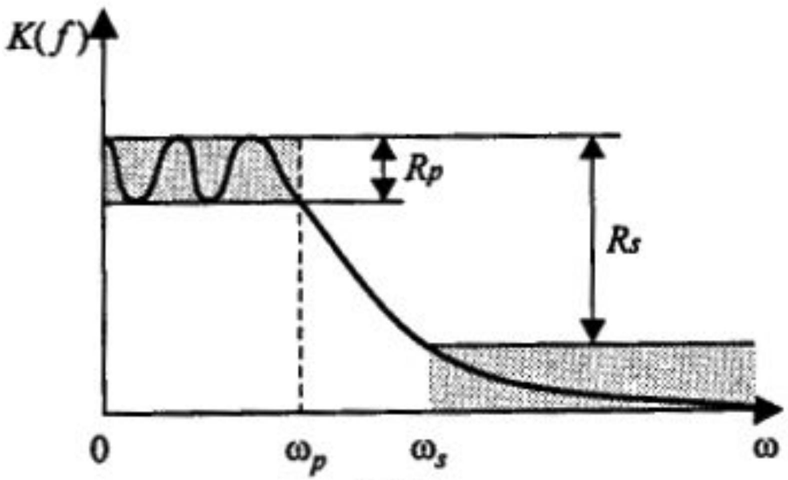
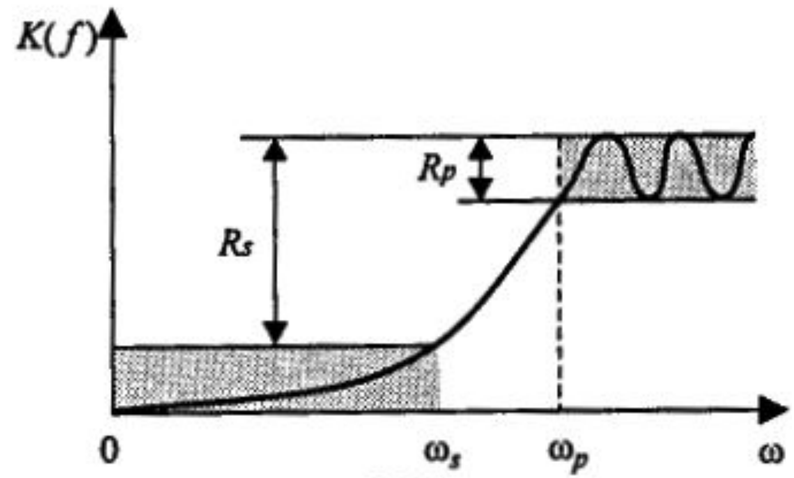
Методы расчета КИХ-фильтров

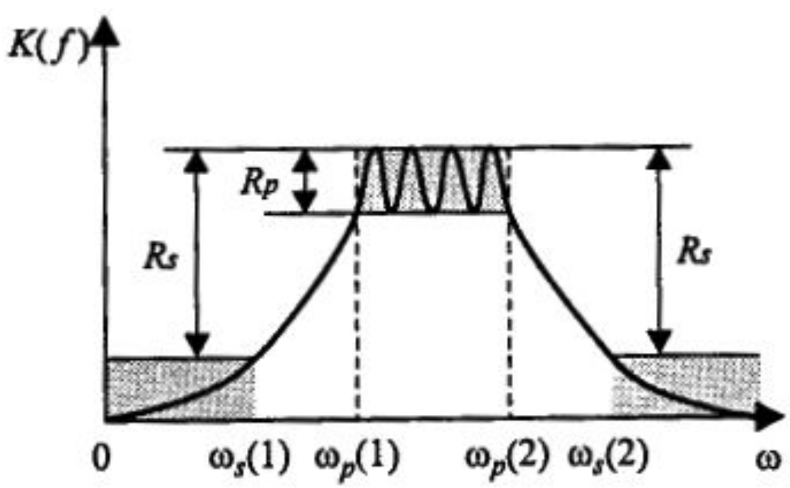
Параметры для расчета фильтров



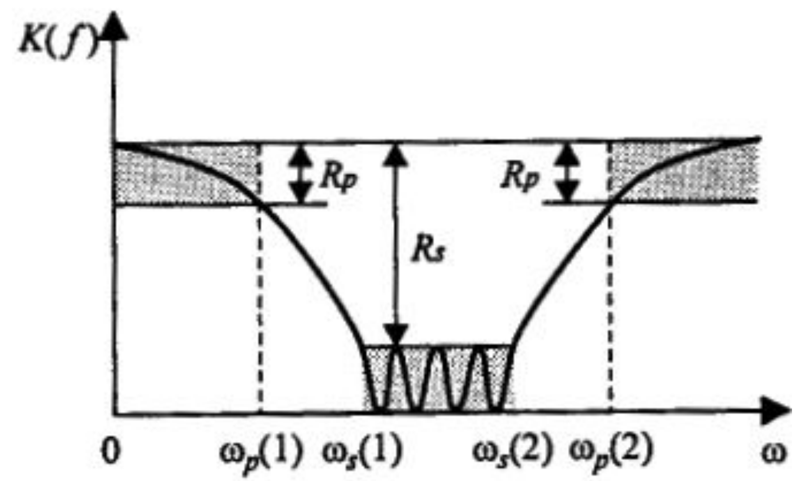
ФНЧ



ФВЧ



Полосовой фильтр



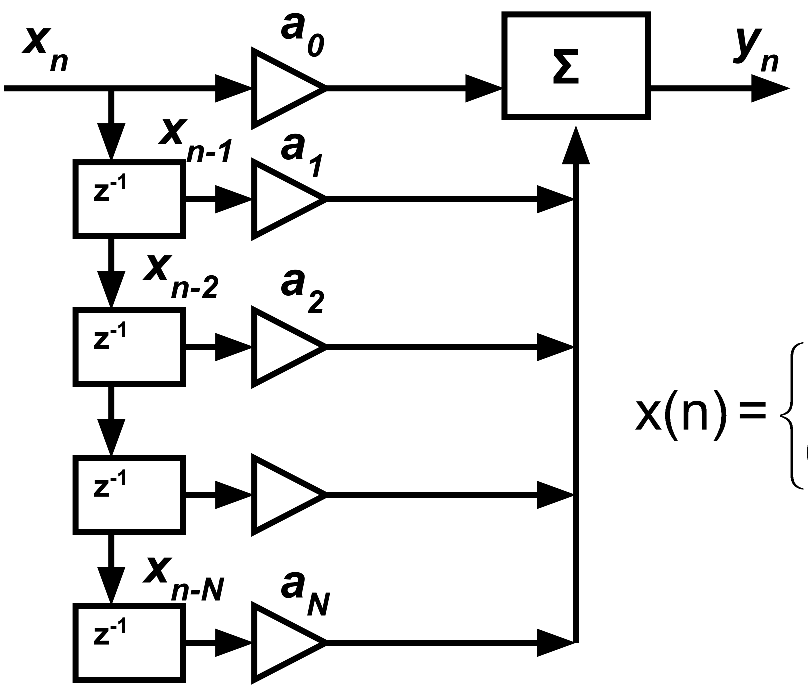
Режекторный фильтр

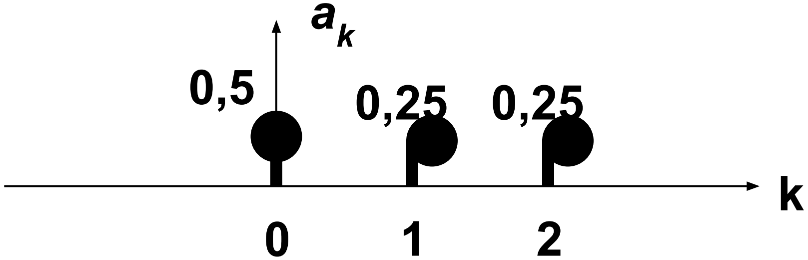
Нерекурсивные фильтры

Уравнение нерекурсивного фильтра

Несимметричная форма:

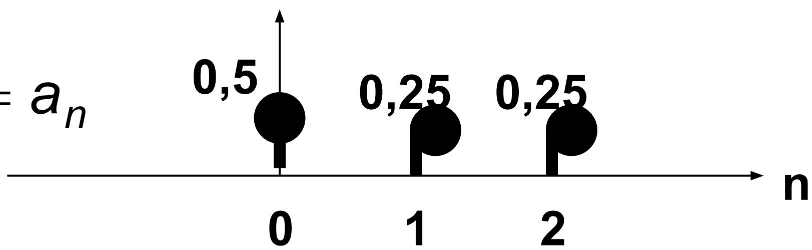
$$y(n)=\sum_{k=0}^{N}a_k x(n-k)$$





$$x(n)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad n=0\\ 0 & \text{при} \quad n\neq 0\end{cases}$$

$$y(n)=a_n$$



Уравнение нерекурсивного фильтра

Симметричная форма: $$y(n) = \sum_{k=-N}^{N} a_k x(n-k)$$

Пример: N=2

$$y(n) = a_{-2}x(n+2) + a_{-1}x(n+1) + a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + a_2 x(n-2)$$

будущие выборки

Симметричная форма записи адекватна обработке записанных сигналов

Частотная характеристика нерекурсивного фильтра

Воздействие – комплексная гармоника: $x_n = \exp(j\omega n T_д)$

Отклик: $y_n = \sum\limits_{k=-N}^{N} a_k \cdot \exp[j\omega(n-k)T_д]$

Частотная характеристика:

$$H_д(\omega) = \left.\frac{y_n}{x_n}\right|_{x_n=\exp(j\omega n T_д)} = \sum_{k=-N}^{N} a_k \exp(-j\omega k T_д) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \exp(-j\omega k T_д)$$

Четность-нечетность коэффициентов:

$$a_{-k} = a_k \qquad H_д(\omega) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{N} a_k \cos\omega k T_д$$

$$a_{-k} = -a_k \qquad H_д(\omega) = -2j\sum_{k=1}^{N} a_k \sin\omega k T_д$$

Частотная характеристика нерекурсивного фильтра

ЧХ цифрового фильтра периодична:

$$H_{д}(\omega) = H_{д}(\omega + r \cdot 2\pi / T_{д}), \quad r = \pm 1, 2, \ldots$$

Коэффициенты:

$$a_k = \frac{T_\partial}{2\pi} \int_{-\pi/T_\partial}^{\pi/T_\partial} H_\partial(\omega) \exp(j\omega k T_\partial) d\omega$$

Расчет фильтра

$$\mathrm{H}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad |\omega| \le \omega_c \\ 0 & \text{для} \quad |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

$$a_k = a_{-k} = \frac{\mathrm{T_Д}}{\pi} \int_0^{\omega_\mathrm{c}} 1 \cdot \cos \mathrm{k}\omega \mathrm{T_Д} d\omega = \frac{2\mathrm{f_c}}{\mathrm{f_Д}} \frac{\sin \mathrm{k} \,{}^{\omega_\mathrm{c}}\!/\!_{\mathrm{f_Д}}}{\mathrm{k} \,{}^{\omega_\mathrm{c}}\!/\!_{\mathrm{f_Д}}}$$

$$\Omega_\mathrm{c} = \frac{\omega_\mathrm{c}}{f_\mathrm{Д}} = 2\pi \frac{\mathrm{f_c}}{\mathrm{f_Д}}$$

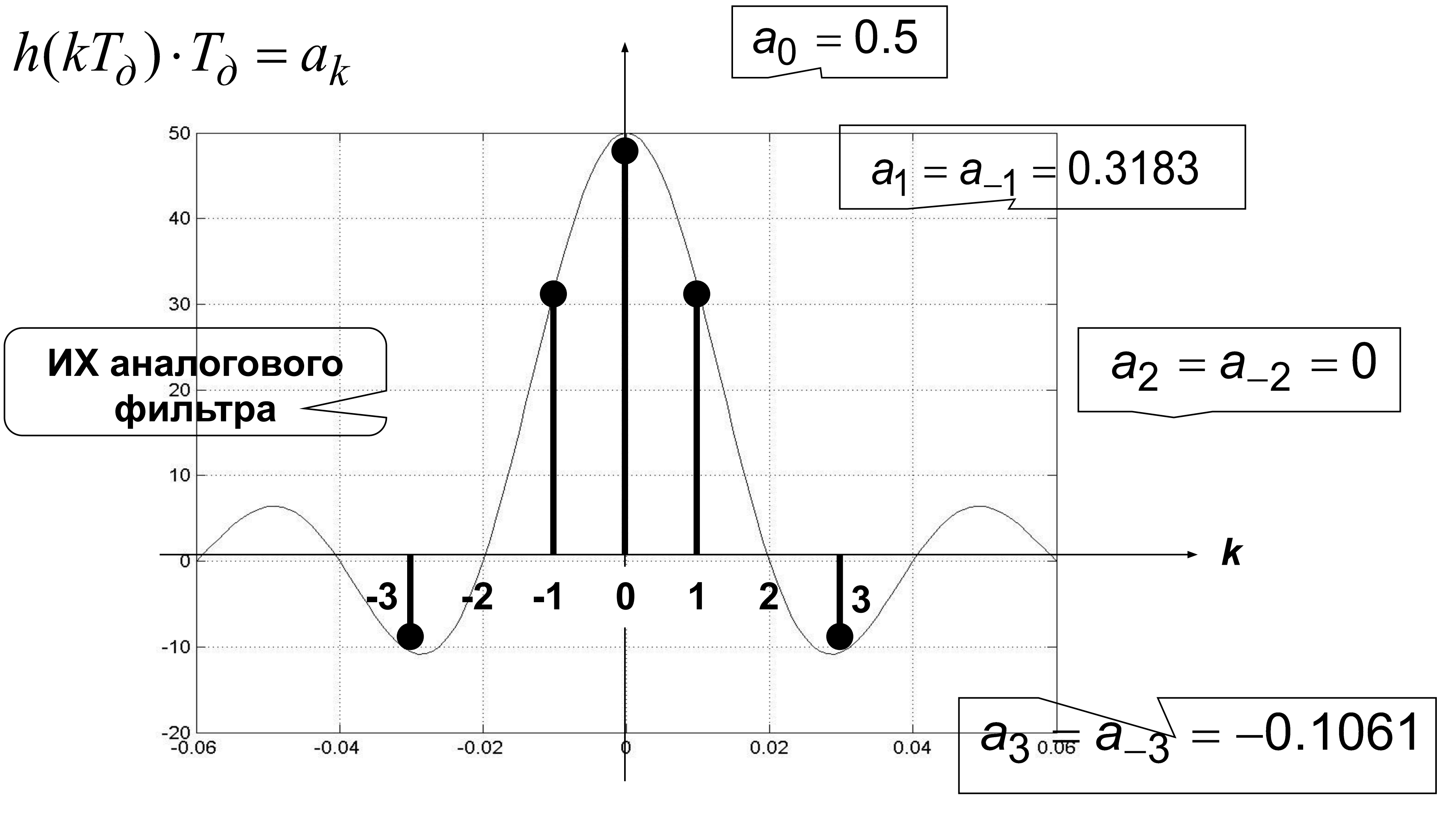
$$a_k = a_{-k} = \frac{\Omega_c}{\pi} \frac{\sin k\Omega_c}{k\Omega_c} = \frac{\Omega_c}{\pi} Sinc(k\Omega_c)$$

Пример расчета фильтра

$$a_k = a_{-k} = \frac{\Omega_c}{\pi} Sa(k\Omega_c)$$

N=3 $f_c = 25Гц$ $f_д = 100Гц$

$$h(kT_\partial) \cdot T_\partial = a_k$$

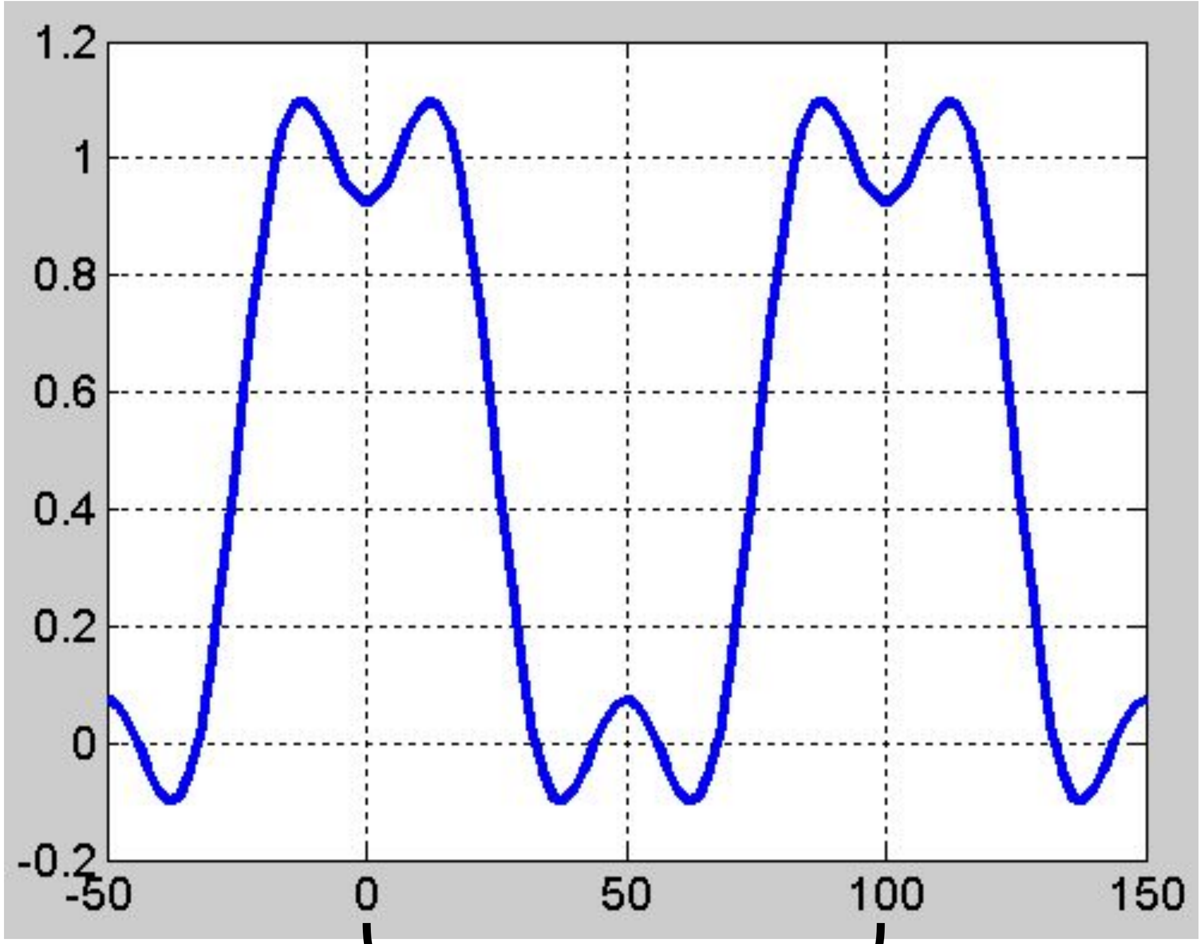


Расчет фильтра в Matlab

```
% === freq_har.m === Частотная хар-ка ФНЧ ===
a0=0.5;                          % нулевой коэффициент фильтра
ak=[0.3183 0 -0.1061];           % коэффициенты фильтра с 1 по 3
fd=100;                          % частота дискретизацации
dt=1/fd;                         % период (шаг) дискретизации
N=3;                             % половина порядка фильтра
df=0.02*fd;                      % шаг по частоте
f=-0.5*fd:df:1.5*fd;             % диапазон частот
% === расчет суммы ===
sum=0;
for k=1:N,
  sum=sum+ak(k)*cos(2*pi*f*k*dt);
end;
H=a0+2*sum;                      % частотная хар-ка
plot(f,H)                        % построение графика
grid on                          % построение сетки
```

Пример расчета фильтра

Частотная характеристика для N=3



Fd = 1/Td

Окна в цифровых фильтрах

$$a'_k = w_k\, a_k \qquad y_n = \sum_{k=-N}^{N} a'_k\, x_{n-k}$$

Прямоугольное (Дирихле)

$$w(n) = 1$$

Треугольное (Бартлетта)

$$w(n) = 1 - \frac{|n|}{N}$$

Хэннинга (Ханна)

$$w(n) = \cos^2\left(\frac{n}{2N}\pi\right) = 0{,}5\left[1 + \cos\left(\frac{n}{N}\pi\right)\right]$$

Хэмминга

$$w(n) = 0{,}54 + 0{,}46\cos\left(\frac{n}{N}\pi\right)$$

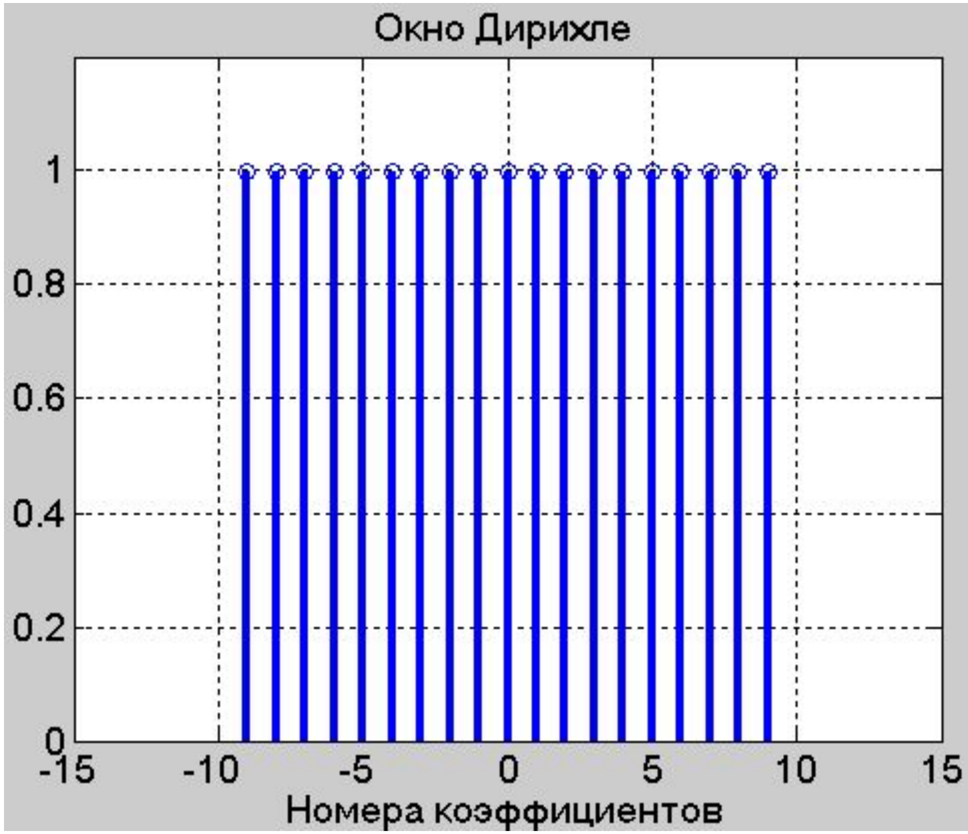
Блэкмана

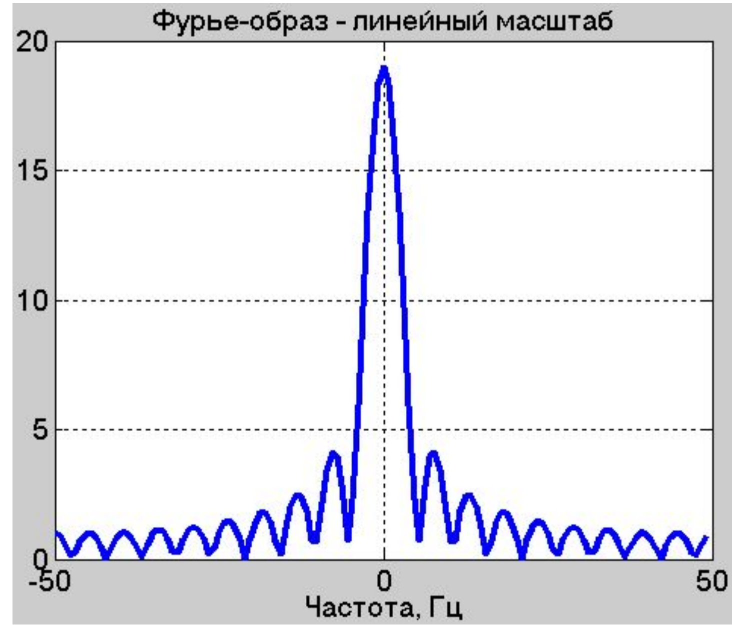
$$w(n) = 0{,}42 + 0{,}5\cos\left(\frac{n}{N}\pi\right) + 0{,}08\cos\left(\frac{2n}{N}\pi\right)$$

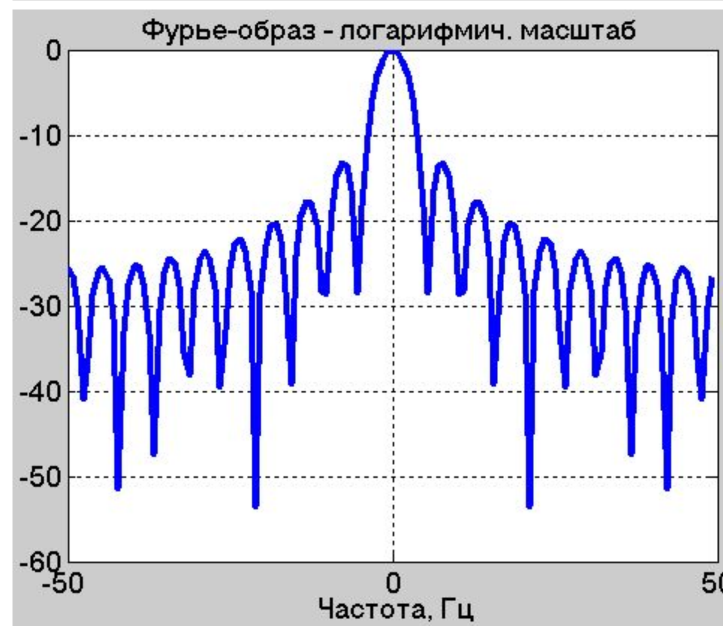
Ланцоша

$$w(n) = \sin\left(\frac{n}{N}\pi\right) \Big/ \frac{n}{N}\pi$$

Прямоугольное (Дирихле)



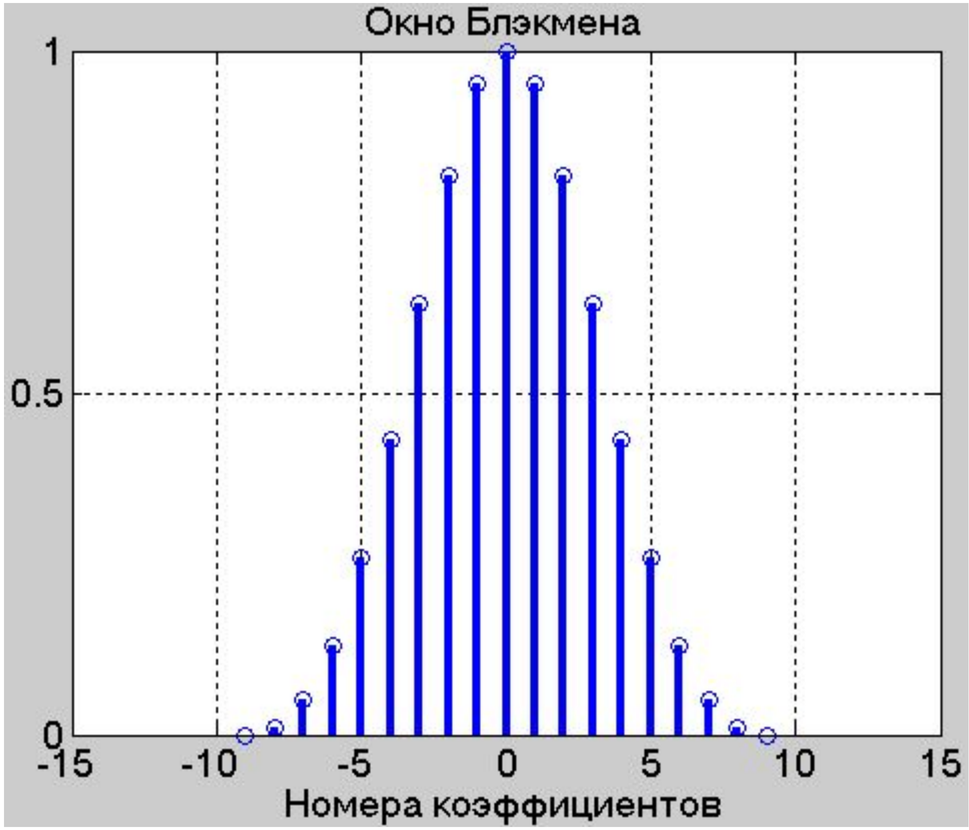


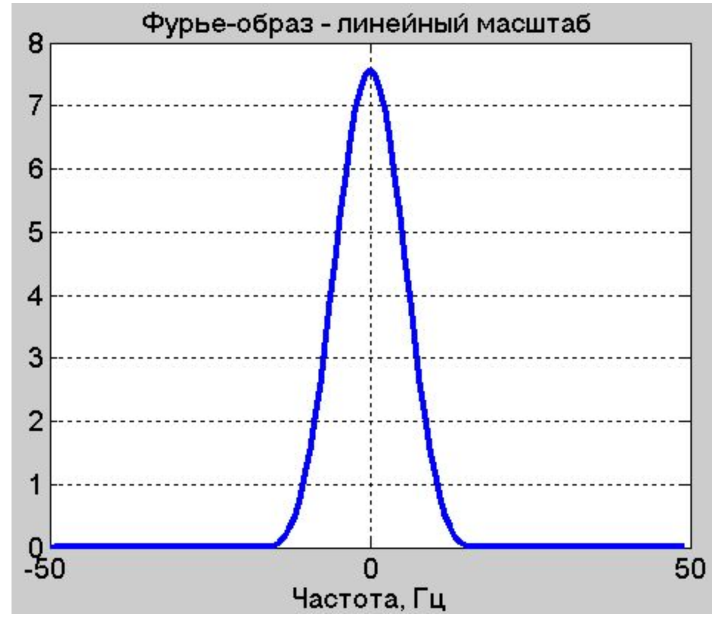


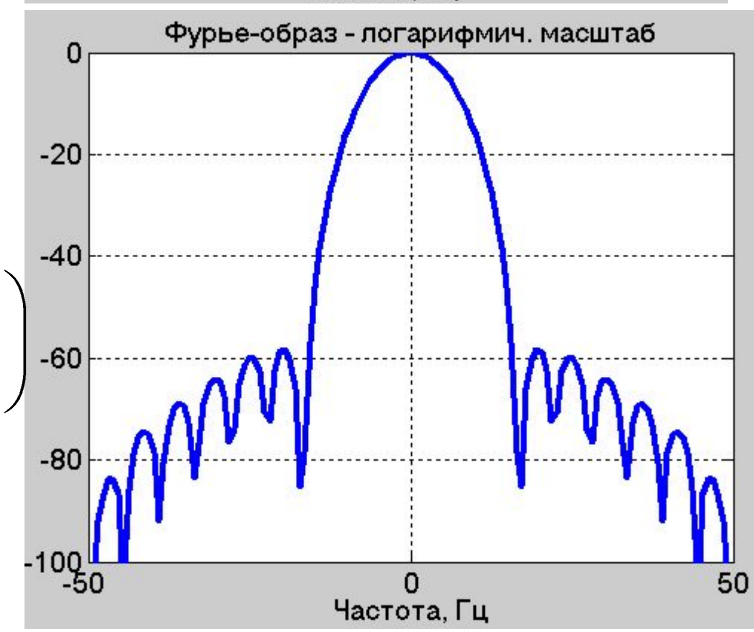
$$w(n) = 1$$

Уровень бокового лепестка: - 13 дБ

Окно Блэкмана







$$w(n) = 0{,}42 + 0{,}5\cos\left(\frac{n}{N}\pi\right) + 0{,}08\cos\left(\frac{2n}{N}\pi\right)$$

Уровень бокового лепестка: - 58 дБ

Спектральные образы окон – уровни боковых лепестков

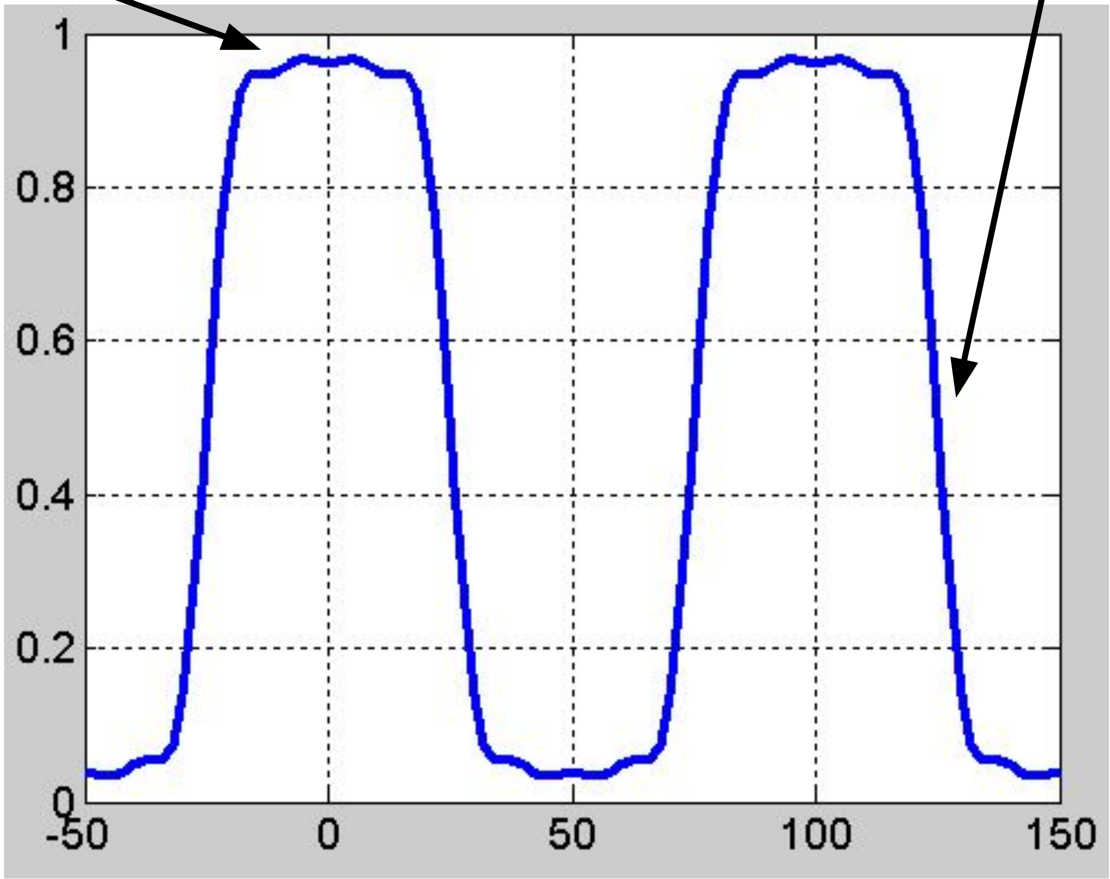
Тип окна	**Уровень бокового лепестка**
Прямоугольное	**-13** дБ (0,224)
Треугольное, Ланцоша	**-27** дБ (0,045)
Ханна	**-32** дБ (0,025)
Хэмминга	**-43** дБ (0,007)
Блэкмена	**-58** дБ (0,001)

Пример применения треугольного окна при расчете фильтра

Частотная характеристика для N=9

Более гладкая АЧХ

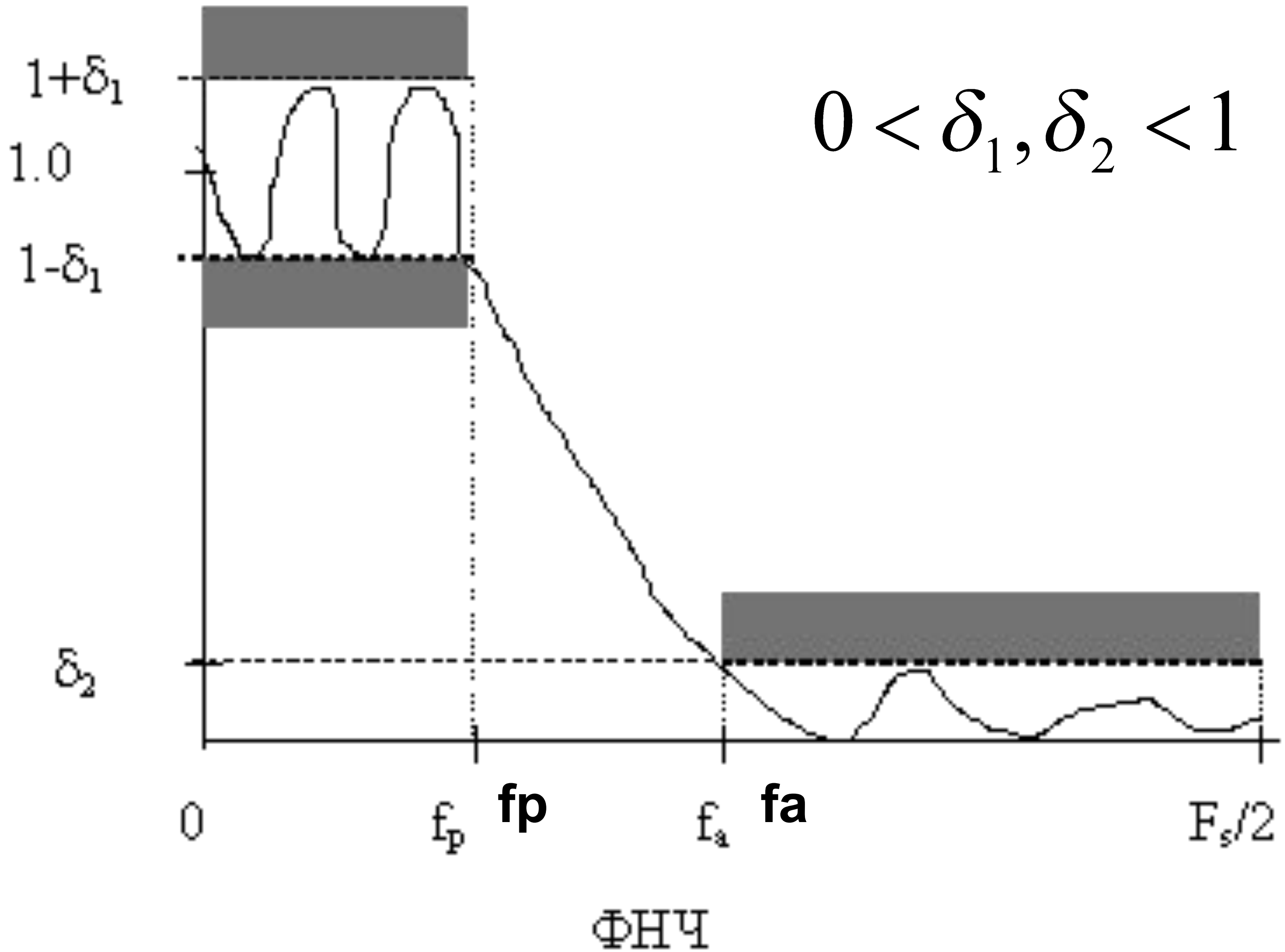
Более пологие скаты



Методика Кайзера расчета фильтра

- Выбирают значение параметра «альфа», исходя из уровня флуктуаций АЧХ
- Вычисляют порядок фильтра, исходя из:
  - уровня флуктуаций АЧХ;
  - размеров переходной зоны.
- Вычисляют коэффициенты a_k методом обратного преобразования Фурье

Уровень флуктуаций АЧХ и размеры переходной зоны



$$0 < \delta_1, \delta_2 < 1$$

Расчет параметра «альфа»

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$$

$$A = -20\lg\delta$$

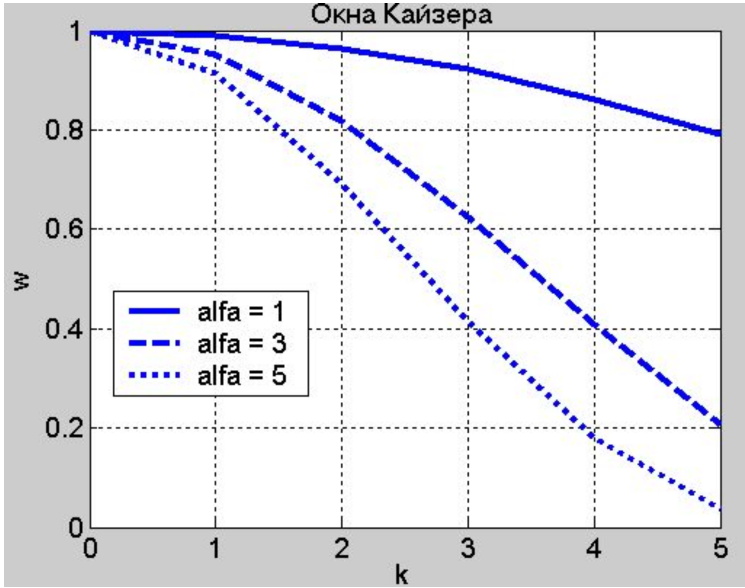
$$\alpha = \begin{cases} 0, & A < 21 \\ 0.5842(A-21)^{0.4} + 0.07886(A-21), & 21 \le A \le 50 \\ 0.1102(A-8.7), & A > 50 \end{cases}$$

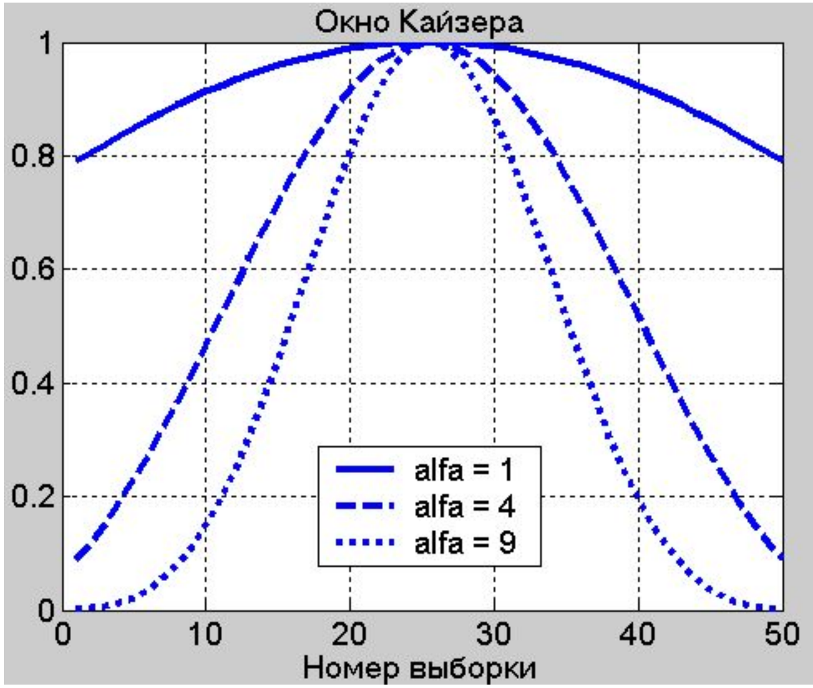
Смысл параметра α

$$\alpha = 0:$$

$$w_k = \frac{I_0(0)}{I_0(0)} = 1,\ \ 0 \le k \le N$$

```
N=5; alfa=1; k=0:N;
beta=alfa*sqrt(1-(k/N).^2);
w= besseli(0,beta)/ besseli(0,alfa);
plot(k,w)
```





α =1; 4; 9

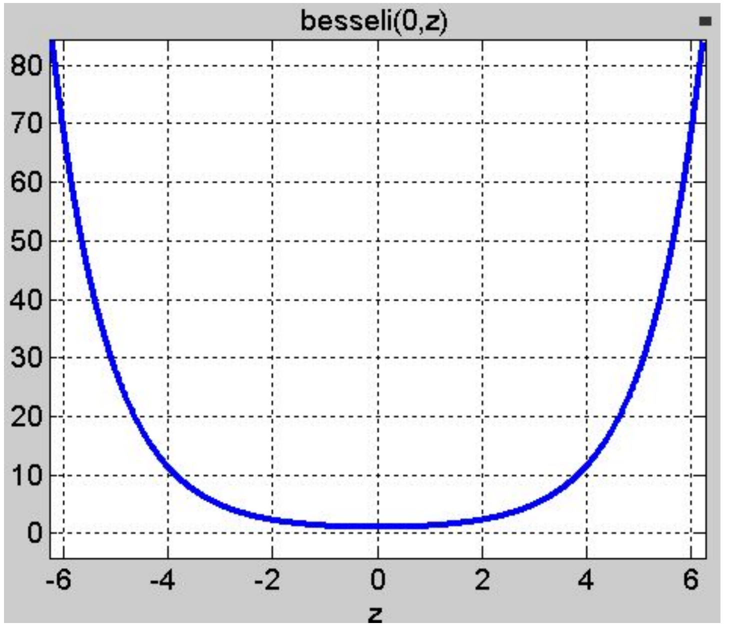
```
n = 50;   k=1:n; % кол-во отсчетов окна
w1 = kaiser(n,1); plot(k,w1); hold on;
w2 = kaiser(n,4); plot(k,w2);
w3 = kaiser(n,9); plot(k,w3); grid on;
legend('alfa = 1', 'alfa = 4', 'alfa = 9')
```

Функция Бесселя $I_0(x)$

$$I_0(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{1^2 \cdot 2^2} - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^6}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \ldots$$

Построение графика в Matlab:

```
>> syms x
>> I = besseli(0,x);
>> ezplot(I)
```



x	0	1	2	3	4	5	6
I = besseli(0,x)	1	1.266	2.280	4.881	11.302	27.240	67.234

Расчет КИХ-фильтров с окном Кайзера

$$y(n) = \sum_{k=-N}^{N} w_k a_k x(n-k)$$

$$w_k = w_{-k} = \frac{I_0(\beta_k)}{I_0(\alpha)}, \quad 0 \le k \le N$$

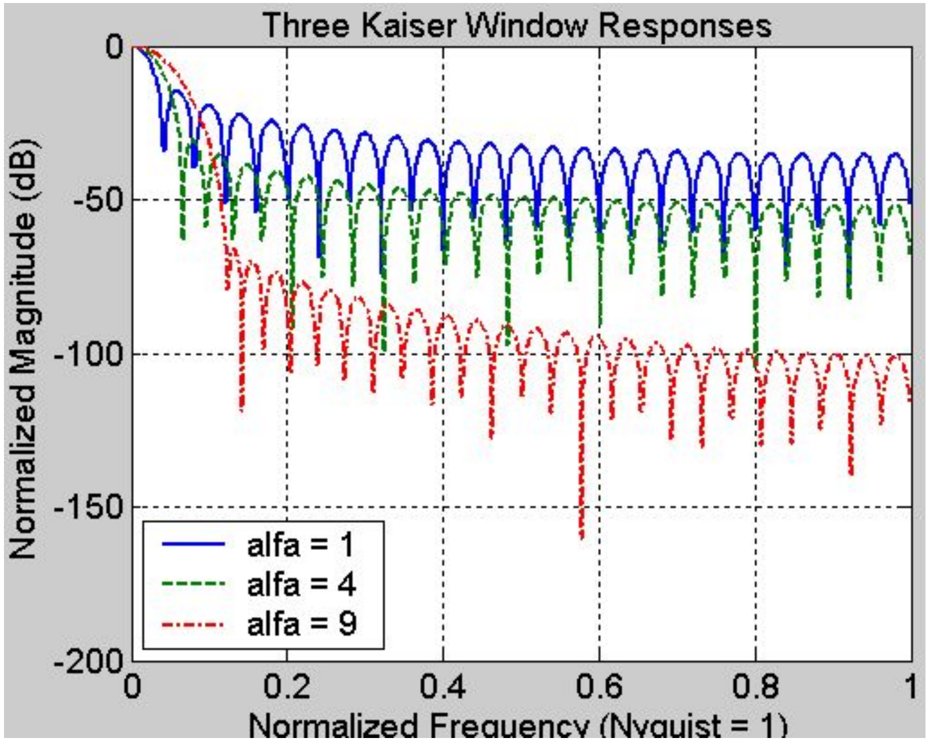
$$\beta_k = \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{k}{N}\right)^2}$$

$I_0(x)$ - функция Бесселя первого рода нулевого порядка

α - специальный числовой параметр окна Кайзера

АЧХ окна Кайзера

```
% W1 – Фурье-образ окна Кайзера
[W1,f] = freqz(w1/sum(w1),1,512,2);
[W2,f] = freqz(w2/sum(w2),1,512,2);
[W3,f] = freqz(w3/sum(w3),1,512,2);
plot(f,20*log10(abs(W1))); hold on;
plot(f, 20*log10(abs(W2)), 'g');
plot(f, 20*log10(abs(W3)), 'r');
legend('a=1', 'a=4', 'a=9')
grid on
```



Уровень боковых лепестков

$\alpha = 4$	-45,2
$\alpha = 9$	-90,5

С ростом параметра «альфа» изменяются АЧХ окна Кайзера:

1) уменьшается уровень боковых лепестков,
2) расширяется главный лепесток

Размеры переходной зоны

ФНЧ:

$$B_f = f_a - f_p$$

$$f_c = f_p + \frac{B_f}{2}$$

ФВЧ:

$$B_f = f_p - f_a$$

$$f_c = f_a + \frac{B_f}{2}$$

ПФ:

$$B_f = \min\left\{(f_{p1} - f_{a1}), (f_{a2} - f_{p2})\right\}$$

$$f_{c1} = f_{p1} - \frac{B_f}{2}$$

$$f_{c2} = f_{p2} + \frac{B_f}{2}$$

РФ:

$$B_f = \min\left\{(f_{a1} - f_{p1}), (f_{p2} - f_{a2})\right\}$$

$$f_{c1} = f_{p1} + \frac{B_f}{2}$$

$$f_{c2} = f_{p2} - \frac{B_f}{2}$$

Расчет минимального порядка фильтра

Учет уровня флуктуаций

Учет размеров переходной зоны

$$P = \frac{F_s D}{B_f}$$

$$D = \begin{cases} 0.9222, & A \le 21 \\ \dfrac{A - 7.95}{14.36}, & A > 21 \end{cases}$$

Расчеты по методике Кайзера в среде Matlab

✔ Вычисление параметров окна Кайзера:

[p, Wn, alfa, ftype] = kaiserord(fcuts, mags, devs, Fs)

в полосе от нуля до **fcuts(1)** АЧХ равна **mags(1),**
в полосе от **fcuts(2)** до **fcuts(3)** АЧХ равна **mags(2), … ,**
в полосе от **fcuts(end)** до **Fs/2** АЧХ равна **mags(end)**

Параметр **devs** д.б. вектором той же длины, что и **mags**

✔Вычисление отсчетов окна Кайзера:

w = kaiser(p+1,alfa)

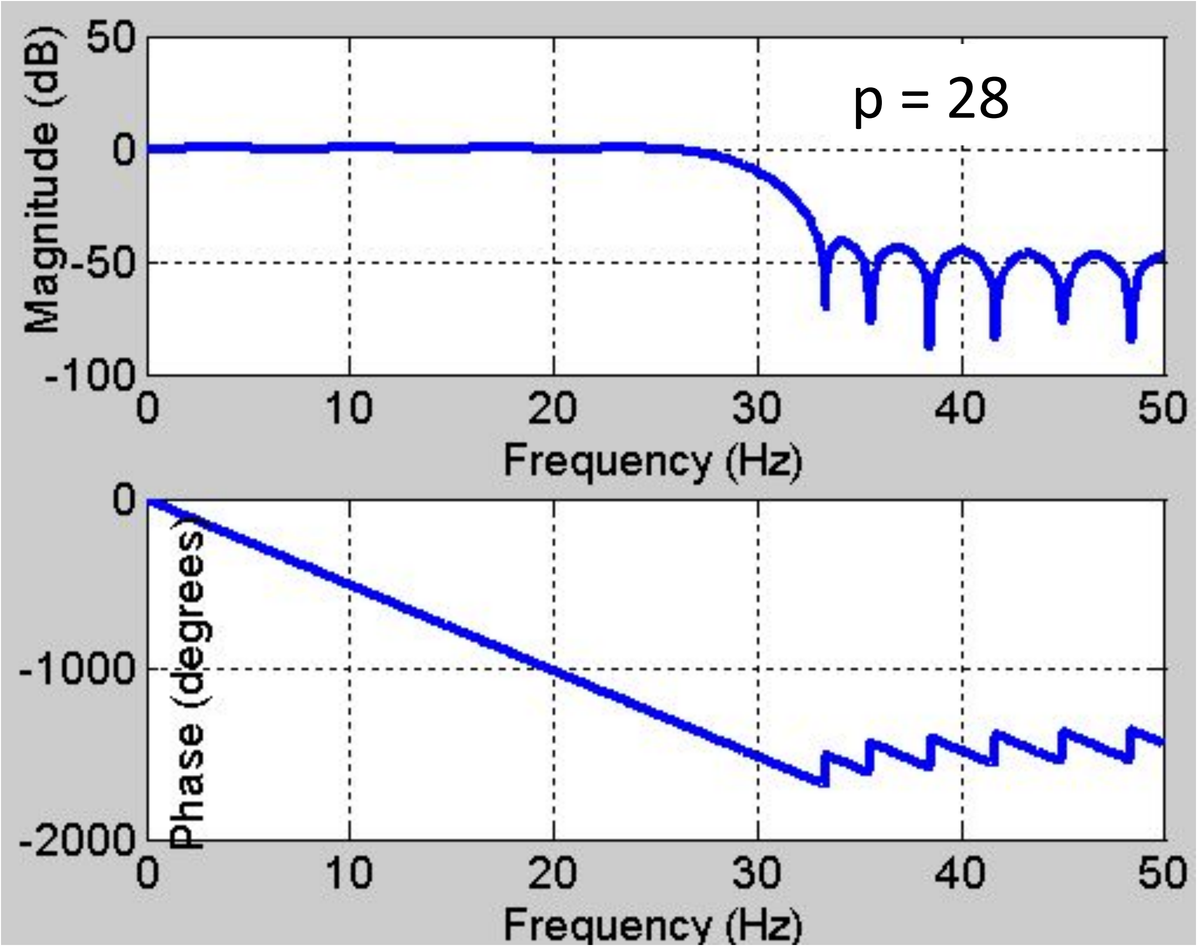
✔ Вычисление коэфф-в КИХ-фильтра с окном Кайзера:

a = fir1(p, Wn, ftype, kaiser(p+1, alfa), ‘noscale’)

✔Проверка расчетов путем построения АЧХ

freqz(a, 1, 512, Fs);

Расчеты по методике Кайзера в среде Matlab



Пример:

```
Fs = 100;
fcuts = [25 33];
mags = [1 0];
devs = [0.05 0.01];
[p,Wn,alfa,ftype] = kaiserord(fcuts,mags,devs,Fs);
a = fir1(p,Wn,ftype,kaiser(p+1,alfa),'noscale');
freqz(a, 1, 512, Fs)
```

Синтез оптимальных (по Чебышеву) КИХ-фильтров

Теоретическое обоснование

Недостатки оконного метода:

- Уменьшение крутизны АЧХ в переходной зоне
- Трудно прогнозировать форму АЧХ фильтра

Синтез фильтров, оптимальных по Чебышеву – задача оптимальной аппроксимации H(w):

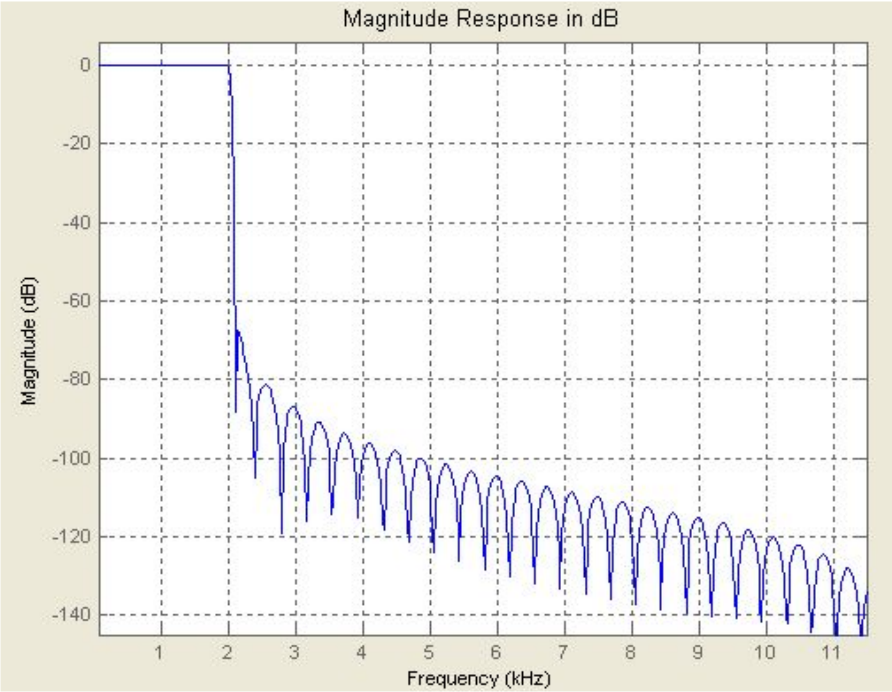
$$J = \min(\max[H_d(\omega) - H(\omega)])$$

- наилучшее равномерное приближение

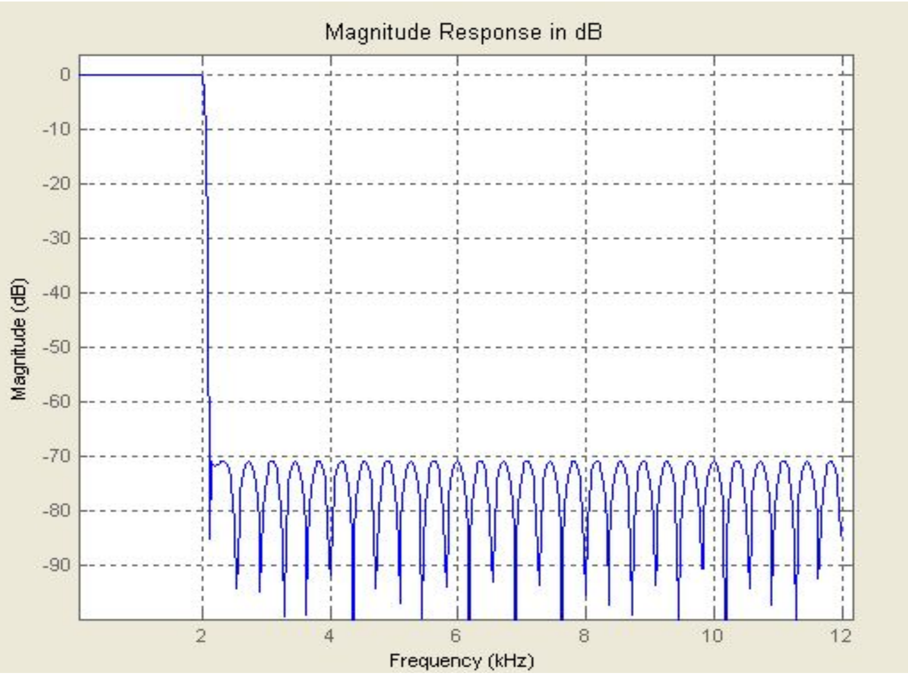
Задаются:

1) Граничные частоты;
2) Величина предельно допустимых флуктуаций

Сопоставление АЧХ фильтров: окно Кайзера и метод Чебышева



АЧХ фильтра синтезированного с окном Кайзера



АЧХ фильтра синтезированного по методу Чебышева

Теорема Чебышева об альтернансе

Тригонометрический полином:

$$H_{\partial}(\omega) = \sum_{k=0}^{N} a_k \cos \omega k \Delta t$$

Для наилучшего равномерного приближения функции $H(\omega)$ полиномом $H_{\partial}(\omega)$ необходимо и достаточно, чтобы равенство

$$\delta(\omega) = \left| H_{\partial}(\omega) - H(\omega) \right|$$

выполнялось не менее чем в *N*+2 точках (точках альтернанса), принадлежащих интервалам аппроксимации, причем знак разности чередуется от точки к точке

Ограничения на ЧХ синтезируемого фильтра

Алгоритм Ремеза (Е.Я. Ремез - украинский академик (1896-1975))

Составляется и решается система N+2 уравнений:

$$H(\hat{\omega}_i) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{N} a_k \cos(\hat{\omega}_i k T_\partial) + (-1)^i \delta, \quad i = 1,2,\ldots,N+2$$

$\hat{\omega}_i$ - частоты альтернанса; a_k - искомые коэффициенты.

Поскольку частоты альтернанса неизвестны:

- ✔на первой итерации они задаются приблизительно;
- ✔на последующих итерациях они уточняются.

Недостаток метода – может потребоваться много итераций

Компьютерная реализация алгоритма Ремеза в Matlab

1) определяют минимальный порядок фильтра n:

[n, f0, a0, w] = remezord(f, A, dev, Fs)

вспомогательные параметры

параметры f, A совместно задают кусочно-постоянную АЧХ
в зонах пропускания и задержания

2) вычисляют коэффициенты фильтра:

a = remez(n, f0, a0, w)

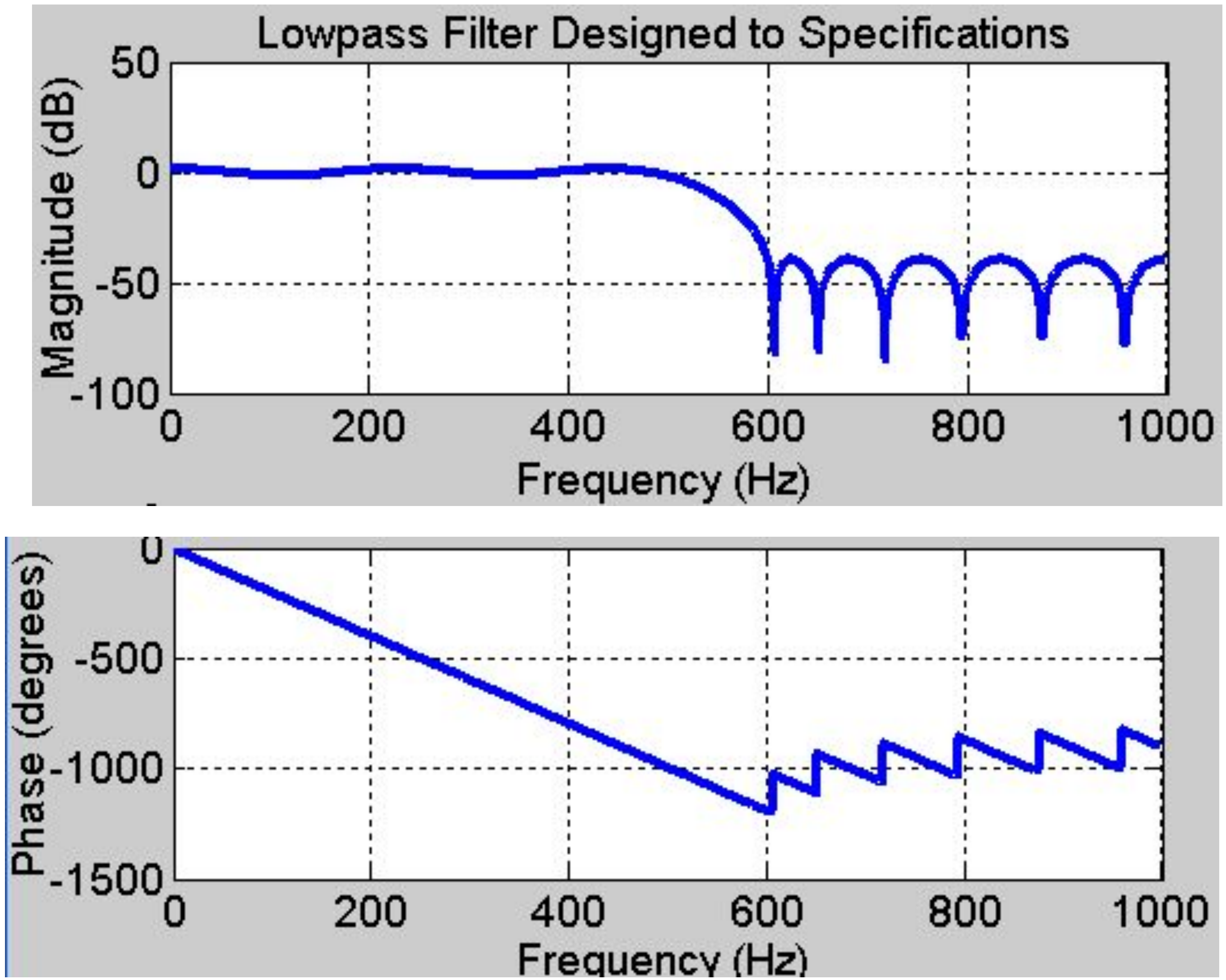
В последних версиях Matlab: Remez ⇒ Parks, McClellan

remezord ⇒ firpmord remez ⇒ firpm

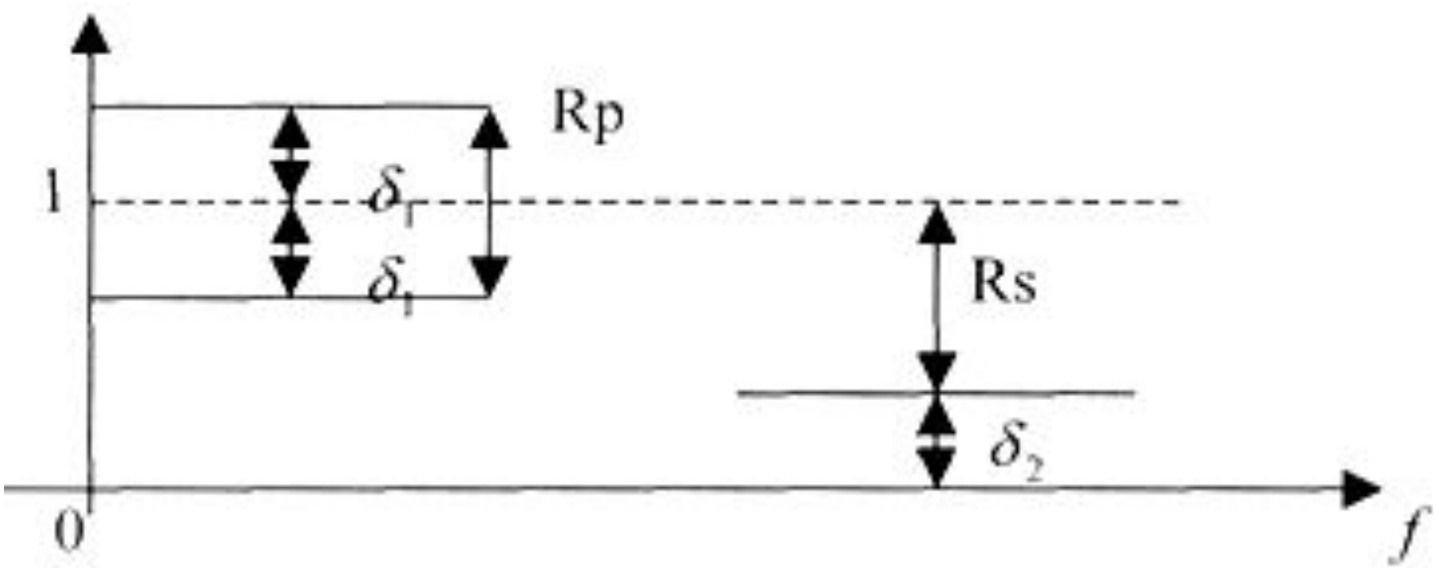
Пример: синтез НЧ фильтра с граничными частотами 500 Гц и 600 Гц, частотой дискретизации 2 кГц

```
Rp = 3;         % Неравномерн. в полосе пропуск. (в дБ)
Rs = 40;         % Неравномерн. в полосе задерж. (в дБ)
Fs = 2000;       % Частота дискретизации
f = [500 600];   % Границы переходной зоны
A = [1 0];       % Желаемые значения АЧХ
% Расчет девиаций
dev = [(10^(Rp/20)-1)/(10^(Rp/20)+1) 10^(-Rs/20)];
[n, fo, ao, w] = remezord(f, A, dev, Fs);
a = remez(n, fo, ao, w);
freqz(a, 1, 1024, Fs);
title('Lowpass Filter Designed to Specifications');
```

Пример: результаты расчетов



Пример: пересчет девиаций в дБ



$$R_p = 20\lg\frac{1+\delta_1}{1-\delta_1}, \qquad \delta_1 = \frac{10^{\frac{Rp}{20}}-1}{10^{\frac{Rp}{20}}+1};$$

$$R_s = -20\lg\delta_2, \qquad \delta_2 = 10^{-\frac{Rs}{20}}.$$