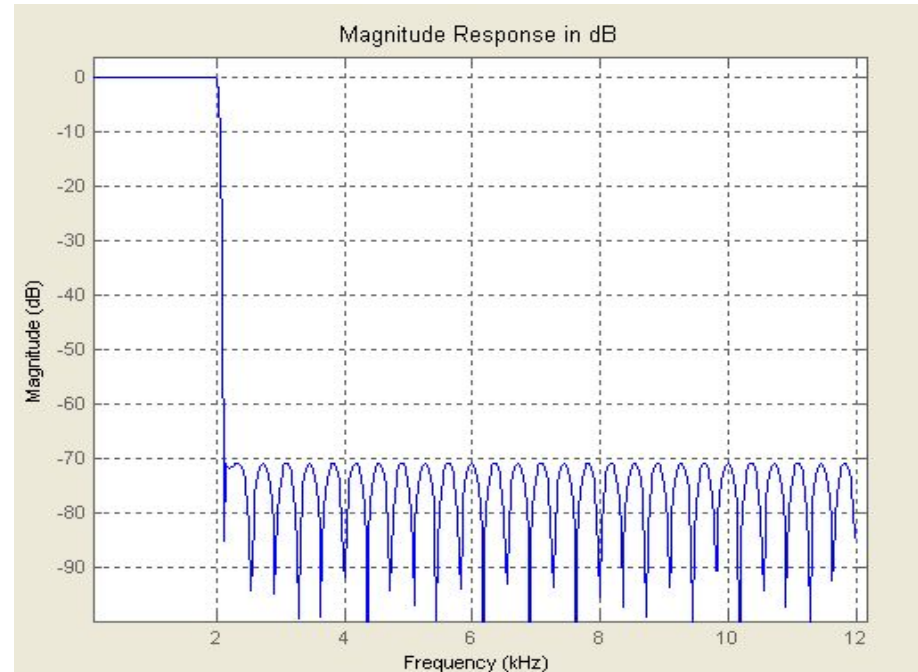
Задаются:

- 1) Граничные частоты;
- 2) Величина предельно допустимых флуктуаций

Сопоставление АЧХ фильтров: окно Кайзера и метод Чебышева



АЧХ фильтра
синтезированного с
окном Кайзера



АЧХ фильтра
синтезированного по
методу Чебышева

Теорема Чебышева об альтернансе

Тригонометрический полином:

$$H_{\delta}(\omega) = \sum_{k=0}^N a_k \cos \omega k \Delta t$$

Для наилучшего равномерного приближения функции $H(\omega)$ полиномом $H_{\delta}(\omega)$ необходимо и достаточно, чтобы равенство

$$\delta(\omega) = |H_{\delta}(\omega) - H(\omega)|$$

выполнялось не менее чем в $N+2$ точках (точках альтернанса), принадлежащих интервалам аппроксимации, причем знак разности чередуется от точки к точке

Ограничения на ЧХ синтезируемого фильтра



Алгоритм Ремеза (Е.Я. Ремез - украинский академик (1896-1975))

Составляется и решается система $N+2$ уравнений:

$$H(\hat{\omega}_i) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^N a_k \cos(\hat{\omega}_i k T_0) + (-1)^i \delta, \quad i = 1, 2, \dots, N + 2$$

$\hat{\omega}_i$ - частоты альтернанса; a_k - искомые коэффициенты.

Поскольку частоты альтернанса неизвестны:

- ✓ на первой итерации они задаются приблизительно;
- ✓ на последующих итерациях они уточняются.

Недостаток метода – может потребоваться много итераций

Компьютерная реализация алгоритма Ремеза в Matlab

1) определяют минимальный порядок фильтра n :

$$[n, f_0, a_0, w] = \text{remezord}(f, A, \text{dev}, F_s)$$



вспомогательные параметры

параметры f, A совместно задают кусочно-постоянную АЧХ в зонах пропускания и задержания

2) вычисляют коэффициенты фильтра:

$$a = \text{remez}(n, f_0, a_0, w)$$

В последних версиях Matlab:

Remez



Parks, McClellan

remezord



firpmord

remez

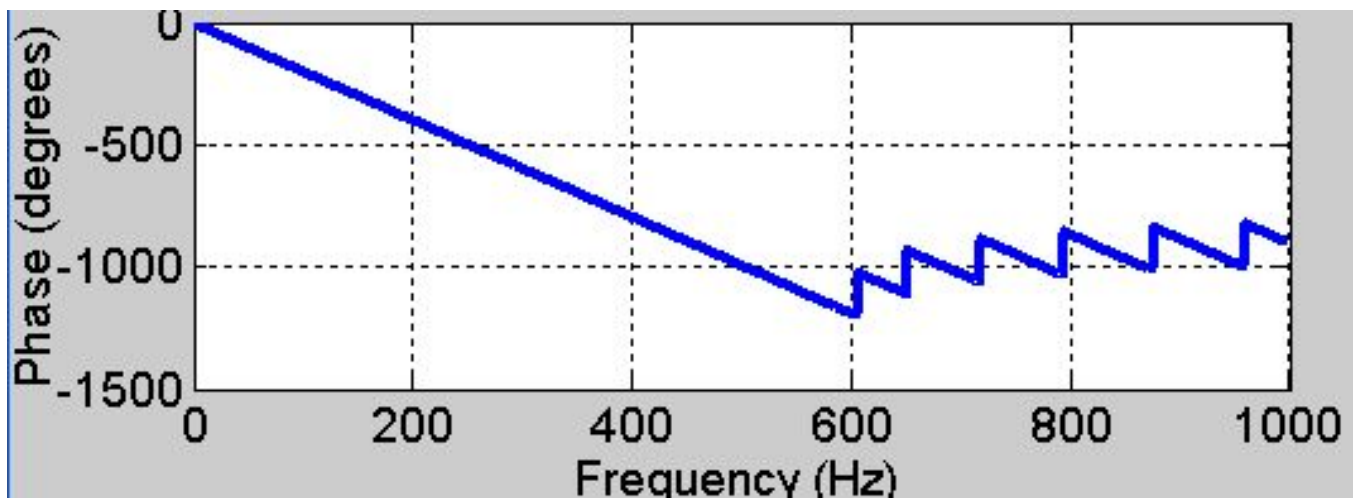
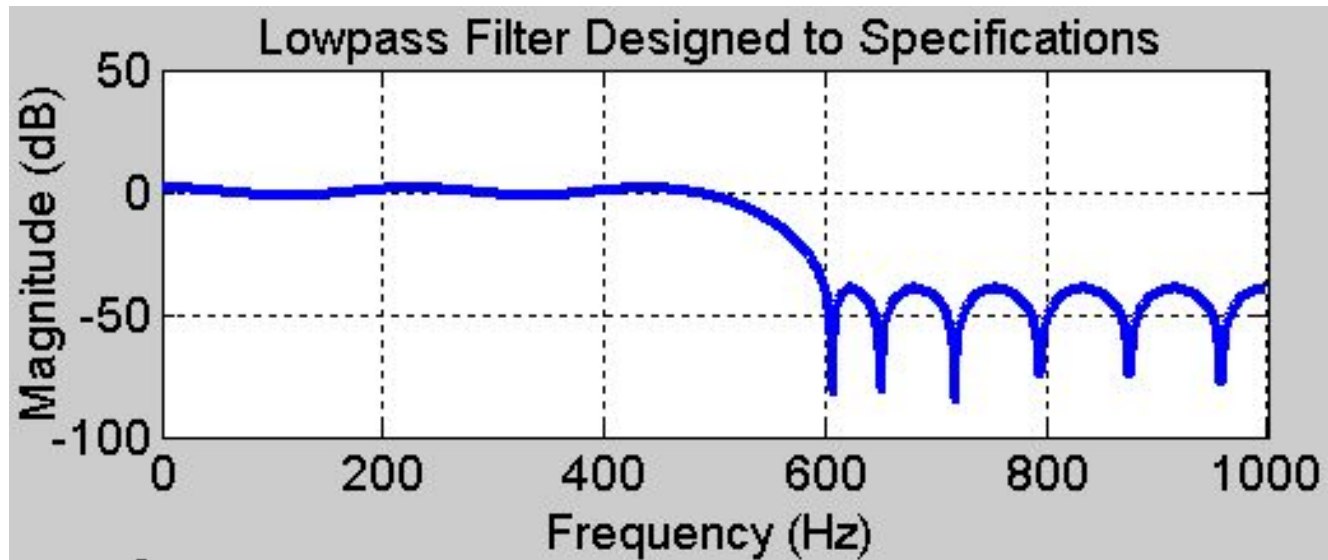


firpm

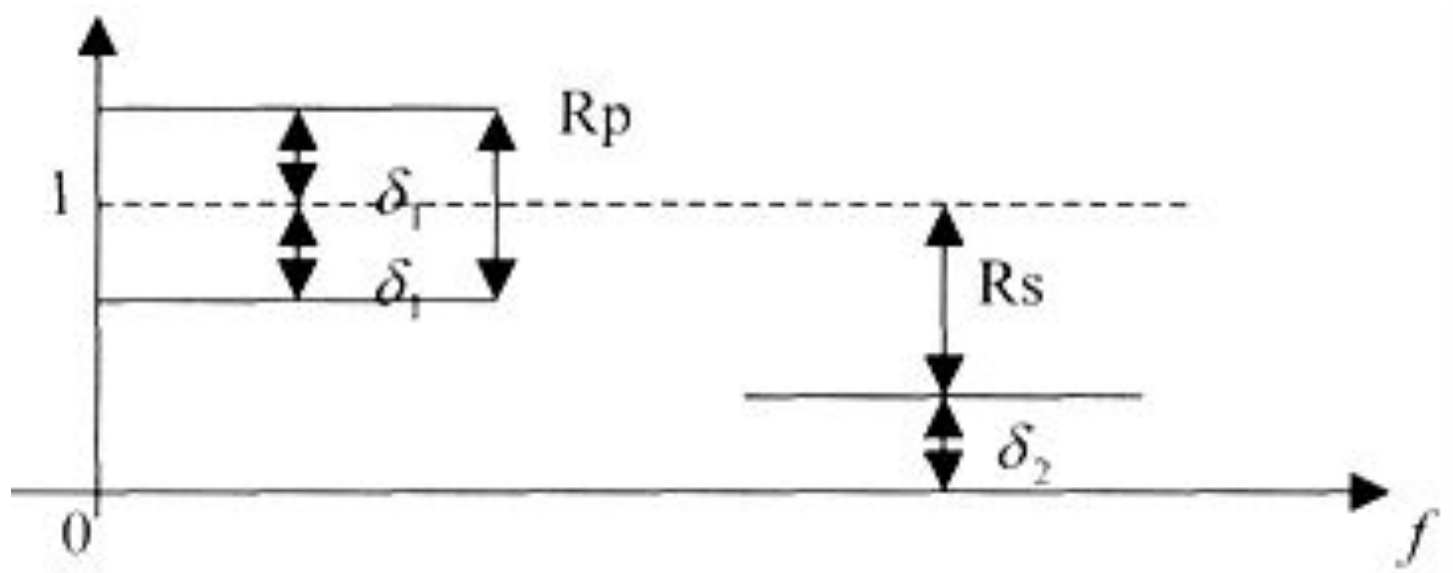
Пример: синтез НЧ фильтра с граничными частотами 500 Гц и 600 Гц, частотой дискретизации 2 кГц

```
Rp = 3;      % Неравномерн. в полосе пропуск. (в дБ)
Rs = 40;    % Неравномерн. в полосе задерж. (в дБ)
Fs = 2000;  % Частота дискретизации
f = [500 600]; % Границы переходной зоны
A = [1 0];  % Желаемые значения АЧХ
% Расчет девиаций
dev = [(10^(Rp/20)-1)/(10^(Rp/20)+1) 10^(-Rs/20)];
[n, fo, ao, w] = remezord(f, A, dev, Fs);
a = remez(n, fo, ao, w);
freqz(a, 1, 1024, Fs);
title('Lowpass Filter Designed to Specifications');
```

Пример: результаты расчетов



Пример: пересчет девиаций в дБ



$$R_p = 20 \lg \frac{1 + \delta_1}{1 - \delta_1}, \quad \delta_1 = \frac{10^{\frac{R_p}{20}} - 1}{10^{\frac{R_p}{20}} + 1};$$

$$R_s = -20 \lg \delta_2, \quad \delta_2 = 10^{-\frac{R_s}{20}}.$$