24.12.20.

Тема: Неопределенный интеграл. Методы вычисления интегралов.

Учащиеся должны освоить теоретическую часть и прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала:
https://youtu.be/PZMdPyJaKps

Теоретическая часть:

Прочитать.

Формулы и определения, выделенные жирным шрифтом – выучить

Вычисление интегралов

Задача 1 Вычислить интеграл $\int_0^1 (x-1)\,dx$.

▶ Одной из первообразных функции $x-1$ является функция $\frac{x^2}{2}-x$. Поэтому $\int_0^1 (x-1)\,dx = \left(\frac{1^2}{2}-1\right)-\left(\frac{0^2}{2}-0\right)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$. ◁

При вычислении интегралов удобно ввести следующее обозначение:

$$F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b.$$

Тогда формулу Ньютона — Лейбница можно записать в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Задача 2 Вычислить интеграл $\int_{-a}^{a} \sin x\,dx$.

▶ $\int_{-a}^{a} \sin x\,dx = (-\cos x)\Big|_{-a}^{a} = (-\cos a)-(-\cos(-a)) =$
$= -\cos a + \cos(-a) = 0$, так как $\cos(-a)=\cos a$. ◁

Задача 3 Вычислить интеграл $\int_{-1}^{3} \frac{1}{\sqrt{2x+3}}\,dx$.

▶ $\int_{-1}^{3} \frac{1}{\sqrt{2x+3}}\,dx = \int_{-1}^{3} (2x+3)^{-\frac{1}{2}}\,dx = (2x+3)^{\frac{1}{2}}\Big|_{-1}^{3} =$
$= (2\cdot 3+3)^{\frac{1}{2}} - (2\cdot(-1)+3)^{\frac{1}{2}} = 3-1=2$. ◁

Задача 4 Вычислить интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) dx$.

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) dx = \frac{1}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}. \lhd$$

Задача 5 Вычислить интеграл $\int\limits_0^3 x\sqrt{x+1}\, dx$.

$$\int\limits_0^3 x\sqrt{x+1}\, dx = \int\limits_0^3 (x+1-1)\sqrt{x+1}\, dx =$$

$$= \int\limits_0^3 \left((x+1)^{\frac{3}{2}} - (x+1)^{\frac{1}{2}}\right) dx = \left(\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= \left(\frac{2}{5}\cdot 32 - \frac{2}{3}\cdot 8\right) - \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right) = 7\,\frac{11}{15}. \lhd$$

Практическая часть.

Вычислить интеграл

1004 1) $\int_0^1 x\,dx$; 2) $\int_0^3 x^2 dx$; 3) $\int_{-1}^2 3x^2 dx$; 4) $\int_{-2}^3 2x\,dx$;

5) $\int_2^3 \frac{1}{x^2} dx$; 6) $\int_1^2 \frac{1}{x^3} dx$; 7) $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$; 8) $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

1005 1) $\int_1^e \frac{1}{x} dx$; 2) $\int_0^{\ln 2} e^x dx$; 3) $\int_{-\pi}^{2\pi} \cos x\,dx$;

4) $\int_{-2\pi}^{\pi} \sin x\,dx$; 5) $\int_{-2\pi}^{\pi} \sin 2x\,dx$; 6) $\int_{-3\pi}^{0} \cos 3x\,dx$.