METODE NUMERICE – pregătire 4 26.06.2021

Exerciţii – capitolele 7, 8

✍ Exerciţiul 1

Determinaţi polinomul Lagrange care interpolează funcţia $f: [-3,\ 1] \to \Re$ *cunoscută prin intermediul setului de valori:*

x	-3	-1	1
f(x)	6	4	2

Ce valoare aproximativă au $f(-1.5)$ *şi* $f'(-2)$*?*

Rezolvare:

$$L(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(-3+1)(-3-1)} \cdot 6 + \frac{(x+3)(x-1)}{(-1+3)(-1-1)} \cdot 4 + \frac{(x+3)(x+1)}{(1+3)(1+1)} \cdot 2 = -x + 3$$

$$f(-1.5) \cong L(-1.5) = 4.5; \quad f'(-2) \cong L'(-2) = -1$$

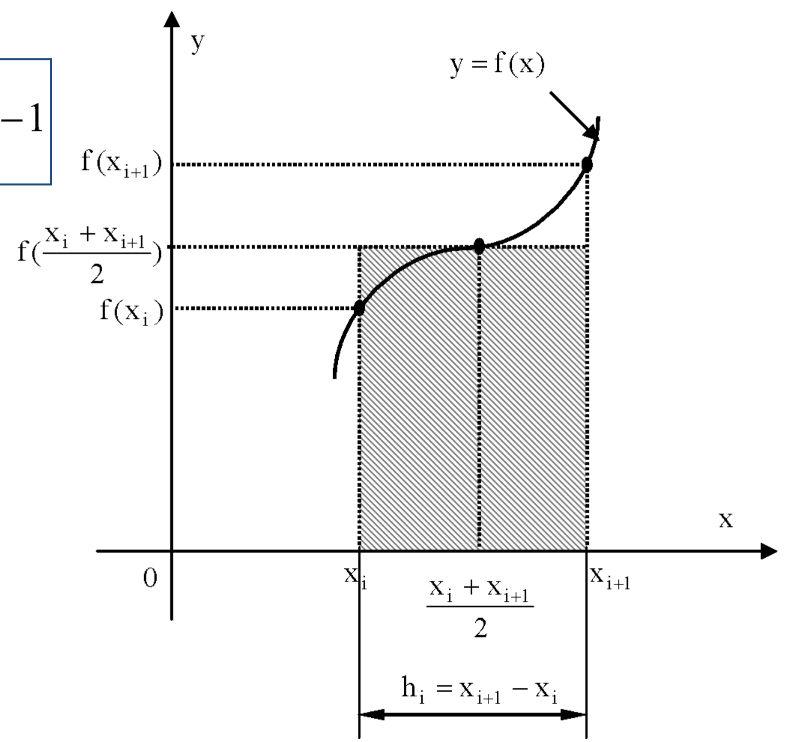
Exerciţiul 2

Realizaţi scriptul MATLAB ce permite calculul integralei definite $\int_a^b f(x)dx$ prin metoda dreptunghiului, unde funcția de integrat este cunoscută prin intermediul unui număr finit de valori de forma $\{x_i,\ f(x_i)\}_{i=\overline{0,n}}$ cu $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, iar $a < b$ cu $a, b \in \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

<u>*Rezolvare:*</u>

$$\boxed{I_i(f) \cong D_i(f) = h_i \cdot f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right),\ h_i = x_{i+1} - x_i,\ i = 0, \ldots, n-1}$$

$$\boxed{I(f) \cong D(f) = \sum_{i=0}^{n-1} D_i(f) = \sum_{i=0}^{n-1} h_i \cdot f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)}$$



f *nu este cunoscută analitic*

↓

se vor considera trei perechi de puncte cu abscisele echidistante:

$$(x_{i-1}, f_{i-1}), (x_i, f_i), (x_{i+1}, f_{i+1})$$

$$D_i(f) = (x_{i+1} - x_{i-1}) \cdot f(x_i)$$

METODE NUMERICE – pregătire 4 26.06.2021

☞structura scriptului:

① citire număr perechi $\{x_i,\ f(x_i)\}_{i=\overline{1,m}}$, cu verificarea condiţiilor m > 2

② citire perechi $\{x_i,\ f(x_i)\}_{i=\overline{1,m}}$

- verificare $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$, $x_{i+1} - x_i = const$

③ citire limite calcul integrală, a și b, cu verificările:

- a < b
- $\exists j, k \ \in \{1, 2, \ldots, m\}\ a.i.\ \ a = x_j,\ b = x_k$

④ extragere subset date $\{x_i,\ f(x_i)\}_{i=\overline{j,k}}$ și verificare (k – j) – par

⑤ calcul integrală prin metoda dreptunghiului

⑥ afișare soluţie

METODE NUMERICE – pregătire 4 26.06.2021

✍ Exerciţiul 3

Realizaţi scriptul MATLAB şi funcția utilizator aferentă ce permit integrarea numerica a ecuaţiei diferenţiale:
$3 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + 2 \cdot y(t) = 5 \cdot sin(\, y^2(t)) + cos(\,4 \cdot t)$. *Condiţiile numerice în care se va rezolva ecuaţia, precum şi condiția inițială vor fi stabilite de către utilizator, metoda aplicată fiind Runge-Kutta de ordin 3.*

<u>*Rezolvare:*</u>

$$\frac{dy(t)}{dt} = (-2 \cdot y(t) + 5 \cdot sin(\, y^2(t)) + cos(\,4 \cdot t))/3$$

$f(t, y(t))$

☞definire funcţie *f(t,y(t))*

☞structura scriptului:

① citire condiţii iniţiale

② citire condiţii de integrare (pas de integrare, interval observare) & verificări

③ calcule preliminare şi iniţializari

④ aplicare metoda Runge-Kutta de ordin 3.

✍ Exercițiul 4

Realizaţi scriptul MATLAB şi funcția utilizator aferentă ce permit integrarea numerică a ecuaţiei diferenţiale:

$3 \cdot \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + 6 \cdot y(t) = cos(0.3t)$ *ştiind că* $y(0) = y'(0) = 0$. *Condiţiile numerice în care se va rezolva ecuaţia vor fi stabilite de către utilizator, metoda aplicată fiind Euler.*

<u>*Rezolvare:*</u>

☞ construire sistem de 2 ecuaţii diferenţiale:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \underbrace{A \cdot \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b} \cdot u(t)}_{\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t))} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6/3 & -2/3 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$$u(t) = \cos(0.3t)$$

METODE NUMERICE – pregătire 4 26.06.2021

☞ definire funcţie ***f****(t,****x****(t))*

☞ structura scriptului:

① citire condiţii de integrare (pas de integrare, interval observare) & verificări

② calcule preliminare şi iniţializari

③ aplicare metoda Euler pentru sistemul de 2 ecuaţii diferenţiale

$$\boldsymbol{x}_{i+1} = \boldsymbol{x}_i + h \cdot \boldsymbol{f}(t_i, \boldsymbol{x}_i); \quad t_i = t_0 + i \cdot h, \quad i = 0,1,\ldots,N-1;$$
$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix}; t_0 = 0$$

④ determinare soluţie ecuaţie diferenţială de ordin 2 □ prima componentă a fiecărui element din soluţia sistemului

✍ Exerciţiul 5

Realizați scriptul MATLAB care permite calculul aproximativ al derivatei de ordin 2 a funcției $y(t)$ *corespunzătoare unei valori a argumentului precizată de către utilizator, unde* $y(t)$ *reprezintă soluția ecuației diferențiale* $5 \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \cdot \frac{dy(t)}{dt^2} + 2 \cdot y(t) = 2$. *Integrarea numerică a ecuției diferențiale se va realiza utilizând metoda Euler în condiții numerice precizate de către utilizator. Se va apela la aproximarea cu o funcţie spline liniară în scopul calculării derivatei. Se vor utiliza funcțiile elementare ale mediului MATLAB.*

<u>*Rezolvare:*</u>

☞ construire sistem de 2 ecuaţii diferenţiale:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underbrace{A \cdot \underline{x}(t) + \underline{b} \cdot u(t)}_{\underline{f}(t,\underline{x}(t))} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2/5 & -3/5 \end{bmatrix}; \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2/5 \end{bmatrix}$$

☞ *definire funcţie MATLAB ce implementează* $\underline{f}(t, \underline{x}(t))$

METODE NUMERICE – pregătire 4 26.06.2021

☞ structura scriptului:

① citire condiţii iniţiale

② citire condiţii de integrare (pas de integrare, interval observare) & verificări

③ calcule preliminare şi iniţializari

④ citire argument, ξ, pentru calculul $\frac{d^2y(t)}{dt^2}$

⑤ aplicare metoda Euler pentru integrarea numerică a sistemului de ecuaţii diferenţiale

⑥ localizare argument ξ într-un interval de forma $[t_i, t_{i+1}]$

⑦ determinare coeficienţi funcţie spline liniară ce aproximează $\frac{dy(t)}{dt}$ pe intervalul $[t_i, t_{i+1}]$

⑧ calcul $\left.\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right|_{t=\zeta}$

⑨ afişare rezultat

Exerciţiul 6

Realizaţi scriptul MATLAB ce calculează $\int_0^5 y(t)dt$ *prin metoda 3/8 Simpson, unde y(t) este soluţia ecuaţiei diferenţiale:* $5 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + 2 \cdot y(t) = u(t), \quad u(t) = \begin{cases} (1/6) \cdot t, & t \in [0,3] \\ sin(\frac{\pi}{18} t), & t > 3 \end{cases}$.

Se consideră y(0) = 3, metoda de integrare Taylor de ordin 2, iar condiţiile numerice în care se realizează integrarea vor fi stabilite de utilizator. (Metoda 3/8 Simpson: $I_f = (3/8) \cdot h \cdot (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 3f_4 + 3f_5 + 2f_6 + \ldots + 2f_{n-3} + 3f_{n-2} + 3f_{n-1} + f_n)$*).*

<u>*Rezolvare:*</u>

☞ aranjare ecuaţie diferenţială în forma:

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t))$$

$$f\big(t, y(t)\big) = \frac{1}{5} \cdot (u(t) - 2 \cdot y(t))$$

☞ Calcul $f^{(1)}\big(t, y(t)\big) = \frac{\partial f(t,y(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t,y(t))}{\partial y} \cdot \frac{dy(t)}{dt}$

$f(t, y(t))$

METODE NUMERICE – pregătire 4 26.06.2021

☞ definire funcţii utilizator *f(t,y(t))* și $f^{(1)}(t, y(t))$

☞ structura scriptului:

① asignare condiţie iniţială

② citire condiţii de integrare (pas de integrare, interval observare) & verificări

③ calcule preliminare şi iniţializari

④ citire limite cuadratură & verificări

⑤ aplicare metoda Taylor de ordin 2

⑥ localizare limite cuadratură în cadrul elementelor vectorului valorilor lui t $\xrightarrow{\text{nu}}$ stop

⑦ selectare date (din cadrul soluţiei numerice a ecuaţiei diferenţiale) necesare cuadraturii

⑧ verificare aplicare metoda 3/8 Simpson (număr de subintervale divizibil cu 3) $\xrightarrow{\text{nu}}$ stop

⑨ aplicare metoda 3/8 Simpson

⑩ afişare rezultat