

Exerciții – capitolele 7, 8

 Exercițiul 1

Determinați polinomul Lagrange care interpolează funcția $f: [-3, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ cunoscută prin intermediul setului de valori:

x	-3	-1	1
f(x)	6	4	2

Ce valoare aproximativă au $f(-1.5)$ și $f'(-2)$?

Rezolvare:

$$L(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(-3+1)(-3-1)} \cdot 6 + \frac{(x+3)(x-1)}{(-1+3)(-1-1)} \cdot 4 + \frac{(x+3)(x+1)}{(1+3)(1+1)} \cdot 2 = -x + 3$$

$$f(-1.5) \cong L(-1.5) = 4.5; \quad f'(-2) \cong L'(-2) = -1$$

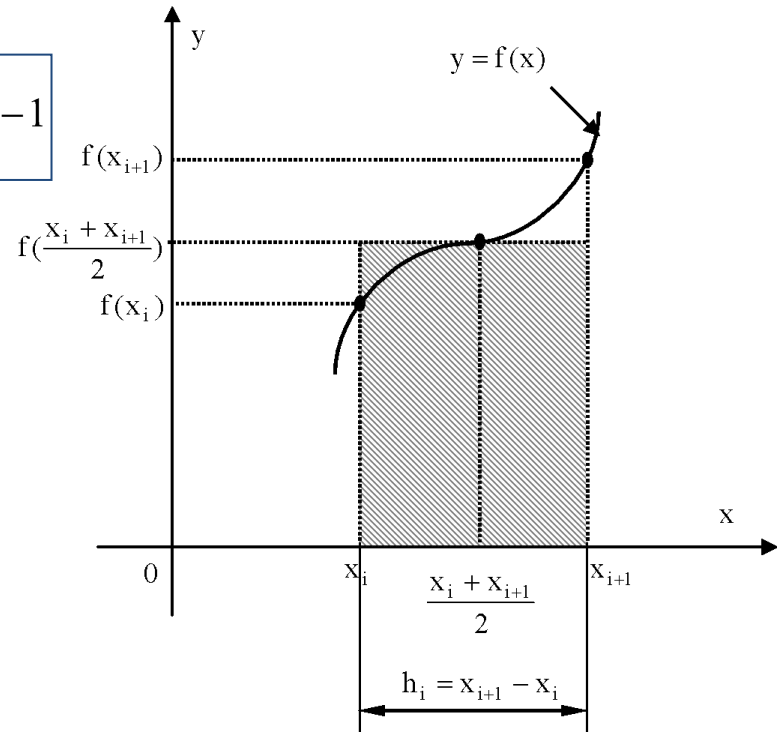
Exercițiul 2

Realizați scriptul MATLAB ce permite calculul integralei definite $\int_a^b f(x)dx$ prin metoda dreptunghiului, unde funcția de integrat este cunoscută prin intermediul unui număr finit de valori de forma $\{x_i, f(x_i)\}_{i=0, \dots, n}$ cu $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, iar $a < b$ cu $a, b \in \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

Rezolvare:

$$I_i(f) \cong D_i(f) = h_i \cdot f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right), \quad h_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, \dots, n-1$$

$$I(f) \cong D(f) = \sum_{i=0}^{n-1} D_i(f) = \sum_{i=0}^{n-1} h_i \cdot f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$



☞ f nu este cunoscută analitic



se vor considera trei perechi de puncte cu abscisele echidistante:

$$(x_{i-1}, f_{i-1}), (x_i, f_i), (x_{i+1}, f_{i+1})$$

$$D_i(f) = (x_{i+1} - x_{i-1}) \cdot f(x_i)$$

👉 structura scriptului:

- ① citire număr perechi $\{x_i, f(x_i)\}_{i=\overline{1,m}}$, cu verificarea condițiilor $m > 2$
- ② citire perechi $\{x_i, f(x_i)\}_{i=\overline{1,m}}$
 - verificare $x_1 < x_2 < \dots < x_m$, $x_{i+1} - x_i = const$
- ③ citire limite calcul integrală, a și b, cu verificările:
 - $a < b$
 - $\exists j, k \in \{1, 2, \dots, m\}$ a. i. $a = x_j, b = x_k$
- ④ extragere subset date $\{x_i, f(x_i)\}_{i=\overline{j,k}}$ și verificare $(k - j) - par$
- ⑤ calcul integrală prin metoda dreptunghiului
- ⑥ afișare soluție

 **Exercițiul 3**

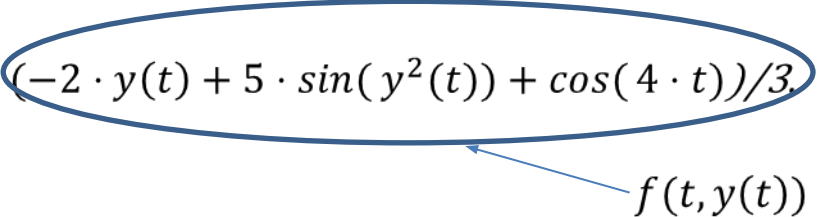
Realizați scriptul MATLAB și funcția utilizator aferentă ce permit integrarea numerică a ecuației diferențiale:

$3 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + 2 \cdot y(t) = 5 \cdot \sin(y^2(t)) + \cos(4 \cdot t)$. Condițiile numerice în care se va rezolva ecuația, precum și condiția inițială vor fi stabilite de către utilizator, metoda aplicată fiind Runge-Kutta de ordin 3.

Rezolvare:

$$\frac{dy(t)}{dt} = (-2 \cdot y(t) + 5 \cdot \sin(y^2(t)) + \cos(4 \cdot t)) / 3.$$

$f(t, y(t))$



 **definire funcție $f(t, y(t))$**

 **structura scriptului:**

- ① citire condiții inițiale
- ② citire condiții de integrare (pas de integrare, interval observare) & verificări
- ③ calcule preliminare și inițializari
- ④ aplicare metoda Runge-Kutta de ordin 3.

 **Exercițiul 4**

Realizați scriptul MATLAB și funcția utilizator aferentă ce permit integrarea numerică a ecuației diferențiale:

$3 \cdot \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + 6 \cdot y(t) = \cos(0.3t)$ știind că $y(0) = y'(0) = 0$. Condițiile numerice în care se va rezolva ecuația vor fi stabilite de către utilizator, metoda aplicată fiind Euler.

Rezolvare:

 construire sistem de 2 ecuații diferențiale:

$$\frac{dx}{dt} = \underbrace{A \cdot x(t) + b \cdot u(t)}_{f(t, x(t))} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6/3 & -2/3 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$$u(t) = \cos(0.3t)$$

👉 definire funcție $f(t, \mathbf{x}(t))$

👉 structura scriptului:

- ① citire condiții de integrare (pas de integrare, interval observare) & verificări
- ② calcule preliminare și inițializari
- ③ aplicare metoda Euler pentru sistemul de 2 ecuații diferențiale

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + h \cdot \mathbf{f}(t_i, \mathbf{x}_i); \quad t_i = t_0 + i \cdot h, \quad i = 0, 1, \dots, N - 1;$$
$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix}; \quad t_0 = 0$$

- ④ determinare soluție ecuație diferențială de ordin 2 prima componentă a fiecărui element din soluția sistemului

 **Exercițiul 5**

Realizați scriptul MATLAB care permite calculul aproximativ al derivatei de ordin 2 a funcției $y(t)$ corespunzătoare unei valori a argumentului precizată de către utilizator, unde $y(t)$ reprezintă soluția ecuației diferențiale $5 \cdot \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + 2 \cdot y(t) = 2$. Integrarea numerică a ecuației diferențiale se va realiza utilizând metoda Euler în condiții numerice precizate de către utilizator. Se va apela la aproximarea cu o funcție spline liniară în scopul calculării derivatei. Se vor utiliza funcțiile elementare ale mediului MATLAB.

Rezolvare:

 construire sistem de 2 ecuații diferențiale:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underbrace{A \cdot \underline{x}(t) + \underline{b} \cdot u(t)}_{f(t, \underline{x}(t))} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2/5 & -3/5 \end{bmatrix}; \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2/5 \end{bmatrix}$$

 definire funcție MATLAB ce implementează $f(t, \underline{x}(t))$

👉 structura scriptului:

- ① citire condiții inițiale
- ② citire condiții de integrare (pas de integrare, interval observare) & verificări
- ③ calcule preliminare și inițializari
- ④ citire argument, ξ , pentru calculul $\frac{d^2y(t)}{dt^2}$
- ⑤ aplicare metoda Euler pentru integrarea numerică a sistemului de ecuații diferențiale
- ⑥ localizare argument ξ într-un interval de forma $[t_i, t_{i+1}]$
- ⑦ determinare coeficienți funcție spline liniară ce aproximează $\frac{dy(t)}{dt}$ pe intervalul $[t_i, t_{i+1}]$
- ⑧ calcul $\frac{d^2y(t)}{dt^2} \Big|_{t=\zeta}$
- ⑨ afișare rezultat

 **Exercițiul 6**

Realizați scriptul MATLAB ce calculează $\int_0^5 y(t)dt$ prin metoda 3/8 Simpson, unde $y(t)$ este soluția


ecuației diferențiale: $5 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + 2 \cdot y(t) = u(t)$, $u(t) = \begin{cases} (1/6) \cdot t, & t \in [0,3] \\ \sin(\frac{\pi}{18}t), & t > 3 \end{cases}$.

Se consideră $y(0) = 3$, metoda de integrare Taylor de ordin 2, iar condițiile numerice în care se realizează integrarea vor fi stabilite de utilizator. (Metoda 3/8 Simpson: $I_f = (3/8) \cdot h \cdot (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 3f_4 + 3f_5 + 2f_6 + \dots + 2f_{n-3} + 3f_{n-2} + 3f_{n-1} + f_n)$).

Rezolvare:

 aranjare ecuație diferențială în forma:

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)) \quad \rightarrow \quad f(t, y(t)) = \frac{1}{5} \cdot (u(t) - 2 \cdot y(t))$$

 Calcul $f^{(1)}(t, y(t)) = \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial y} \cdot \frac{dy(t)}{dt}$

$f(t, y(t))$

☞ definire funcții utilizator $f(t,y(t))$ și $f^{(1)}(t, y(t))$

☞ structura scriptului:

- ① asignare condiție inițială
- ② citire condiții de integrare (pas de integrare, interval observare) & verificări
- ③ calcule preliminare și inițializari
- ④ citire limite cuadratură & verificări
- ⑤ aplicare metoda Taylor de ordin 2
- ⑥ localizare limite cuadratură în cadrul elementelor vectorului valorilor lui t → nu → stop
- ⑦ selectare date (din cadrul soluției numerice a ecuației diferențiale) necesare cuadraturii
- ⑧ verificare aplicare metoda 3/8 Simpson (număr de subintervale divizibil cu 3) → nu → stop
- ⑨ aplicare metoda 3/8 Simpson
- ⑩ afișare rezultat