Теорема Пифагора

«Ни о ком не говорят так много и так необычайно» (Порфирий).

Пифагор – древнегреческий ученый VI в. до н. э.

Изречения Пифагора

- Статуя формой своей хороша,
  А человека украсят дела.

- Шуткой беседу укрась, освети.
  Шутка, что соль. Лишь не пересоли…

- Лучше молчи, ну, а коль говоришь,
  Пусть будет лучше, чем то, что молчишь.

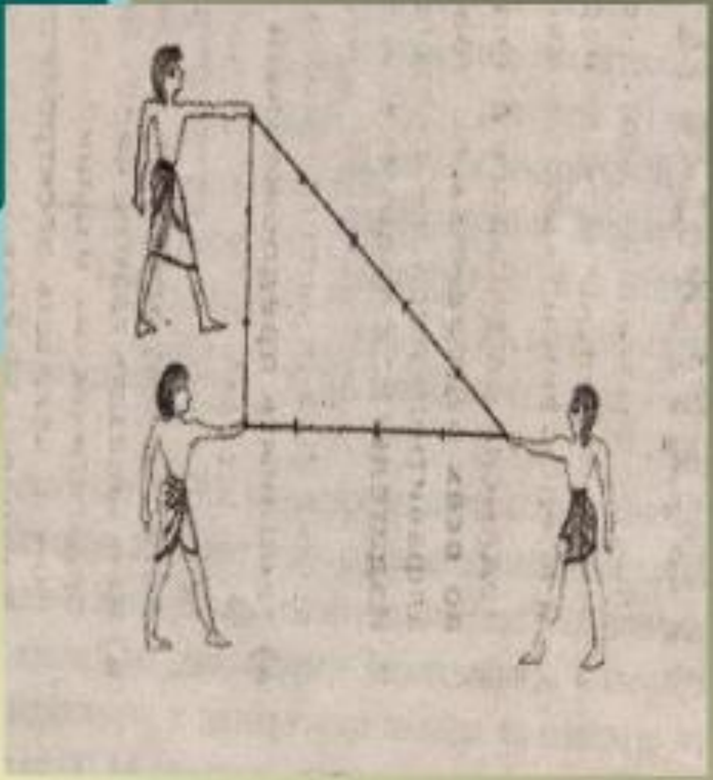
- Если ты в гневе, не смей говорить!
  Действовать резко и злобу сорить.

- Пред тем, как станешь говорить, пусть мысль созреет
  Под языком твоим. Созревшая - все смеет.

Почему же теперь эту теорему называют теоремой Пифагора?

Считают, что Пифагор доказал эту теорему, опираясь на рассуждения. До него утверждение о равенстве квадрата гипотенузы сумме квадратов катетов было известно лишь как факт, замеченный из построений.

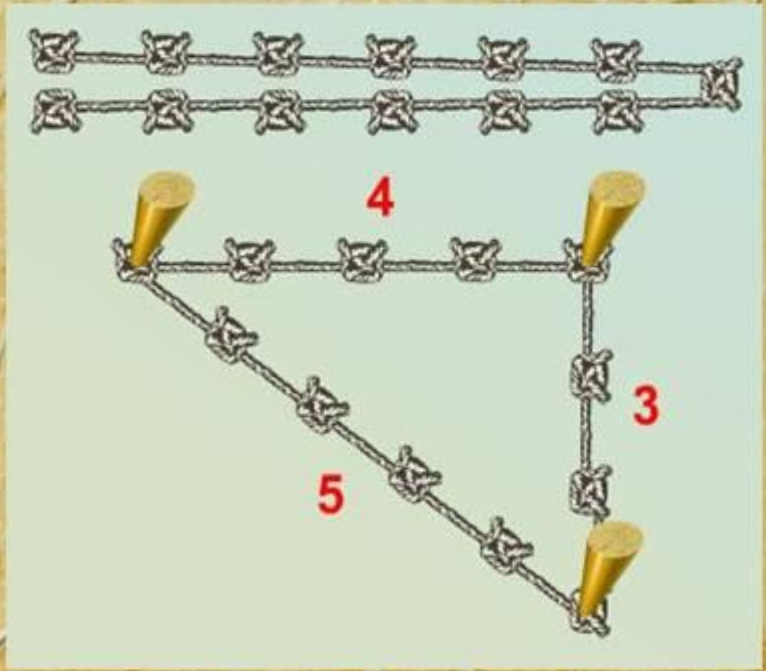
О теореме Пифагора



- Теорема Пифагора – одна из главных теорем геометрии, имеет богатую историю. Оказывается, задолго до Пифагора она была известна египтянам(верёвочным треугольником со сторонами3,4 ,5 они пользовались для построения прямых углов), вавилонянам , индийцам(они использовали её для построения алтарей). По видимому они не знали её доказательства ,а Пифагор доказал.
- Сохранилось древнее предание, что в честь своего открытия Пифагор принёс в жертву богам 100 быков.
- В настоящее время существует более 100 доказательств теоремы.
- Значение теоремы состоит в том ,что с её помощью можно доказывать другие теоремы и решать задачи.

Теорема Пифагора имеет богатую историю.

Она была известна задолго до Пифагора. За 8 веков до н. э. эта теорема была хорошо известна индийцам под названием ***«Правила веревки»*** и использовалась ими для построения алтарей, которые по священному предписанию должны иметь строгую геометрическую форму, ориентированную относительно четырех сторон горизонта.



Пифагор, не открыл эту теорему, а нашел ее доказательство, хотя доказательство самого Пифагора до нас не дошло.

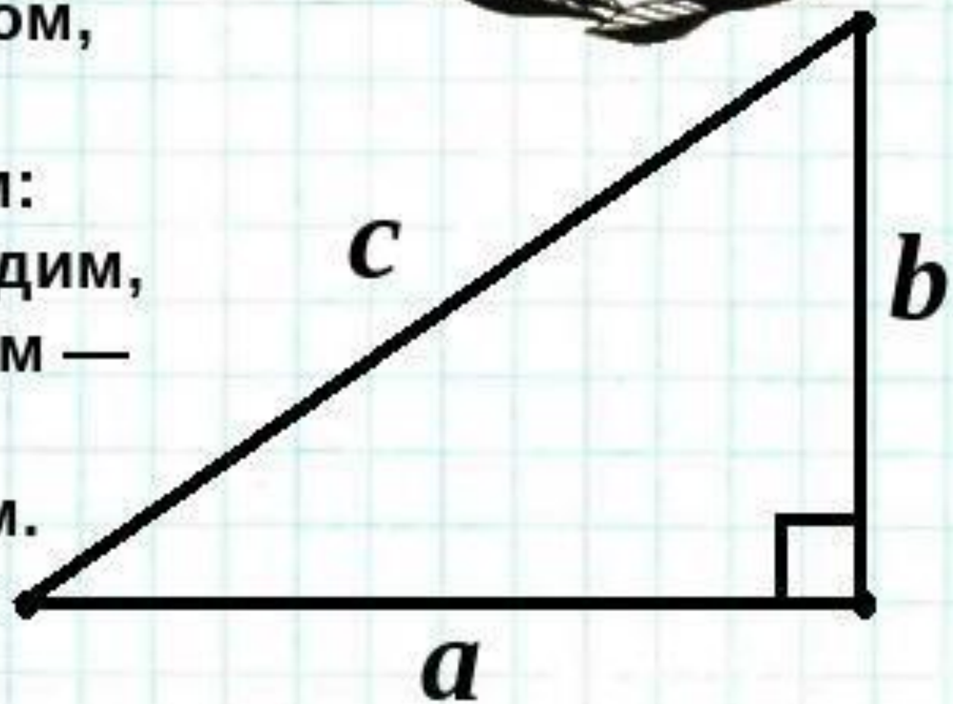
<u>Значение</u> теоремы состоит в том, что из нее или с ее помощью можно вывести большинство теорем геометрии и решить множество задач.

Хронология развития теоремы до Пифагора:

№	Историческое место	дата
1	Древний Китай (математическая книга Чу-пей)	~2400 г. до н. э.
2	Древний Египет (гарпедонапты или "натягиватели веревок")	2300 г. до н. э.
3	Вавилон (Хаммураби)	2000 г. до н. э.
4	Древняя Индия (сборник Сульвасутра)	600 г. до н. э.
5	Пифагор	570 г. до н. э.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Если дан нам треугольник
И притом с прямым углом,
То квадрат гипотенузы
Мы всегда легко найдем:
Катеты в квадрат возводим,
Сумму степеней находим —
И таким простым путем
К результату мы придем.



И. Дырченко

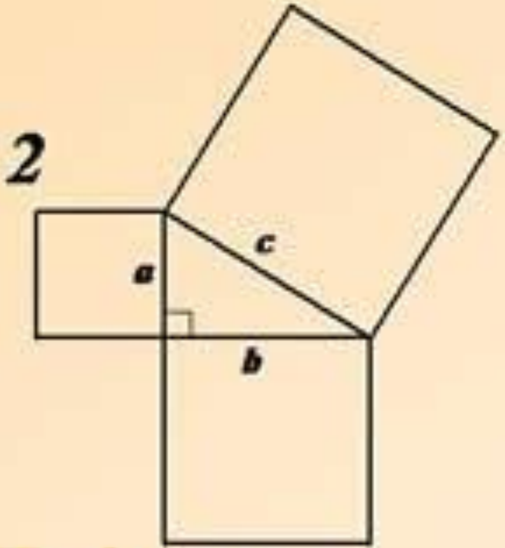
Пифагор и его теорема

Пребудет вечной истина, как скоро
Ее познает слабый человек!
И ныне теорема Пифагора
Верна, как и в его далекий век.
Обильно было жертвоприношенье
Богам от Пифагора. Сто быков
Он отдал на закланье и сожженье
За света луч, пришедший с облаков.
Поэтому всегда с тех самых пор,
Чуть истина рождается на свет,
Быки ревут, ее почуя, вслед.
Они не в силах свету помешать.
А могут лишь, закрыв глаза, дрожать
От страха, что вселил в них Пифагор.

А. Шамиссо

Современная формулировка теоремы Пифагора

$$c^2 = a^2 + b^2$$

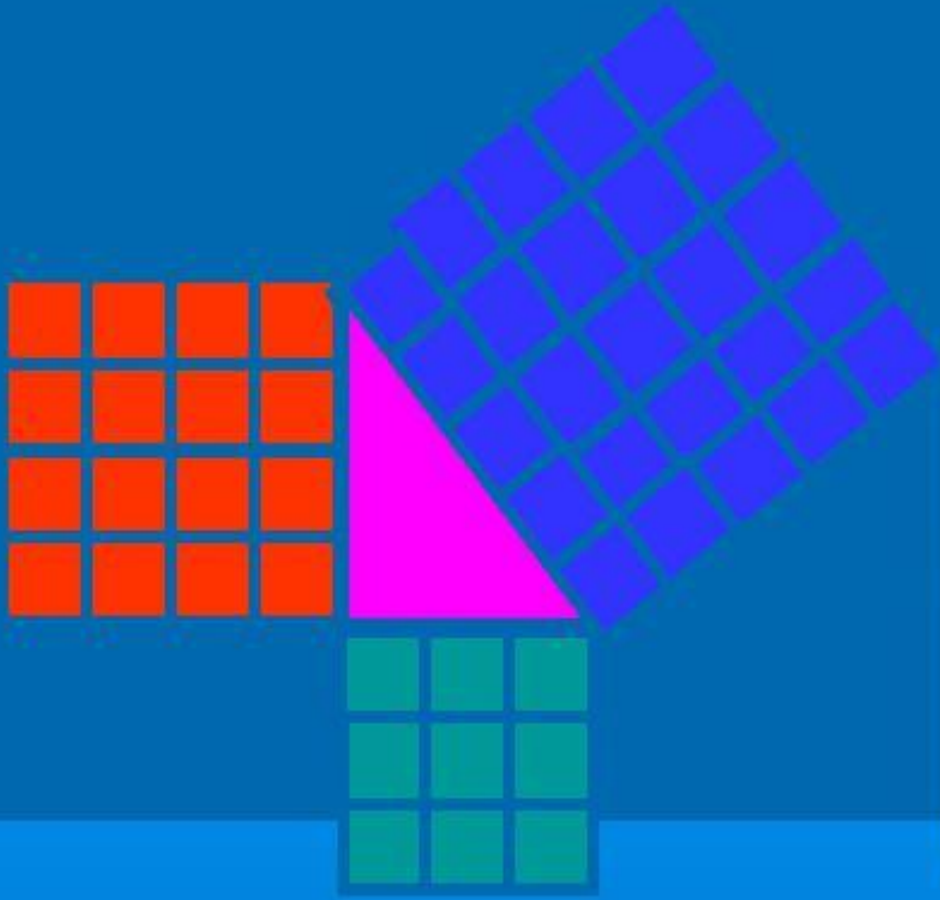


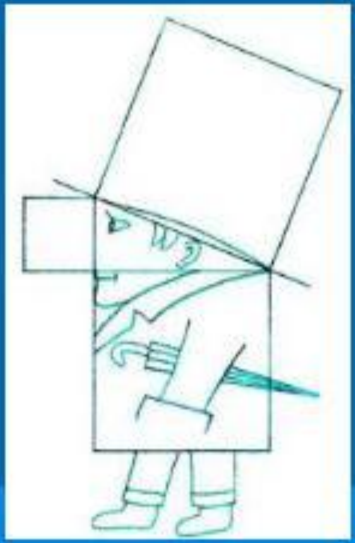
«В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов».

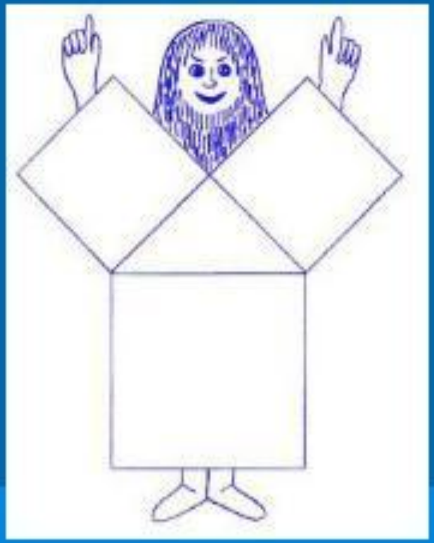
Во времена Пифагора формулировка теоремы звучала так:

«Квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равновелик сумме квадратов, построенных на катетах».

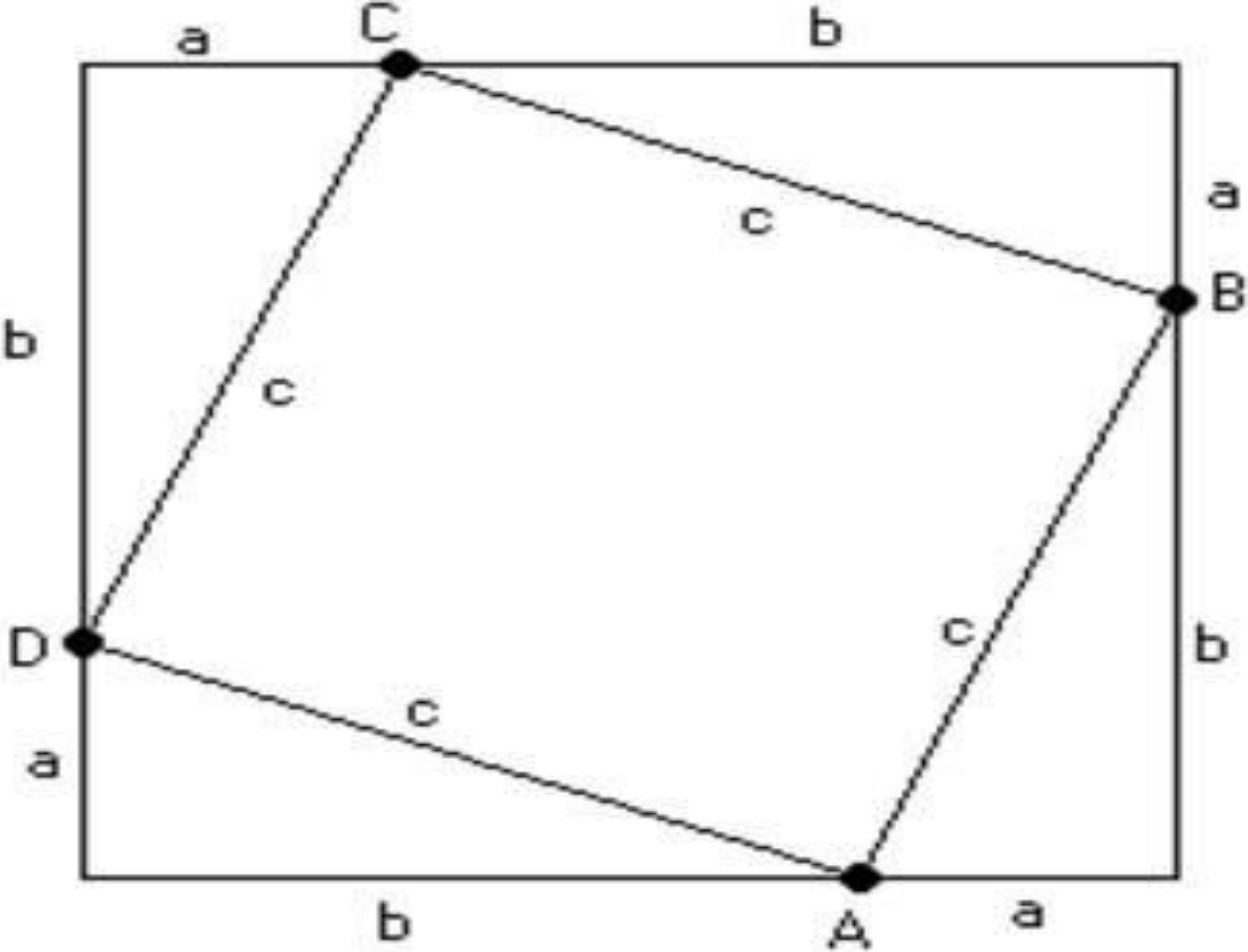
- Пифагоровы штаны на все стороны равны





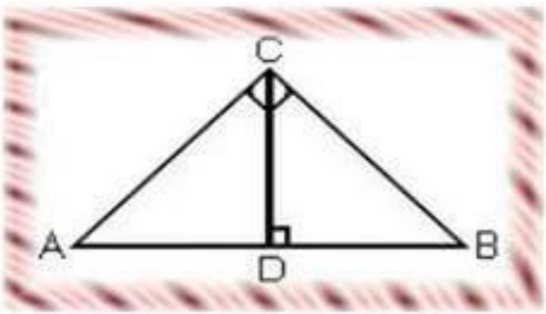


Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме квадратов, построенных на его катетах.



a
C
b
a
c
B
b
c
c
D
b
c
a
b
A
a

I. Алгебраическое доказательство



Дано: ABC-прямоугольный треугольник

Доказать: $AB^2=AC^2+BC^2$

Доказательство:

1) Проведем высоту CD *из вершины прямого угла* C.

2) По определению косинуса угла $\cos A=AD/AC=AC/AB$, *отсюда следует*

$AB*AD=AC^2$.

3) Аналогично $\cos B=BD/BC=BC/AB$, *значит*

$AB*BD=BC^2$.

4) Сложив полученные равенства почленно, получим:

$AC^2+BC^2=AB*(AD + DB)$

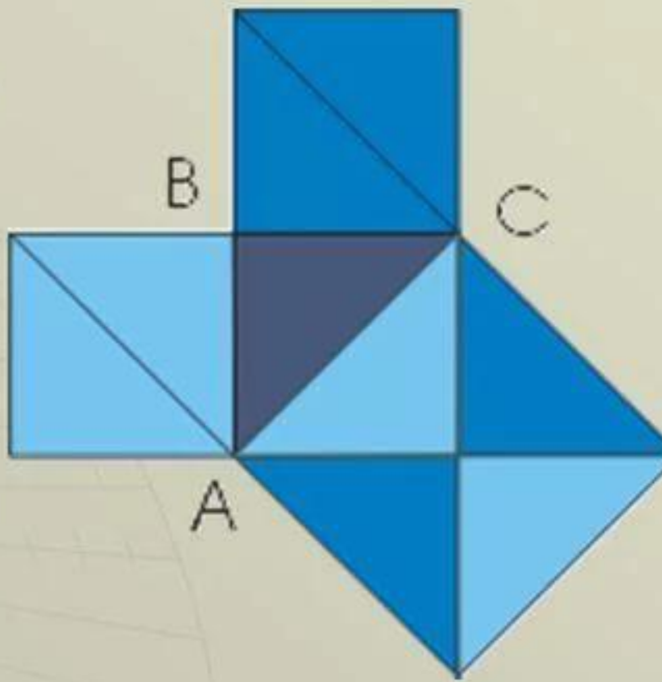
$AB^2=AC^2+BC^2$. **Что и требовалось доказать.**

Доказательства теоремы Пифагора.

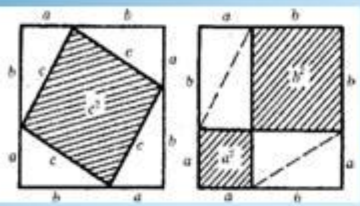
- ***Простейшее доказательство.***

Простейшее доказательство теоремы получается в простейшем случае равнобедренного прямоугольного треугольника. В самом деле, достаточно просто посмотреть на мозаику равнобедренных прямоугольных треугольников, чтобы убедиться в справедливости теоремы. Например, для треугольника *ABC* : квадрат, построенный на гипотенузе *AC*, содержит 4 исходных треугольника, а квадраты, построенные

на катетах -по два.



Древнеиндийское доказательство



Доказывая эту теорему просто говорили:- «Смотри!» Квадрат, сторона которого имеет длину а + в , можно разбить на части . Ясно, что невыделенные части на обоих рисунках одинаковы .

Доказательство Мёльманна

2. Имеем: $0{,}5ab=0{,}5pr=0{,}5(a+b+c)\cdot 0{,}5(a+b-c)$

$\cancel{0{,}5}ab=0{,}5(a+b+c)\cdot\cancel{0{,}5}(a+b-c)$

$ab=0{,}5(a^2 + ab - \cancel{ac} + ab + b^2 - \cancel{bc} + \cancel{ca} + \cancel{cb} - c^2)$

$ab=0{,}5(a^2 + b^2 - c^2 + 2ab)/\cdot 2$

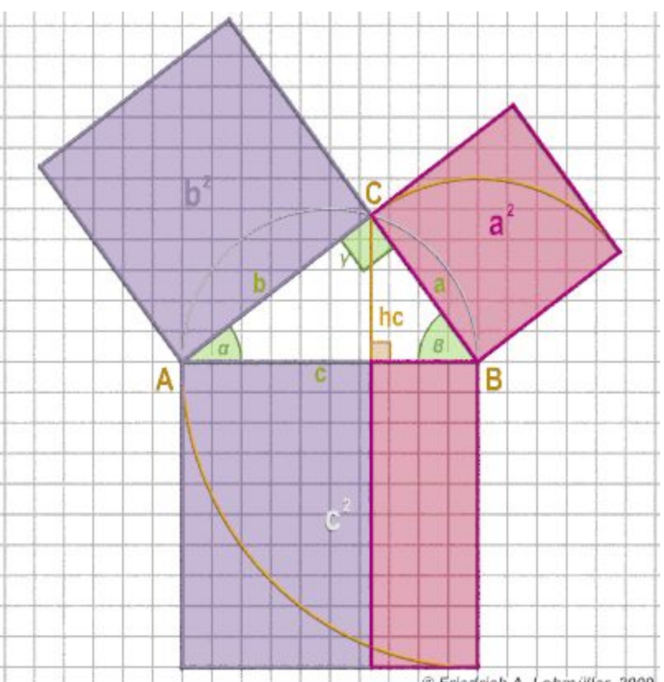
$\cancel{2ab}=a^2 + b^2 - c^2 + \cancel{2ab}$

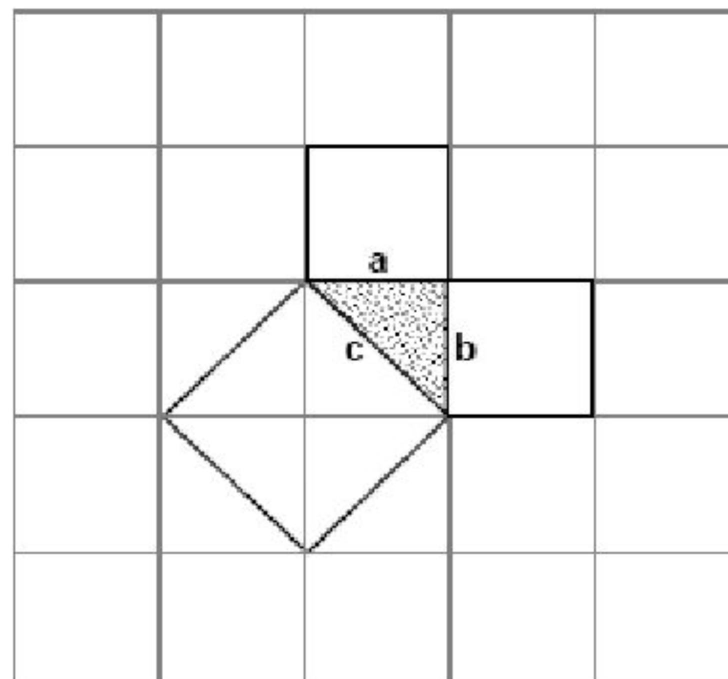
$a^2 + b^2 - c^2 = 0$

3. Отсюда следует, что $c^2 = a^2+b^2$

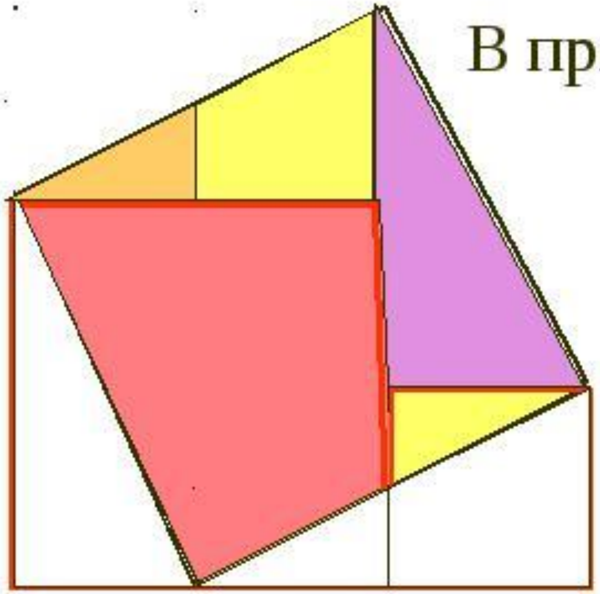
Что и требовалось доказать!

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА





Доказательство из учебников XIX и XX вв.



В прямоугольном треугольнике

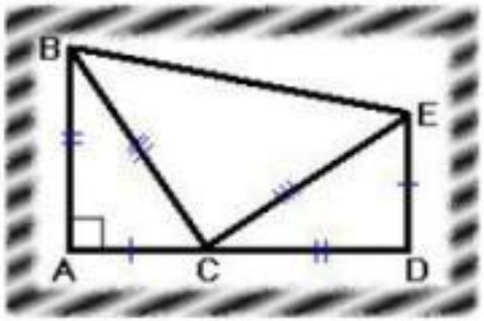
квадрат, построенный на гипотенузе

может быть составлен

из частей квадратов, построенных на катетах

Теорема доказана

IV. Геометрическое доказательство



Дано: *ABC*-прямоугольный треугольник

Доказать: $BC^2=AB^2+AC^2$

Доказательство:

1) Построим отрезок ***CD*** равный отрезку ***AB*** на продолжении катета ***AC*** прямоугольного треугольника ***ABC***. Затем опустим перпендикуляр ***ED*** к отрезку ***AD***, равный отрезку ***AC***, соединим точки ***B*** и ***E***.

2) Площадь фигуры ***ABED*** можно найти, если рассматривать её как сумму площадей трёх треугольников:

$$S_{ABED}=2*AB*AC/2+BC^2/2$$

3) Фигура ***ABED*** является трапецией, значит, её площадь равна:

$$S_{ABED}=(DE+AB)*AD/2.$$

4) Если приравнять левые части найденных выражений, то получим:

$AB*AC+BC^2/2=(DE+AB)(CD+AC)/2$

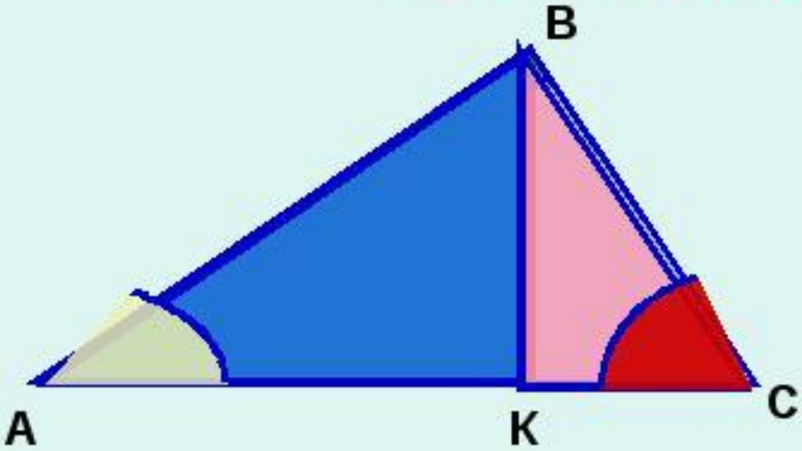
$AB*AC+BC^2/2=(AC+AB)^2/2$

$AB*AC+BC^2/2=AC^2/2+AB^2/2+AB*AC$

$BC^2=AB^2+AC^2.$

Это доказательство было опубликовано в 1882 году Гэрфилдом.

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА



ДАНО: ΔABC – прямоугольный,

$<ABC = 90^0$, BK - высота

ДОКАЗАТЬ:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Из $\Delta ABK \rightarrow \cos<A = AK : AB$

Из $\Delta ABC \rightarrow \cos<A = AB : AC$

$\rightarrow AK : AB = AB : AC \rightarrow AB^2 = AK \cdot AC$

Из $\Delta BCK \rightarrow \cos<C = KC : BC$

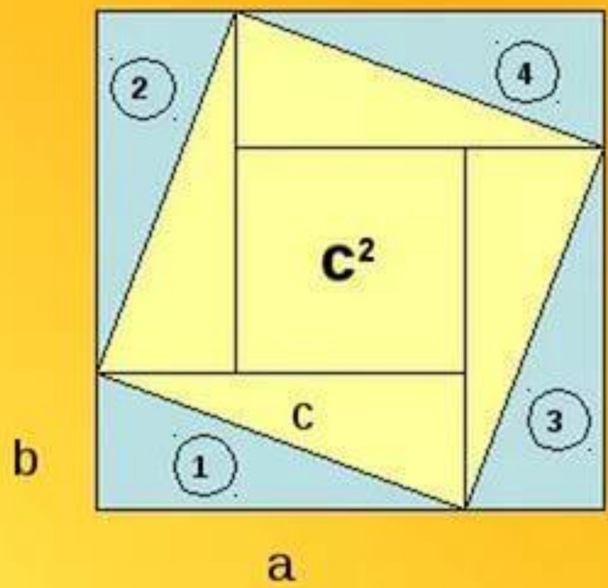
Из $\Delta ABC \rightarrow \cos<C = BC : AC$

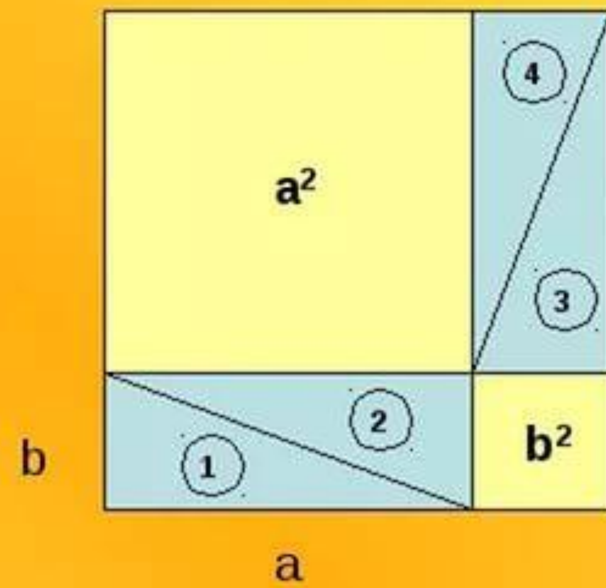
$\rightarrow KC : BC = BC : AC \rightarrow BC^2 = KC \cdot AC$

$\rightarrow$

$$AB^2 + BC^2 = AK \cdot AC + KC \cdot AC = AC \cdot (AK + KC) = AC \cdot AC = AC^2$$

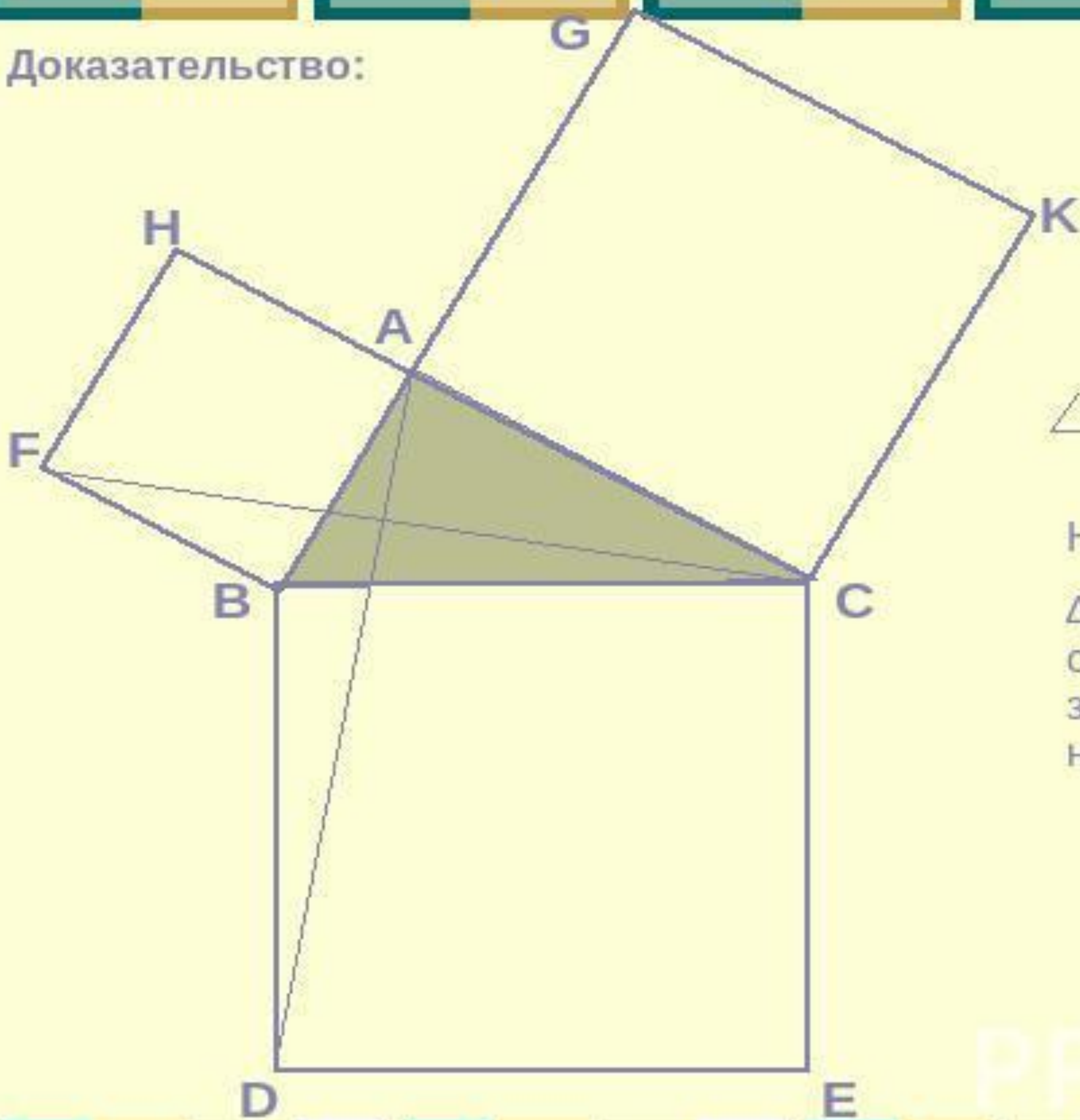
Древнекитайское доказательство теоремы Пифагора – 1-й вар. (2)





$$a^2 + b^2 = c^2$$

Доказательство:



∠ DBC = ∠ FBA = 90°

∠ DBC + ∠ ABC =

∠ FBA + ∠ABC

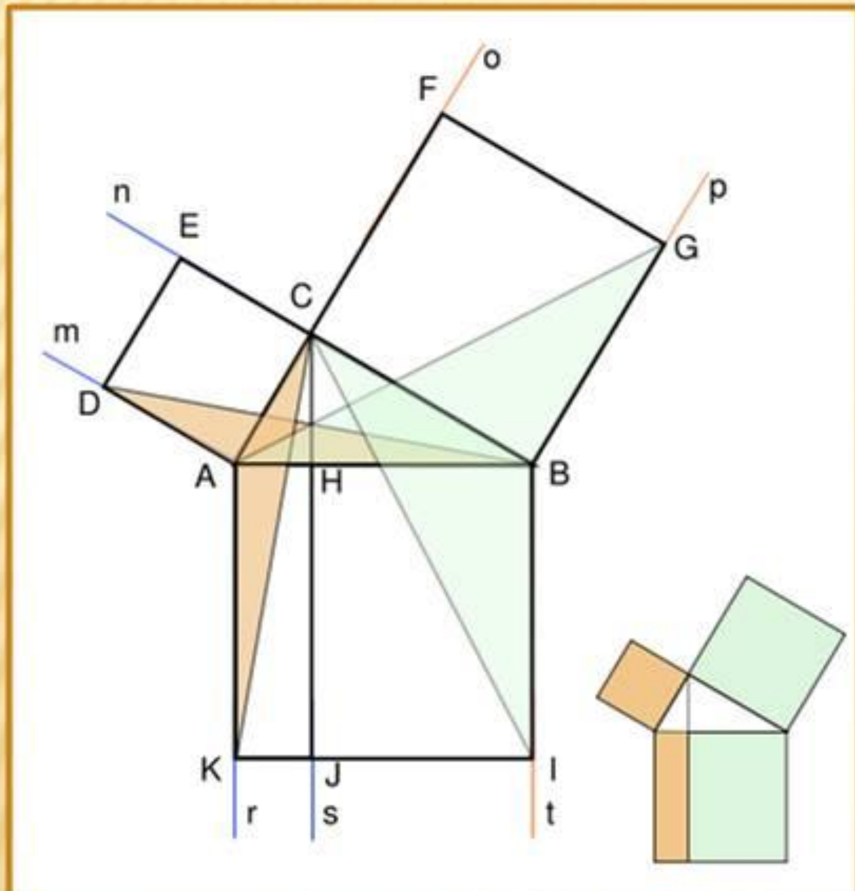
Значит,

∠ DBA = ∠ FBC.

Но AB=FB, BC=BD.

ΔABD=ΔFBC (по двум сторонам и углу, заключенному между ними).

Доказательство Евклида



В течение двух тысячелетий наиболее распространенным доказательством теоремы Пифагора было придуманное Евклидом.

Евклид опускал высоту CH из вершины прямого угла на гипотенузу и доказывал, что её продолжение делит достроенный на гипотенузе квадрат на два прямоугольника, площади которых равны площадям соответствующих квадратов, построенных на катетах.

Доказательство методом достроения

Сущность этого метода состоит в том, что к квадратам, построенным на катетах, и к квадрату, построенному на гипотенузе, присоединяют равные фигуры таким образом, чтобы получились равновеликие фигуры.

На рис. 7 изображена обычная Пифагорова фигура – прямоугольный треугольник АВС с построенными на его сторонах квадратами. К этой фигуре присоединены треугольники 1 и 2, равные исходному прямоугольному треугольнику.

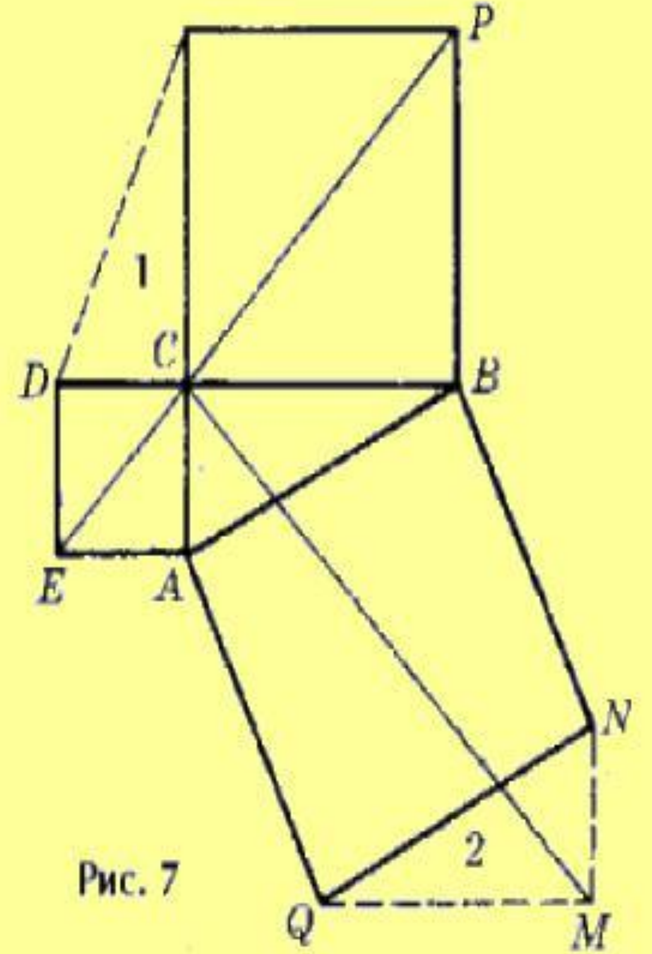


Рис. 7


ПИФАГОРОВЫ
ТРЕУГОЛЬНИКИ
B
C
A

Применение теоремы Пифагора

- Пифагоровы тройки
- Астрономия
- Архитектура
- Мобильная связь
- Молниеотводы

Применение теоремы Пифагора в строительстве

Значение теоремы Пифагора

В конце 19 века высказывались предположения о существовании обитателей Марса подобных человеку.. Было решено передать обитателям Марса сигнал в виде теоремы Пифагора. Математический факт, выражаемый теоремой Пифагора имеет место всюду и поэтому похожие на нас обитатели другого мира должны понять такой сигнал

Память.

- Памятник Пифагору находится в порту города Пифагория и напоминает всем о теореме Пифагора, наиболее известном его открытии. Катет, лежащий в основании треугольника - мраморный , гипотенуза и фигура самого Пифагора в виде второго катета - медные.