Алгоритмы и анализ сложности

Простые алгоритмы поиска и сортировки

Задача и результаты поиска в массиве

Задача поиска:

Задан массив **A** из **n** элементов и некоторое значение **p** (поисковое). Требуется найти такой номер **i**, что **A[i]=p**.

Возможные результаты поиска:

- существует единственный элемент с номером **i**, для которого **A[i]=p**
- **A[i]≠p** при любых **i=0,1,…,n-1**
- существует несколько элементов с номерами **i1,i2,…** таких, что **A[i1]=p,A[i2]=p,…**

Поиск одного элемента в неупорядоченном массиве

```
int find_int(int *A, int n, int p)
{
   for (int i = 0; i < n; i++)
      if (A[i] == p) return i;
   return -1;
}
int find_double(double *A, int n, double p,
        double eps)
{
   for (int i = 0; i < n; i++)
      if (abs(A[i]-p) < eps) return i;
   return -1;
}
```

Трудоемкость в наилучшем: $T(n) = O(1)$

Трудоемкость в наихудшем: $T(n) = O(n)$

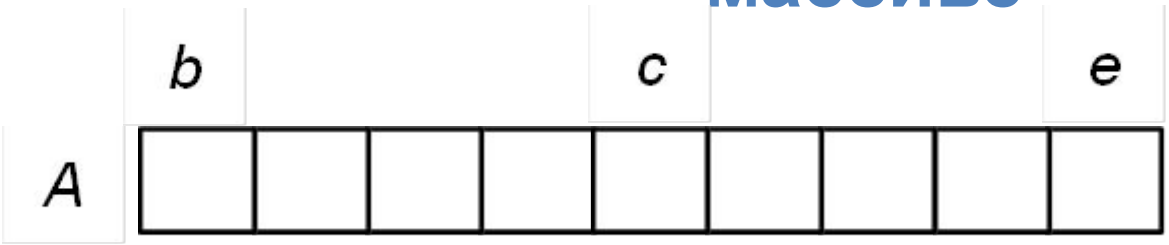
Простой поиск одного элемента в упорядоченном массиве

```
int find_sort_int(int *A, int n, int p)
{
  for (int i = 0; i < n && a[i] <= p; i++)
     if (A[i] == p) return i;
  return -1;
}
```

Трудоемкость в наилучшем: $T(n) = O(1)$

Трудоемкость в наихудшем: $T(n) = O(n)$

Дихотомический поиск в упорядоченном массиве



На каждом шаге алгоритма выделяется **область поиска**:

A[b],A[b+1], …,A[e]

(начальные границы области: **b = 0, e = n-1**).

Поисковое значение **p** сравнивается с элементом **A[c]**, где **c = (b+e)/2**. Возможны два исхода:

- **A[c] < p**, искомый элемент среди **A[c+1],…,A[e]**, новая нижняя граница области поиска **b = c+1**
- **A[c] ≥ p**, искомый элемент среди **A[b],…,A[c]** , новая верхняя граница области поиска **e = c**

Поиск продолжается, пока **e > b**.

Алгоритм дихотомического поиска

```
int bin_search_first(int *A, int n, int p)
{
  int b = 0, e = n-1, c;
  while (b < e)
  {
    c = (b + e) / 2;
    if (A[c] < p) b = c+1;
    else e = c;
  }
  if (A[b] == p) return b;
  return -1;
}
```

Алгоритм дихотомического поиска

```
int bin_search_last(int *A, int n, int p)
{
  int b = 0, e = n-1, c;
  while (b < e)
  {
    c = (b + e + 1) / 2;
    if (A[c] <= p) b = c;
    else e = c-1;
  }
  if (A[b] == p) return b;
  return -1;
}
```

Трудоемкость алгоритма

Пусть $2^{m-1} < k \le 2^m$, (*)

где k – размер области поиска.

Вначале $k = n$.

При четном k размеры области уменьшаются ровно в два раза, а при нечетном – в два с округлением, неравенство (*) сохраняется.

После $m = \lceil \log_2 n \rceil$ шагов: $k = 1$.

Общее количество сравнений C в наихудшем случае: $C = \lceil \log_2 n \rceil + 1 = O(\log_2 n)$

Рекурсивная функция поиска

```
int bin_search_rec(int *A, int p,
     int b, int e)
{
   int c;
   if (b == e)
     if (A[b] == p) return b;
     else return -1;
   else
   {
     c = (b + e) / 2;
     if (A[c] < p)
        return bin_search_rec(A,p,c+1,e);
     else
        return bin_search_rec(A,p,b,c);
   }
}
```

Вызов рекурсивной функции поиска

Функция bin_search_rec должна получать в качестве параметров не длину массива, а номера начального и конечного элемента области поиска. Для удобства пользователя можно создать функцию-«обертку», которая будет только вызывать bin_search_rec :

```
int bin_search(int *A, int n, int p)
{
   return bin_search_rec(A, p, 0, n-1);
}
```

Пользователь будет вызывать функцию bin_search, не зная деталей реализации поиска.

Задача сортировки элементов массива

Задача сортировки (упорядочения) массива по возрастанию:

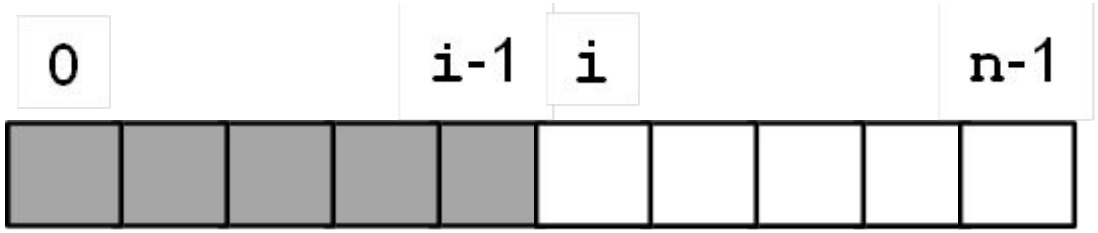
Задан произвольный массив **A** из **n** элементов. Требуется переставить его элементы таким образом, чтобы условие **A[i]<=A[i+1]** выполнялось для всех **i=0,…,n-2**.

При сортировке по убыванию меняется условие:

A[i]>=A[i+1] для всех **i=0,…,n-2**.

Набор значений в массиве **A** должен оставаться неизменным.

Алгоритм обменной сортировки




```
void exchange_sort(double *A, int n)
{
   int i, j; double z;
   for (i = 1; i < n; i++)
      for (j=i-1; j>=0 && A[j]>A[j+1];j--)
      {
         z=A[j]; A[j]=A[j+1]; A[j+1]=z;
         // или swap(A[j], A[j+1]);
      }
}
```

Алгоритм сортировки вставками

Данный алгоритм очень похож на предыдущий. Разница заключается в замене обмена элементов сдвигом:

- значение **z=A[i]** запоминается
- **A[j]>z, j<i**, сдвигаются на одну позицию вправо
- **z** ставится на свое место в последовательности

```
void insert_sort(double *A, int n)
{
  int i, j; double z;
  for (i = 1; i < n; i++)
  { z = A[i];
    for (j=i-1; j>=0 && A[j]>z; j--)
      A[j+1] = A[j];
    A[j+1] = z;
  }
}
```

Трудоемкость алгоритмов обменной сортировки и сортировки вставками

Общее количество выполнений внутреннего цикла в наихудшем случае:

$$1 + 2 + \ldots + (n - 1) = n \cdot (n - 1)/2,$$

Трудоемкость в наихудшем $O(n^2)$.

Если массив **уже упорядочен**, то внутренний цикл ни разу не будет исполняться, и тогда трудоемкость обоих алгоритмов (трудоемкость **в наилучшем**) будет иметь порядок $O(n)$.

Алгоритм сортировки выбором

Среди **m** начальных элементов массива ищем максимальный и **меняем его местами** с последним (**m-1**). Выполняем эти действия для всех **m=n**…**2**.

```
void select_sort(double *A, int n)
{
  int i, m, nmax; double z;
  for (m = n; m > 1; m--)
  {
    for (nmax = 0, i = 1; i < m; i++)
      if (A[nmax] < A[i]) nmax = i;
    z=A[nmax]; A[nmax]=A[m-1]; A[m-1]=z;
  }
}
```

Трудоемкость алгоритма сортировки выбором

Внутренний цикл выполняется m-1 раз, а m уменьшается во внешнем цикле от n до 2.

Общее количество элементарных шагов:

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+1 = n\cdot(n-1)/2 \approx n^2/2.$$

Трудоемкость алгоритма и в наилучшем, и в наихудшем составляет $O(n^2)$.

Алгоритм пузырьковой сортировки

Для **m** начальных элементов массива проводим сравнение всех пар соседних элементов **A[i]** и **A[i+1]**, **i=0…m-2**, и меняем их местами, если **A[i]>A[i+1]**. В результате максимальный элемент встает на последнее место (**m-1**). Повторяем эти действия для всех **m=n…2**.

```
void bubble_sort(double *A, int n)
{
  int i, m;
  for (m = n; m > 1; m--)
    for (i = 0; i < m-1; i++)
      if (A[i] > A[i+1])
        swap(A[i], A[i+1]);
}
```

Улучшенный алгоритм пузырька

Алгоритм сортировки пузырьком можно улучшить. Если во внутреннем цикле не производится ни одного обмена, то массив уже отсортирован. Для отметки этого используем **флаг** – переменную **sorted**.

```
void bubble_sort_2(double *A, int n)
{
  int i, m; bool sorted = false;
  for (m = n; m > 1 && !sorted; m--)
    for (sorted=true, i = 0; i < m-1; i++)
      if (A[i] > A[i+1])
      { swap(A[i], A[i+1]); sorted=false; }
}
```

Косвенная упорядоченность в массиве

При косвенной сортировке исходный массив **A** не изменяется. Вместо этого формируется такой массив **Ind** из **n** индексов элементов **A**, что выполняется:

A[Ind[0]] ≤ A[Ind[1]] ≤ ... ≤ A[Ind[n-1]]

т.е. **Ind[i]** хранит номер элемента, который в упорядоченном массиве **A** стоял бы на **i**-м месте.

Модификация алгоритма сортировки для косвенной упорядоченности:

1) перед началом сортировки элементам **Ind** присваиваются начальные значения:

   Ind[0]=0, Ind[1]=1, …, Ind[n-1]=n-1

2) везде, где элемент массива **A[j]** используется в операции сравнения, заменить **A[j]** на **A[Ind[j]]**
3) везде, где элемент массива **A[j]** используется в присваивании, заменить **A[j]** на **Ind[j]**.

Косвенная сортировка алгоритмом пузырька

При косвенной сортировке необходимо сформировать целочисленный индексный массив **`Ind`** длины n.

Вариант 1: уже существующий массив **`Ind`** передается в функцию

```
void bubble_sort(double *A, int *Ind,int n)
{
  int i, m;
  for (i = 0; i < n; i++) Ind[i] = i;
  for (m = n; m > 1; m--)
    for (i = 0; i < m-1; i++)
      if (A[Ind[i]] > A[Ind[i+1]])
        swap(Ind[i], Ind[i+1]);
}
```

Косвенная сортировка алгоритмом пузырька

Вариант 2: динамический индексный массив **`Ind`** создается и формируется в функции, функция возвращает его адрес (указатель)

```
int* bubble_sort(double *A, int n)
{
  int i, m, *Ind;
  Ind = new int [n];
  for (i = 0; i < n; i++) Ind[i] = i;
  for (m = n; m > 1; m--)
    for (i = 0; i < m-1; i++)
      if (A[Ind[i]] > A[Ind[i+1]])
        swap(Ind[i], Ind[i+1]);
  return Ind;
}
```

Дихотомический поиск в косвенно упорядоченном массиве

```
int bin_search_first(int *A, int *Ind,
                     int n, int p)
{
  int b = 0, e = n-1, c;
  while (b < e)
  {
    c = (b + e) / 2;
    if (A[Ind[c]] < p) b = c+1;
    else e = c;
  }
  if (A[Ind[b]] == p) return b;
  return -1;
}
```

Слияние двух упорядоченных массивов

```
void merge(double *A, int n, double *B,
           int m, double *C)
{
  int i=0, j=0, k=0;
  while (i < n && j < m)
    if (A[i] <= B[j]) C[k++] = A[i++];
    else C[k++] = B[j++];
  while (i < n) C[k++] = A[i++];
  while (j < m) C[k++] = B[j++];
}
```

На каждом шаге трех циклов в C переносится один элемент, поэтому трудоемкость составляет $O(n+m)$

Слияние двух массивов: вариант 2

```
void merge(double *A, int n, double *B,
           int m, double *C)
{
  int i=0, j=0, k=0;
  while (i < n || j < m)
    if (j >= m) C[k++] = A[i++];
    else if (i >= n) C[k++] = B[j++];
    else if (A[i] <= B[j]) C[k++]=A[i++];
    else C[k++] = B[j++];
}
```

Рекурсивный алгоритм сортировки слиянием

При каждом вызове рекурсивной функции параметры задают границы текущей области сортировки: **b** – номер начального элемента, **e** – номер конечного. При первом вызове **b=0, e=n-1** (для массива длины **n**)

Идея алгоритма (исходный массив **A**, рабочий – **D**):

- вычисляется **c=(b+e)/2** – центральный элемент области сортировки
- элементы **A[b…c]** сортируются рекурсивно
- элементы **A[c+1…e]** сортируются рекурсивно
- серии **A[b…c]** и **A[c+1…e]** сливаются в **D[b…e]**
- элементы **D[b…e]** копируются назад в **A[b…e]**

Рекурсивный алгоритм сортировки слиянием

```
void merge_rec(double *A, int b, int e,
       double *D)
{
  int c = (b + e) / 2;
  if (b < c) merge_rec(A, b, c, D);
  if (c+1 < e) merge_rec(A, c+1, e, D);
  merge_series(A, b, c, e, D); // слияние серий
  for (int i = b; i <= e; i++)
    A[i] = D[i];
}
```

Слияние серий в сортировке слиянием

```
int i = b, j = c+1, k;
for (k = b; k <= e; k++)
  if (j > e) D[k] = A[i++];
  else if (i > c) D[k] = A[j++];
  else if (A[i] <= A[j]) D[k]=A[i++];
  else D[k] = A[j++];
```

Вызов рекурсивной функции

Функция-обертка для рекурсивной функции **merge_rec** выделяет и освобождает память для динамического рабочего массива и вызывает **merge_rec**:

```
void merge_sort(double *A, int n)
{
  double *D = new double[n];
  merge_rec(A, 0, n-1, D);
  delete [] D;
}
```

Глубина рекурсии и трудоемкость

Пусть размер n упорядочиваемого массива

$$2^{m-1} < n \le 2^m,$$

тогда не более чем за m последовательных делений размер фрагмента массива станет равным 1, поэтому **глубина рекурсии** также не превысит $m = \lceil \log_2 n \rceil$

Рекуррентное соотношение для трудоемкости $T(n)$:

$$\begin{cases} T(1) = 1, \\ T(n) = 2T(n/2) + cn, \quad n = 2, 3, \ldots, \end{cases}$$

где c – константа.

Полагая $2^{m-1} < n \le 2^m$, получим:

$$T(n) = 2\,T(n/2) + cn =$$

$$= 2^2\,T(n/4) + cn + cn = \ldots \le cnm = cn\lceil \log_2 n \rceil = O(n \log_2 n)$$