

# Теорема Пифагора



«Ни о ком не говорят так  
много и так необычайно»  
(Порфирий).

*Пифагор - древнегреческий  
ученый VI в. до н. э.*





# Изречения Пифагора

- Статуя формой своей хороша,  
А человека украсят дела.



- Шуткой беседу укрась, освети.  
Шутка, что соль. Лишь не пересоли...
- Лучше молчи, ну, а коль говоришь,  
Пусть будет лучше, чем то, что молчишь.
- Если ты в гневе, не смей говорить!  
Действовать резко и злобу сорить.
- Пред тем, как станешь говорить, пусть мысль  
созреет  
Под языком твоим. Созревшая - все смеет.

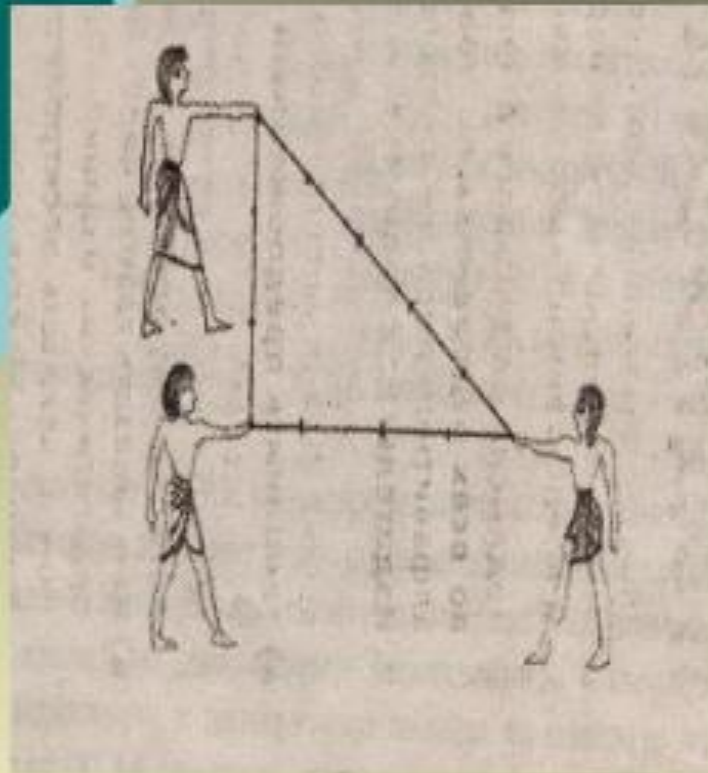
# Почему же теперь эту теорему называют теоремой Пифагора?

Считают, что Пифагор доказал эту теорему, опираясь на рассуждения. До него утверждение о равенстве квадрата гипотенузы сумме квадратов катетов было известно лишь как факт, замеченный из построений.





# О теореме Пифагора

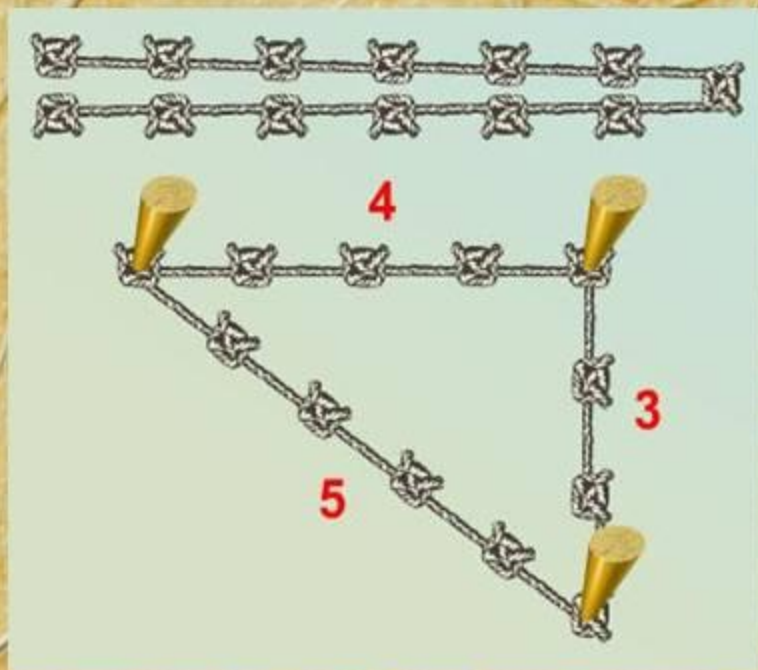


- Теорема Пифагора – одна из главных теорем геометрии, имеет богатую историю. Оказывается, задолго до Пифагора она была известна египтянам (верёвочным треугольником со сторонами 3, 4, 5 они пользовались для построения прямых углов), вавилонянам, индийцам (они использовали её для построения алтарей). По видимому они не знали её доказательства, а Пифагор доказал.
- Сохранилось древнее предание, что в честь своего открытия Пифагор принёс в жертву богам 100 быков.
- В настоящее время существует более 100 доказательств теоремы.
- Значение теоремы состоит в том, что с её помощью можно доказывать другие теоремы и решать задачи.



# Теорема Пифагора имеет богатую историю.

Она была известна задолго до Пифагора. За 8 веков до н. э. эта теорема была хорошо известна индийцам под названием *«Правила веревки»* и использовалась ими для построения алтарей, которые по священному предписанию должны иметь строгую геометрическую форму, ориентированную относительно четырех сторон горизонта.



Пифагор, не открыл эту теорему, а нашел ее доказательство, хотя доказательство самого Пифагора до нас не дошло.

Значение теоремы состоит в том, что из нее или с ее помощью можно вывести большинство теорем геометрии и решить множество задач.



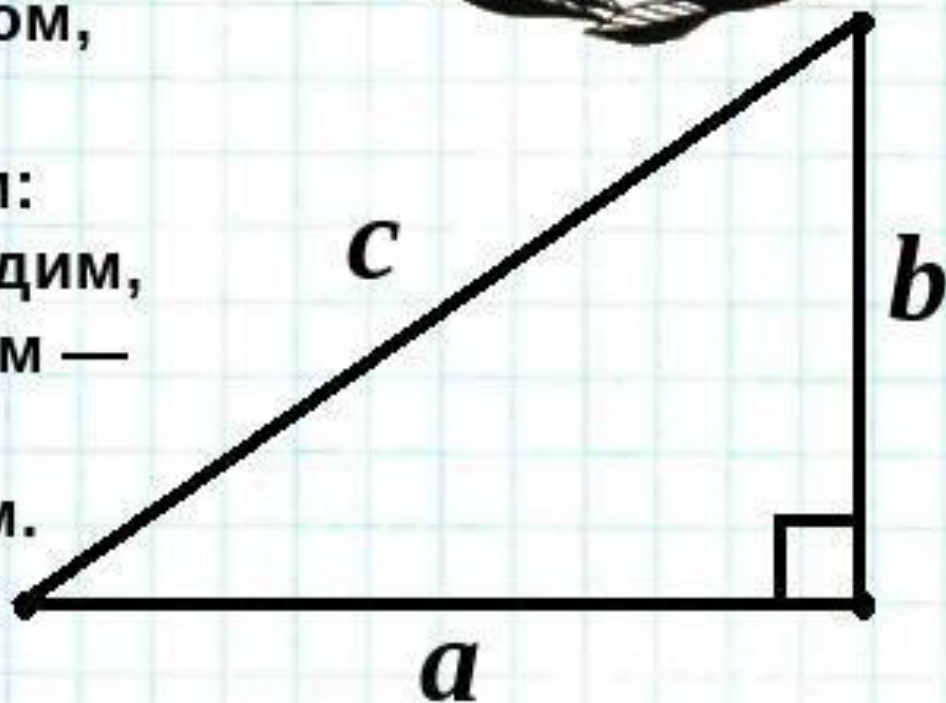
# Хронология развития теоремы до Пифагора:

№	Историческое место	дата
1	Древний Китай (математическая книга Чу-пей)	~2400 г. до н. э.
2	Древний Египет (гарпедонапты или "натягиватели веревок")	2300 г. до н. э.
3	Вавилон (Хаммураби )	2000 г. до н. э.
4	Древняя Индия (сборник Сульвасутра )	600 г. до н. э.
5	Пифагор	570 г. до н. э.

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Если дан нам треугольник  
И притом с прямым углом,  
То квадрат гипотенузы  
Мы всегда легко найдем:  
Катеты в квадрат возводим,  
Сумму степеней находим —  
И таким простым путем  
К результату мы придем.



*И. Дырченко*



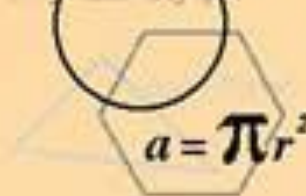
# Пифагор и его теорема



Пребудет вечной истина, как скоро  
Ее познает слабый человек!  
И ныне теорема Пифагора  
Верна, как и в его далекий век.  
Обильно было жертвоприношение  
Богам от Пифагора. Сто быков  
Он отдал на закланье и сожженье  
За света луч, пришедший с облаков.  
Поэтому всегда с тех самых пор,  
Чуть истина рождается на свет,  
Быки ревут, ее почуя, вслед.  
Они не в силах свету помешать.  
А могут лишь, закрыв глаза, дрожать  
От страха, что вселил в них Пифагор.

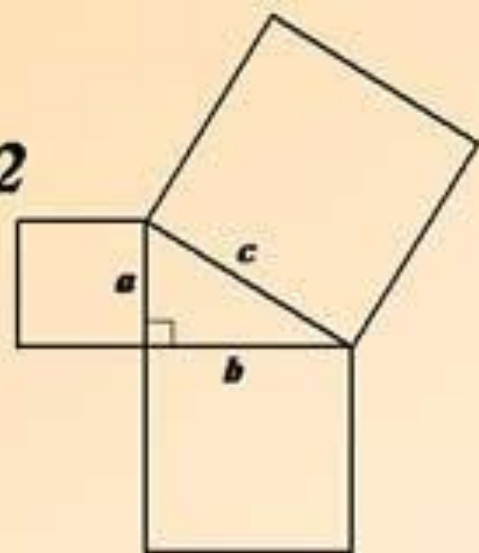
А. Шамиссо

$$x^2 + y^2 + 2dx + 2ay + c = 0$$



*Современная  
формулировка  
теоремы Пифагора*

$$c^2 = a^2 + b^2$$



**«В прямоугольном  
треугольнике квадрат  
гипотенузы равен  
сумме квадратов  
катетов».**

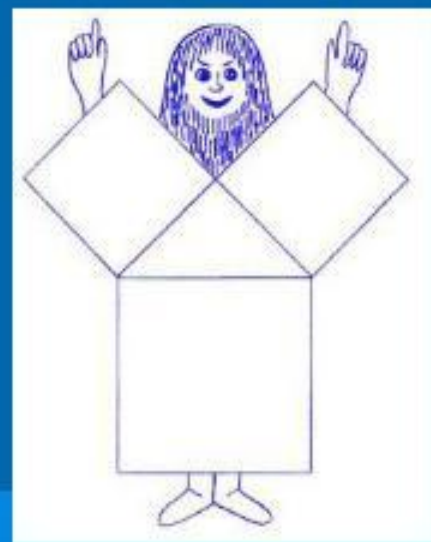
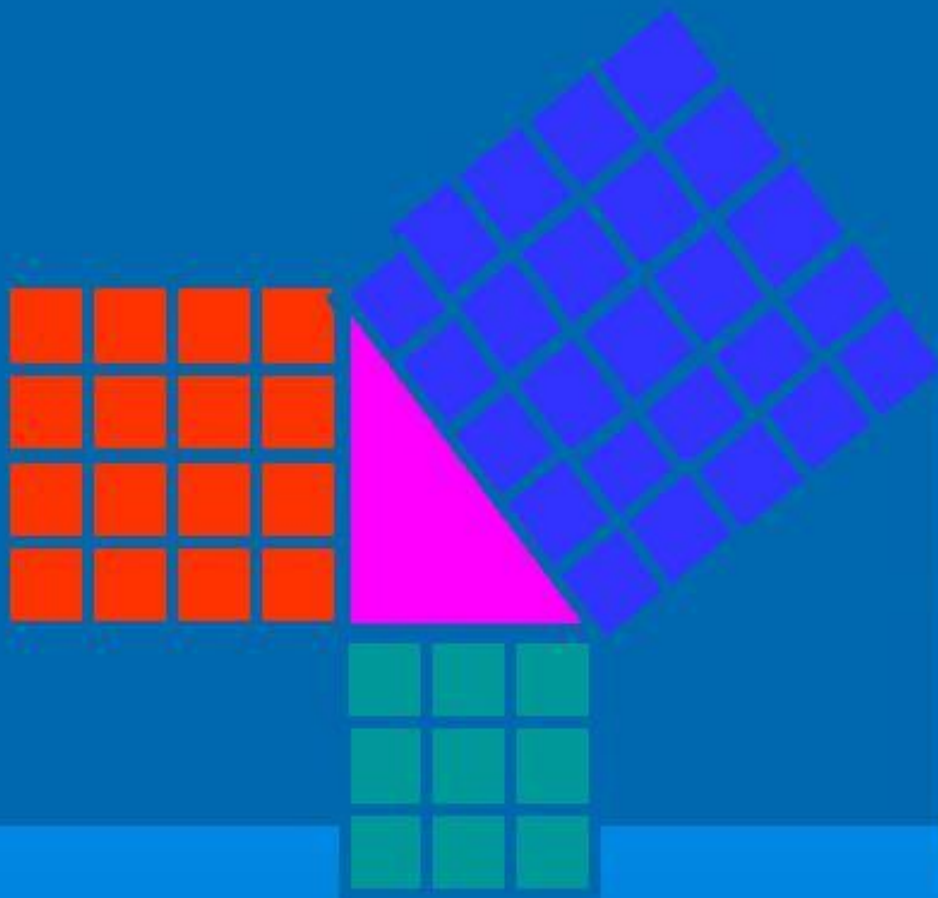
*Во времена Пифагора  
формулировка теоремы  
звучала так:*



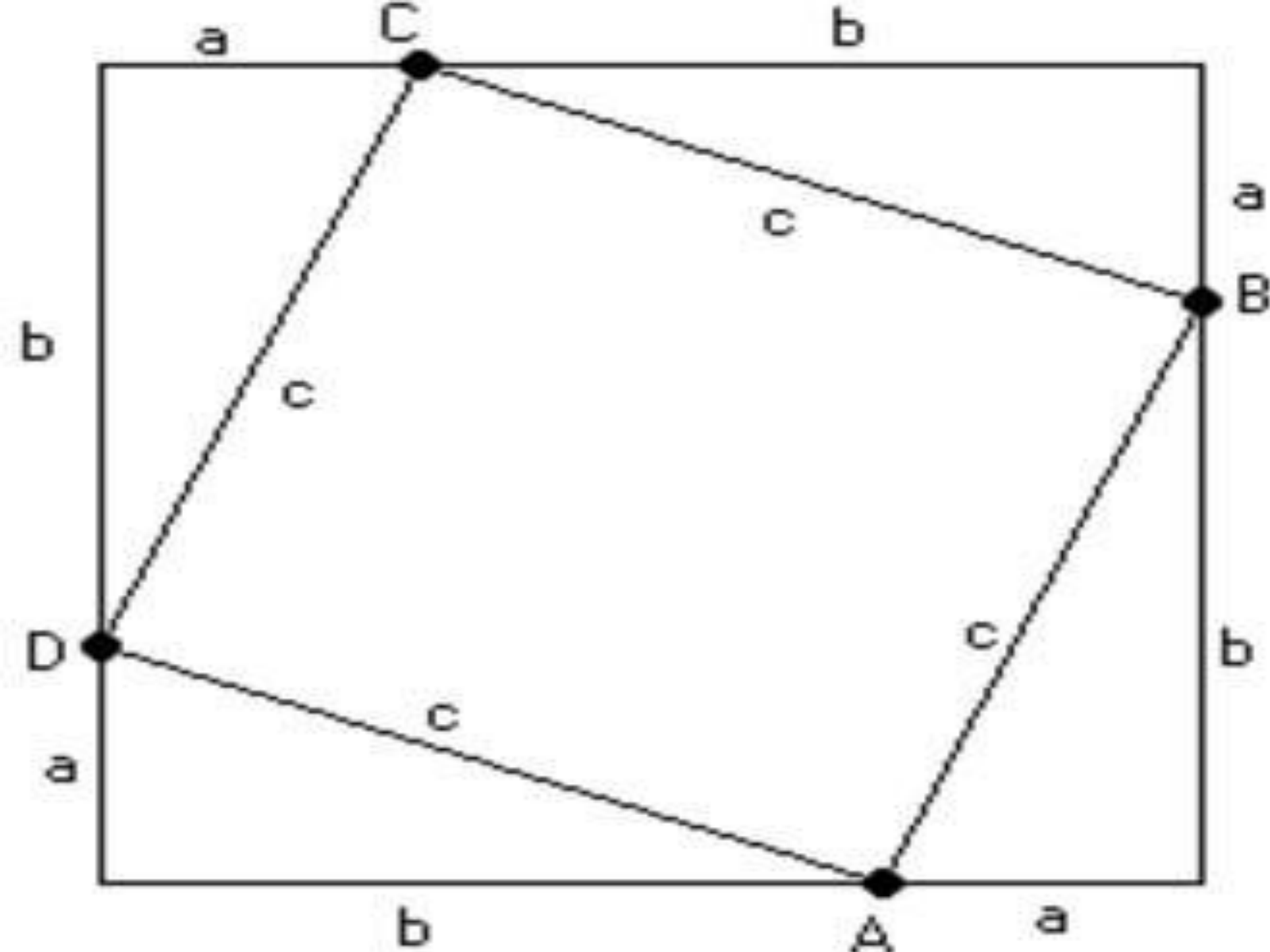
**«Квадрат, построенный  
на гипотенузе прямо-  
угольного треугольника,  
равновелик сумме  
квадратов, построенных  
на катетах».**



- Пифагоровы штаны на все стороны равны

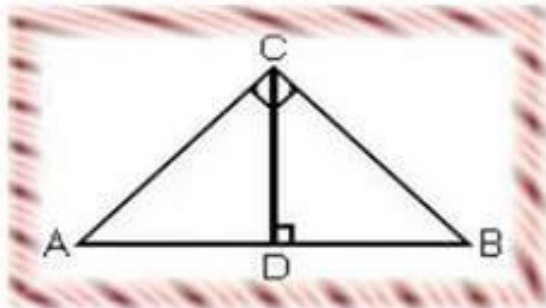
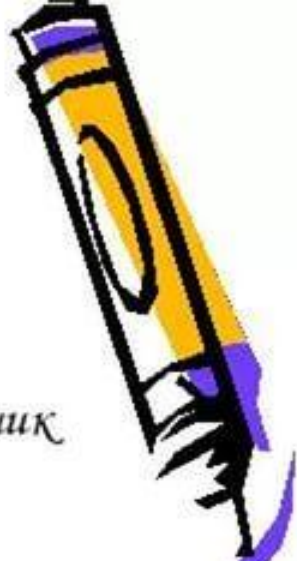


Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме квадратов, построенных на его катетах.





# I. Алгебраическое доказательство



**Дано:**  $\triangle ABC$  - прямоугольный треугольник  
**Доказать:**  $AB^2 = AC^2 + BC^2$

**Доказательство:**

- 1) Проведем высоту  $CD$  из вершины прямого угла  $C$ .
- 2) По определению косинуса угла  $\cos A = AD/AC = AC/AB$ , отсюда следует

$$AB \cdot AD = AC^2.$$

- 3) Аналогично  $\cos B = BD/BC = BC/AB$ , значит

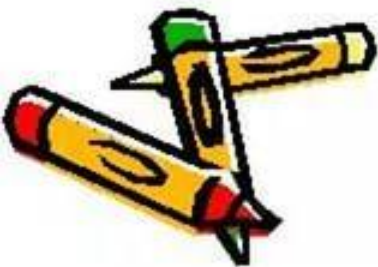
$$AB \cdot BD = BC^2.$$

- 4) Сложив полученные равенства почленно, получим:

$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot (AD + DB)$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

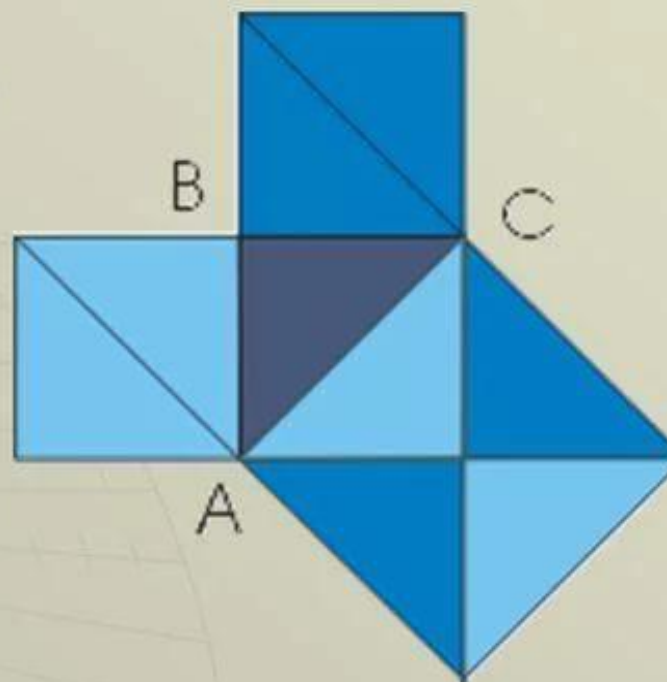
Что и требовалось доказать.



# Доказательства теоремы Пифагора.

## ✓ Простейшее доказательство.

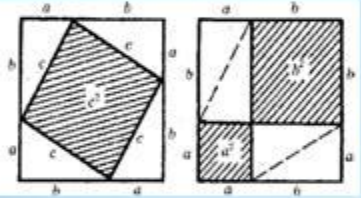
Простейшее доказательство теоремы получается в простейшем случае равнобедренного прямоугольного треугольника. В самом деле, достаточно просто посмотреть на мозаику равнобедренных прямоугольных треугольников, чтобы убедиться в справедливости теоремы. Например, для треугольника  $ABC$ : квадрат, построенный на гипотенузе  $AC$ , содержит 4 исходных треугольника, а квадраты, построенные на катетах - по два.





# Древнеиндийское доказательство

Доказывая эту теорему просто говорили: «Смотри!» Квадрат, сторона которого имеет длину  $a + b$ , можно разбить на части. Ясно, что невыделенные части на обоих рисунках одинаковы.



# Доказательство Мёльманна

$$2. \text{ Имеем: } 0,5ab = 0,5pr = 0,5(a+b+c) \cdot 0,5(a+b-c)$$

$$0,5ab = 0,5(a+b+c) \cdot 0,5(a+b-c)$$

$$ab = 0,5(a^2 + ab - ac - ab + b^2 - bc + ca + cb - c^2)$$

$$ab = 0,5(a^2 + b^2 - c^2 + 2ab) / \cdot 2$$

$$2ab = a^2 + b^2 - c^2 + 2ab$$

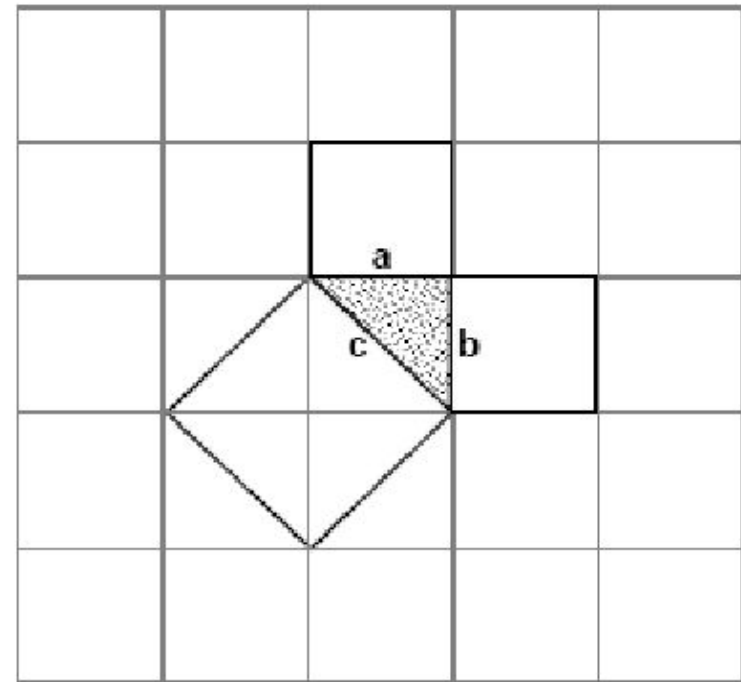
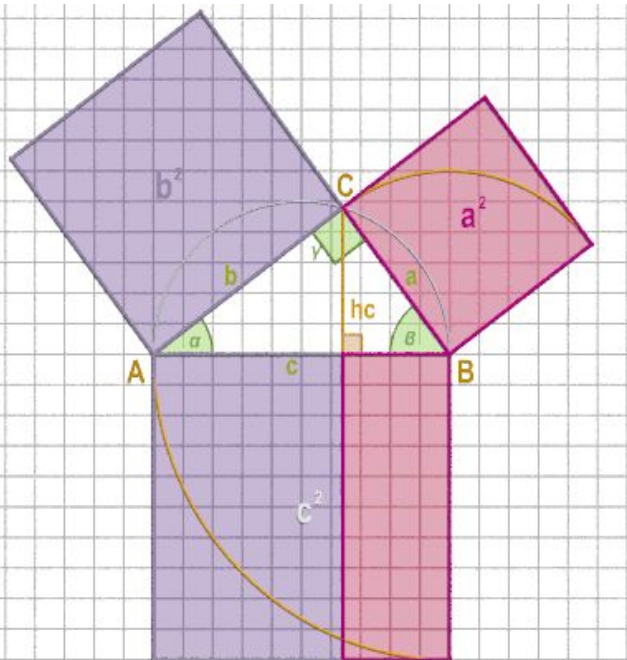
$$a^2 + b^2 - c^2 = 0$$



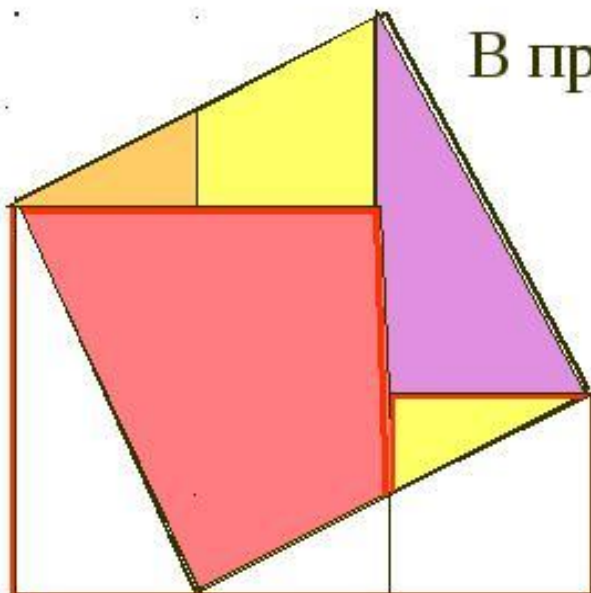
3. Отсюда следует, что  $c^2 = a^2 + b^2$

Что и требовалось доказать!

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА



# Доказательство из учебников XIX и XX вв.

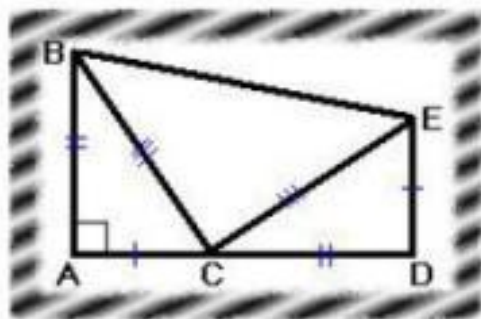


В прямоугольном треугольнике  
квадрат, построенный на  
гипотенузе  
может быть составлен  
из частей квадратов,  
построенных на катетах

Теорема доказана



# IV. Геометрическое доказательство



Дано:  $ABC$ -прямоугольный треугольник  
Доказать:  $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Доказательство:

- 1) Построим отрезок  $CD$  равный отрезку  $AB$  на продолжении катета  $AC$  прямоугольного треугольника  $ABC$ . Затем опустим перпендикуляр  $ED$  к отрезку  $AD$ , равный отрезку  $AC$ , соединим точки  $B$  и  $E$ .
- 2) Площадь фигуры  $ABED$  можно найти, если рассматривать её как сумму площадей трёх треугольников:

$$S_{ABED} = 2 \cdot AB \cdot AC / 2 + BC^2 / 2$$

- 3) Фигура  $ABED$  является трапецией, значит, её площадь равна

$$S_{ABED} = (DE + AB) \cdot AD / 2$$

- 4) Если приравнять левые части найденных выражений, то получим:

$$AB \cdot AC + BC^2 / 2 = (DE + AB)(CD + AC) / 2$$

$$AB \cdot AC + BC^2 / 2 = (AC + AB)^2 / 2$$

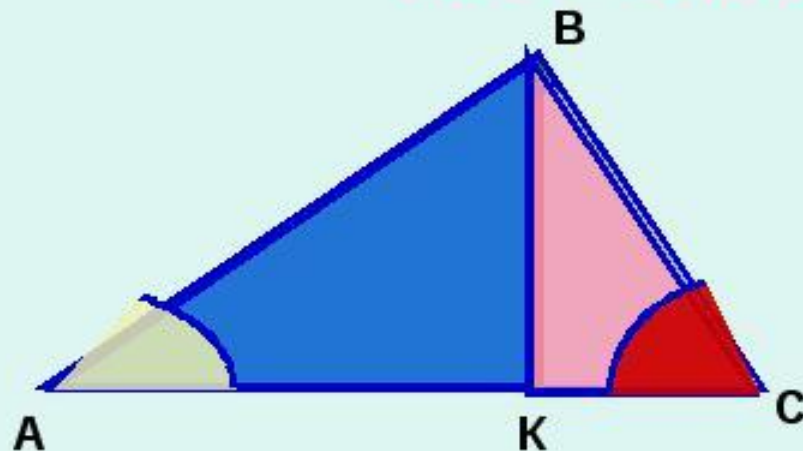
$$AB \cdot AC + BC^2 / 2 = AC^2 / 2 + AB^2 / 2 + AB \cdot AC$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Это доказательство было опубликовано в 1882 году Гэрфилдом.



# ТЕОРЕМА ПИФАГОРА



ДАНО:  $\triangle ABC$  – прямоугольный,  
 $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $BK$  – высота

ДОКАЗАТЬ:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

$$\text{Из } \triangle ABK \rightarrow \cos \angle A = AK : AB$$

$$\text{Из } \triangle ABC \rightarrow \cos \angle A = AB : AC$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Из } \triangle ABK \rightarrow \cos \angle A = AK : AB \\ \text{Из } \triangle ABC \rightarrow \cos \angle A = AB : AC \end{array} \right\} \rightarrow AK : AB = AB : AC \rightarrow AB^2 = AK \cdot AC$$

$$\text{Из } \triangle BCK \rightarrow \cos \angle C = KC : BC$$

$$\text{Из } \triangle ABC \rightarrow \cos \angle C = BC : AC$$

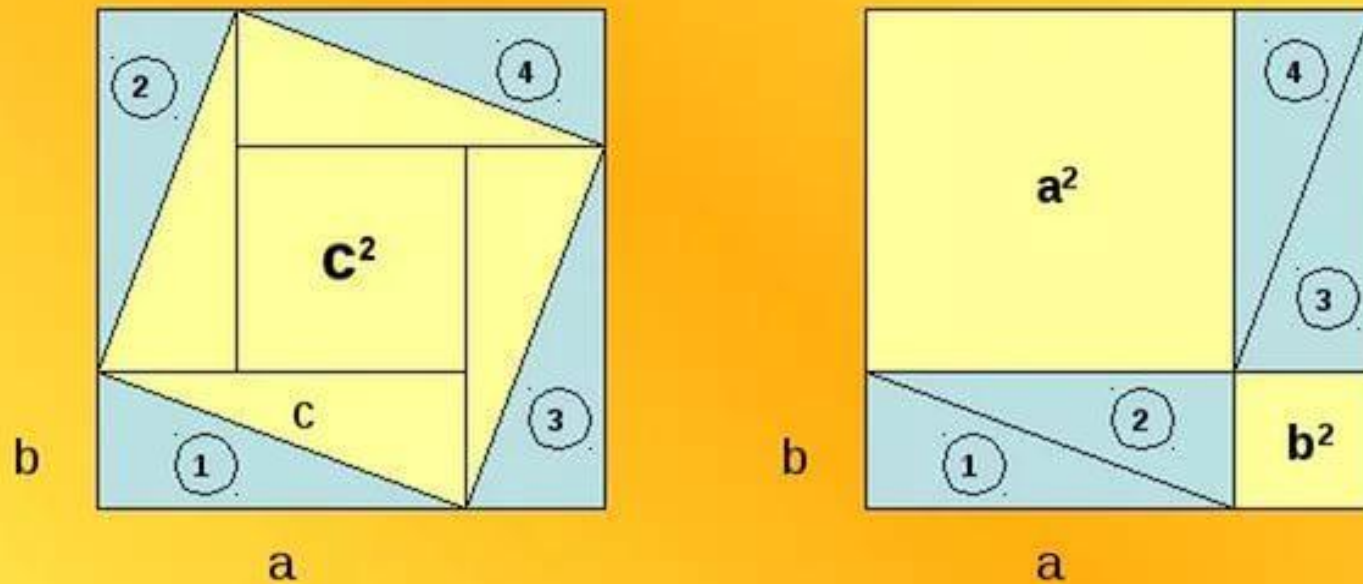
$$\left. \begin{array}{l} \text{Из } \triangle BCK \rightarrow \cos \angle C = KC : BC \\ \text{Из } \triangle ABC \rightarrow \cos \angle C = BC : AC \end{array} \right\} \rightarrow KC : BC = BC : AC \rightarrow BC^2 = KC \cdot AC$$

$$AB^2 + BC^2 = AK \cdot AC + KC \cdot AC = AC \cdot (AK + KC) = AC \cdot AC = AC^2$$

---

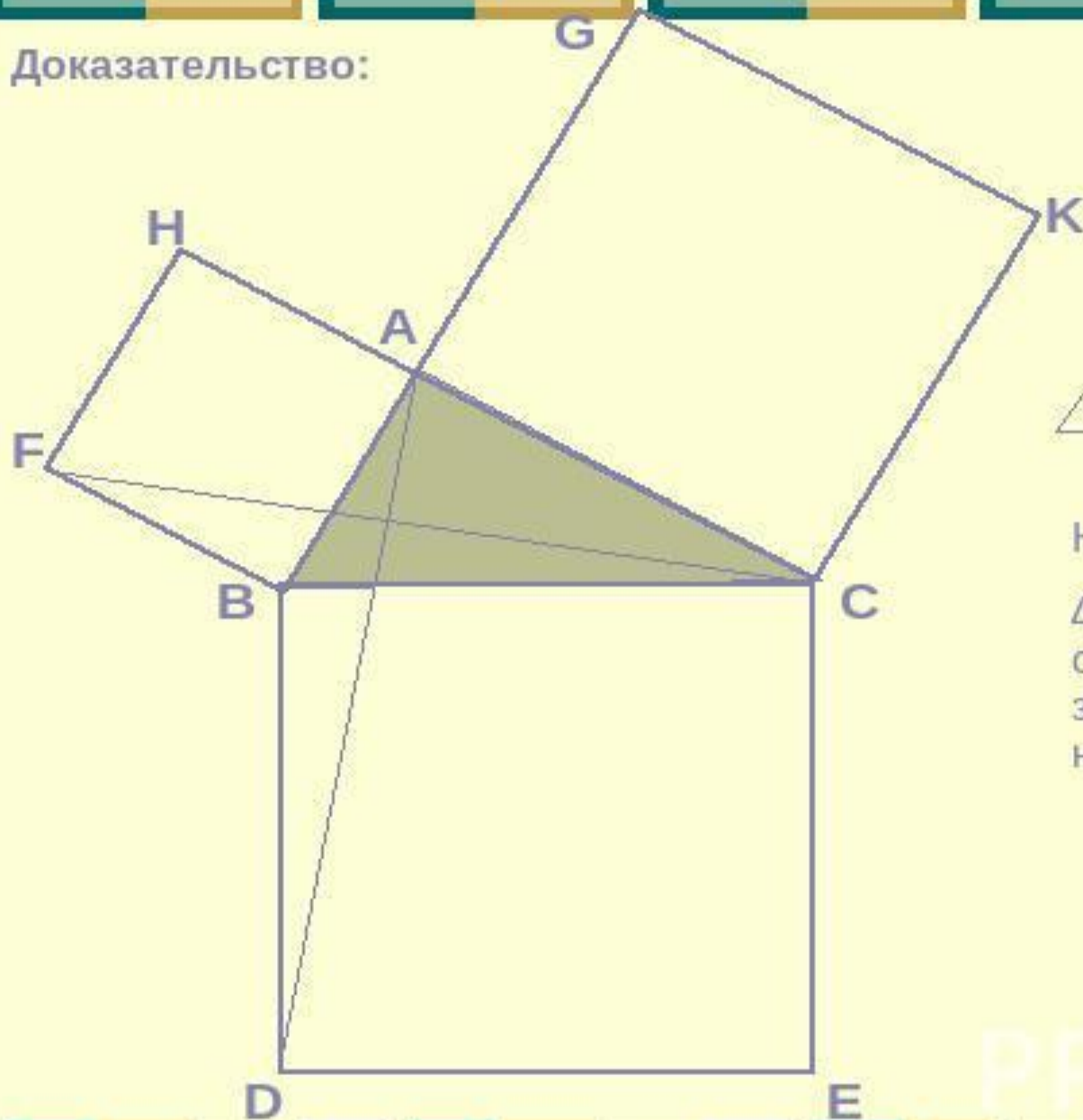


# Древнекитайское доказательство теоремы Пифагора – 1-й вар. (2)



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Доказательство:



$$\angle DBC = \angle FBA = 90^\circ$$

$$\angle DBC + \angle ABC =$$

$$\angle FBA + \angle ABC$$

Значит,

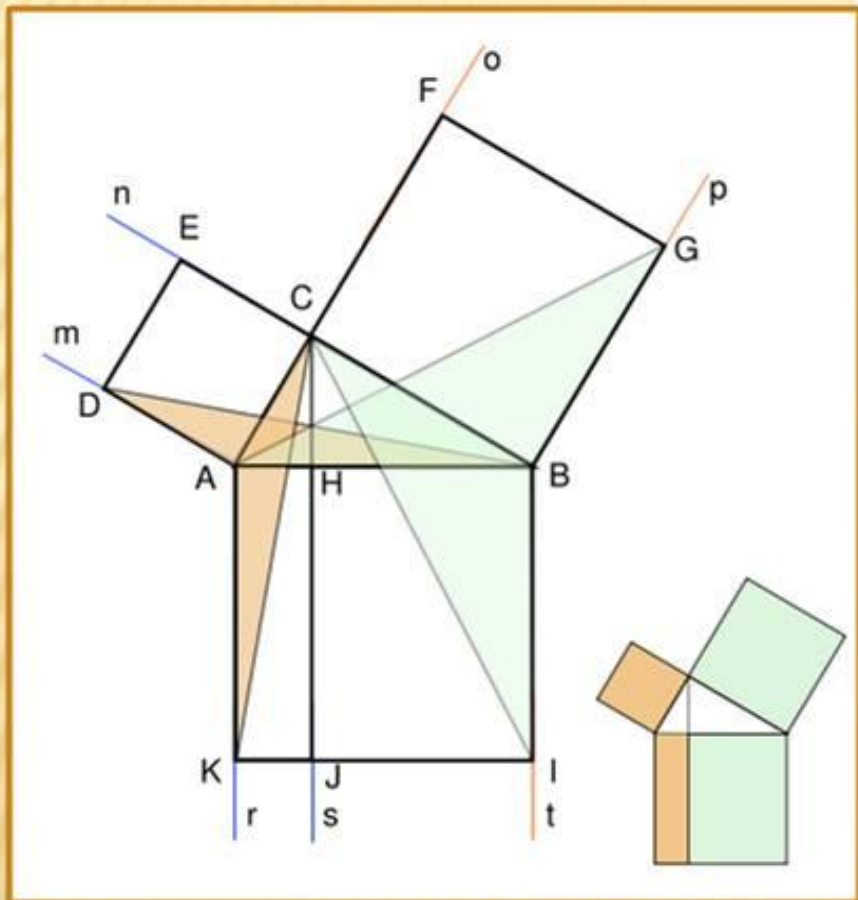
$$\angle DBA = \angle FBC.$$

Но  $AB=FB$ ,  $BC=BD$ .

$\triangle ABD = \triangle FBC$  (по двум сторонам и углу, заключенному между ними).



# Доказательство Евклида



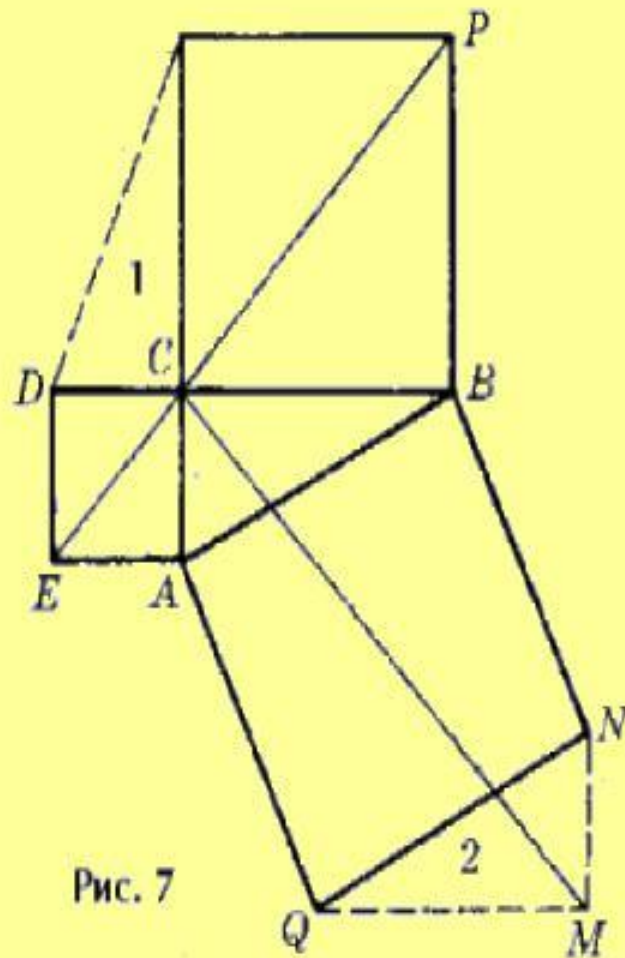
В течение двух тысячелетий наиболее распространённым доказательством теоремы Пифагора было придуманное Евклидом.

Евклид опускал высоту  $CH$  из вершины прямого угла на гипотенузу и доказывал, что её продолжение делит достроенный на гипотенузе квадрат на два прямоугольника, площади которых равны площадям соответствующих квадратов, построенных на катетах.

# Доказательство методом достроения

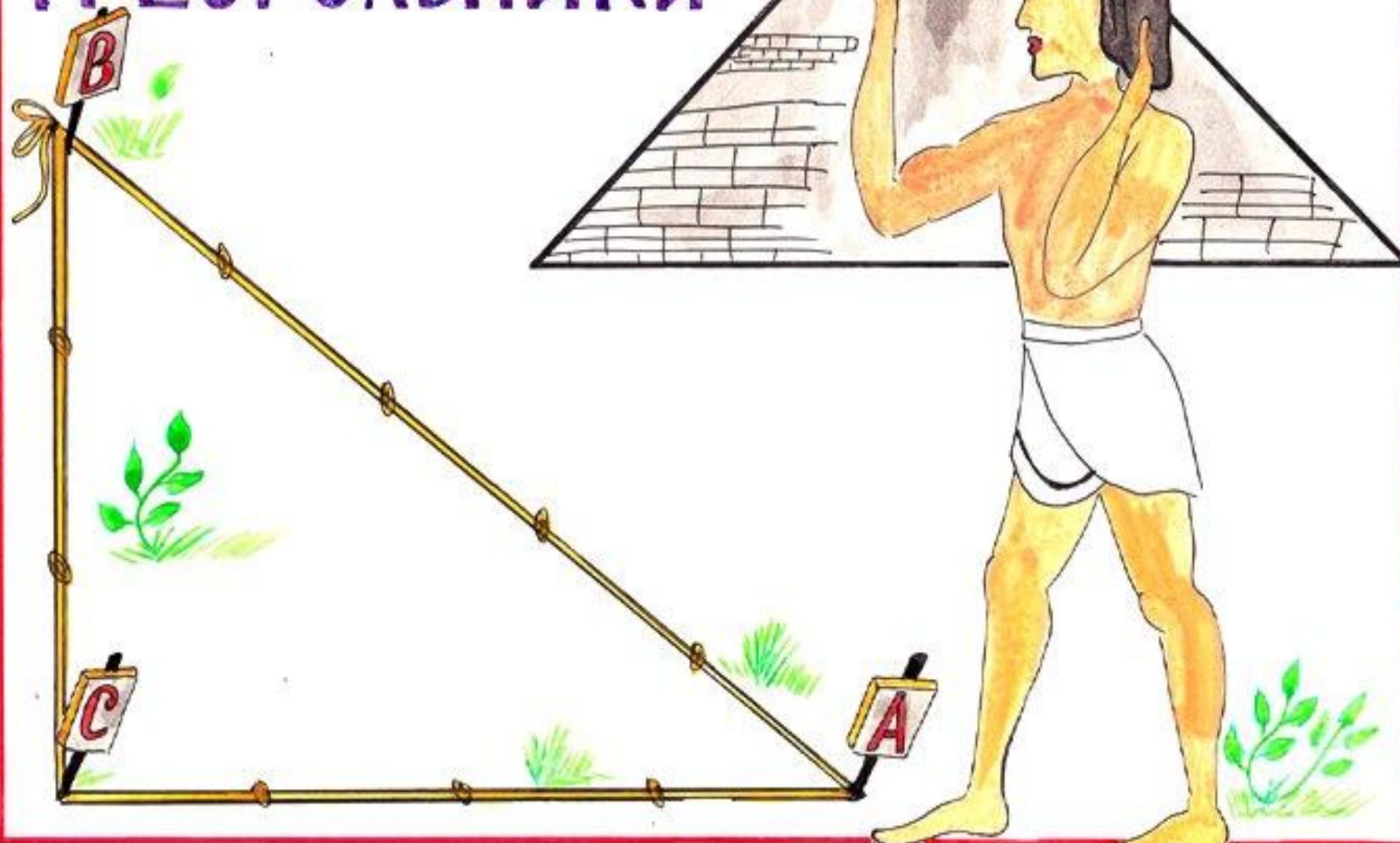
Сущность этого метода состоит в том, что к квадратам, построенным на катетах, и к квадрату, построенному на гипотенузе, присоединяют равные фигуры таким образом, чтобы получились равновеликие фигуры.

На рис. 7 изображена обычная Пифагорова фигура – прямоугольный треугольник  $ABC$  с построенными на его сторонах квадратами. К этой фигуре присоединены треугольники 1 и 2, равные исходному прямоугольному треугольнику.





# ПИФАГОРОВЫ ТРЕУГОЛЬНИКИ



# Применение теоремы Пифагора

- Пифагоины тройки
- Астрономия
- Архитектура
- Мобильная связь
- Масштабы





# Применение теоремы Пифагора в строительстве





# Значение теоремы Пифагора



В конце 19 века высказывались предположения о существовании обитателей Марса подобных человеку.. Было решено передать обитателям Марса сигнал в виде теоремы Пифагора. Математический факт, выражаемый теоремой Пифагора имеет место всюду и поэтому похожие на нас обитатели другого мира должны понять такой сигнал



# Память.

- Памятник Пифагору находится в порту города Пифагория и напоминает всем о теореме Пифагора, наиболее известном его открытии. Катет, лежащий в основании треугольника - мраморный, гипотенуза и фигура самого Пифагора в виде второго катета - медные.

