

24.12.20.

Тема: Неопределенный интеграл.
Методы вычисления интегралов.

Учащиеся должны освоить теоретическую часть и прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала:

<https://youtu.be/PZMdPyJaKps>

Теоретическая часть:

Прочитать.

Формулы и определения, выделенные жирным шрифтом – выучить

Вычисление интегралов

Задача 1 Вычислить интеграл $\int_0^1 (x-1) dx$.

- ▶ Одной из первообразных функции $x-1$ является функция $\frac{x^2}{2} - x$. Поэтому $\int_0^1 (x-1) dx = \left(\frac{1^2}{2} - 1 \right) - \left(\frac{0^2}{2} - 0 \right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$. ◀

При вычислении интегралов удобно ввести следующее обозначение:

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

Тогда формулу Ньютона — Лейбница можно записать в виде

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b.$$

Задача 2 Вычислить интеграл $\int_{-a}^a \sin x dx$.

- ▶ $\int_{-a}^a \sin x dx = (-\cos x) \Big|_{-a}^a = (-\cos a) - (-\cos(-a)) = -\cos a + \cos(-a) = 0$, так как $\cos(-a) = \cos a$. ◀

Задача 3 Вычислить интеграл $\int_{-1}^3 \frac{1}{\sqrt{2x+3}} dx$.

- ▶ $\int_{-1}^3 \frac{1}{\sqrt{2x+3}} dx = \int_{-1}^3 (2x+3)^{-\frac{1}{2}} dx = (2x+3)^{\frac{1}{2}} \Big|_{-1}^3 = (2 \cdot 3 + 3)^{\frac{1}{2}} - (2 \cdot (-1) + 3)^{\frac{1}{2}} = 3 - 1 = 2$. ◀

Задача 4 Вычислить интеграл $\int_{\frac{\pi}{2}} \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) dx$.

$$\begin{aligned} & \blacktriangleright \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) dx = \frac{1}{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \\ & = \frac{1}{2} \left(\sin \left(2\pi + \frac{\pi}{4} \right) - \sin \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) = \\ & = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Задача 5 Вычислить интеграл $\int_0^3 x \sqrt{x+1} dx$.

$$\begin{aligned} & \blacktriangleright \int_0^3 x \sqrt{x+1} dx = \int_0^3 (x+1-1) \sqrt{x+1} dx = \\ & = \int_0^3 \left((x+1)^{\frac{3}{2}} - (x+1)^{\frac{1}{2}} \right) dx = \left(\frac{2}{5} (x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^3 = \\ & = \left(\frac{2}{5} \cdot 32 - \frac{2}{3} \cdot 8 \right) - \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3} \right) = 7 \frac{11}{15}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Практическая часть.

Вычислить интеграл

- 1004**
- 1) $\int_0^1 x dx;$ 2) $\int_0^3 x^2 dx;$ 3) $\int_{-1}^2 3x^2 dx;$ 4) $\int_{-2}^3 2x dx;$
- 5) $\int_2^3 \frac{1}{x^2} dx;$ 6) $\int_1^2 \frac{1}{x^3} dx;$ 7) $\int_1^4 \sqrt{x} dx;$ 8) $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$
- 1005**
- 1) $\int_1^e \frac{1}{x} dx;$ 2) $\int_0^{\ln 2} e^x dx;$ 3) $\int_{-\pi}^{2\pi} \cos x dx;$
- 4) $\int_{-2\pi}^{\pi} \sin x dx;$ 5) $\int_{-2\pi}^{\pi} \sin 2x dx;$ 6) $\int_{-3\pi}^0 \cos 3x dx.$