

# Частные производные высших порядков

Частные производные  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\frac{\partial u}{\partial y}$  функции  $u = u(x; y)$  называются *частными производными первого порядка*. Эти функции могут иметь частные производные, которые называются *частными производными второго порядка*.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u''_{xx};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u''_{xy};$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = u''_{yx};$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u''_{yy}.$$

Аналогично определяются частные производные третьего порядка и т.д.

Пример.  $u = x^4 + 2x^3y + 4y - 3$ ;

$$u'_x = 4x^3 + 6x^2y \quad \left[ \begin{array}{l} u''_{xx} = 12x^2 + 12xy \\ u''_{xy} = 6x^2 \end{array} \right.$$

$$u'_y = 2x^3 + 4 \quad \left[ \begin{array}{l} u''_{yx} = 6x^2 \\ u''_{yy} = 0 \end{array} \right.$$

## Частные производные высших порядков

**Теорема (Шварца).** Если функция  $u = u(x; y)$  в точке  $M(x; y)$  имеет непрерывные частные производные второго порядка, то  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ .

Доказательство.

$$] W = (u(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - u(x_0 + \Delta x; y_0)) - (u(x_0; y_0 + \Delta y) - u(x_0; y_0));$$

Обозначим  $\varphi(x) = u(x; y_0 + \Delta y) - u(x; y_0)$ ;

$$\text{тогда } W = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0 + \theta_1 \Delta x) \cdot \Delta x =$$

$$= \{u'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x; y_0 + \Delta y) - u'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x; y_0)\} \cdot \Delta x =$$

$$= u''_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x; y_0 + \theta_2 \Delta y) \Delta x \Delta y;$$

а если  $\psi(y) = u(x_0 + \Delta x; y) - u(x_0; y)$ ;

$$\text{То } W = \psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0) = \psi'(y_0 + \theta_3 \Delta y) \Delta y =$$

$$= \{u'_y(x_0 + \Delta x; y_0 + \theta_3 \Delta y) - u'_y(x_0; y_0 + \theta_3 \Delta y)\} \cdot \Delta y =$$

$$= u''_{yx}(x_0 + \theta_4 \Delta x; y_0 + \theta_3 \Delta y) \Delta x \Delta y;$$

Следовательно  $u''_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x; y_0 + \theta_2 \Delta y) = u''_{yx}(x_0 + \theta_4 \Delta x; y_0 + \theta_3 \Delta y)$ ;

В пределе получим  $u''_{xy}(x_0; y_0) = u''_{yx}(x_0; y_0)$ .

# Дифференциалы высших порядков

Пусть функция  $u = u(x; y)$  имеет непрерывные производные, тогда

$du = u'_x(x; y)dx + u'_y(x; y)dy$ -первый ее дифференциал;

Второй дифференциал:

$$\begin{aligned}d(du) &= d^2u = d(u'_x dx + u'_y dy) = \\&= (u'_x dx + u'_y dy)'_x dx + (u'_x dx + u'_y dy)'_y dy = u''_{xx} dx^2 + u''_{yx} dy dx + \\&+ u''_{xy} dx dy + u''_{yy} dy^2;\end{aligned}$$

$$\boxed{d^2u = u''_{xx} dx^2 + 2u''_{xy} dx dy + u''_{yy} dy^2}$$

Третий дифференциал  $d^3u = d(d^2u)$  и т.д.

$$\boxed{d^n u = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n \cdot u}$$

$$d^3u = u'''_{xxx} dx^3 + 3u'''_{x^2y} dx^2 dy + 3u'''_{xy^2} dx dy^2 + u'''_{y^3} dy^3;$$

Пример.  $u = x^4 + 2x^3y + 4y - 3$ ;

$$d^2u = (12x^2 + 12xy)dx^2 + 12x^2 dx dy.$$

# Производная сложной функции

1) Пусть  $z = f(x; y)$ , где  $x = x(t)$ ,  $y = y(t) \Rightarrow z = f(x(t); y(t))$  – сложная функция.  $x$  и  $y$  – промежуточные переменные.

**Теорема.** Если  $z = f(x; y)$  дифференцируема в некоторой области  $D$ ,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  так же являются дифференцируемыми функциями, то сложная функция  $z = f(x(t); y(t))$  является дифференцируемой и ее производная

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}}$$

Доказательство. Т.к. все функции дифференцируемы, то

$$\Delta z = f'_x \cdot \Delta x + f'_y \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y;$$

$$\begin{aligned} z' &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f'_x \cdot \Delta x + f'_y \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( f'_x \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) = f'_x x'_t + f'_y y'_t. \end{aligned}$$

## Производная сложной функции

2) Пусть  $z = f(x; y)$ , где  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ .

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dt}$$

Пример.  $z = x^2 + y - \sqrt{t}$ ,  $x = \sin t$ ,  $y = \ln t$ .  $\frac{dz}{dt} = ?$

$$\frac{dz}{dt} = 2x \cdot \cos t + 1 \cdot \frac{1}{t} + \left(-\frac{1}{2\sqrt{t}}\right) = 2\sin t \cos t + \frac{1}{t} - \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

3) Пусть  $z = f(x; y)$ , где  $x = x(u; v)$ ,  $y = y(u; v)$ .

Тогда  $z = f(x(u; v); y(u; v))$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

# Дифференцирование неявной функции

Говорят что функция  $z = f(x; y)$  задана неявно уравнением  $F(x; y; z) = 0$ , если для каждой пары значений  $(x; y)$  однозначно определяется значение  $z$ , такое, что  $(x; y; z)$  удовлетворяют уравнению  $F(x; y; z) = 0$ .

**Теорема.** Равенство  $F(x; y; z) = 0$  определяет в некоторой окрестности точки  $M(x_0; y_0; z_0)$  функцию  $z = f(x; y)$ , заданную неявно, если существуют непрерывные  $F'_x, F'_y, F'_z$  в точке  $M(x_0; y_0; z_0)$ , причем  $F'_z \neq 0$  в окрестности точки  $M(x_0; y_0; z_0)$ . Причем

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}; \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

Доказательство.  $F(x; y; f(x; y)) = 0$

$$F'_x + F'_z \cdot z'_x = 0 \quad \Rightarrow \quad z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}$$

$$F'_y + F'_z \cdot z'_y = 0 \quad \Rightarrow \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

# Дифференцирование неявной функции

**Следствие.** Равенство  $F(x; y) = 0$  определяет в некоторой окрестности точки  $M(x_0; y_0)$  функцию  $y = f(x)$ , заданную неявно, если существуют непрерывные  $F'_x, F'_y$  в точке  $M(x_0; y_0)$ , причем  $F'_y \neq 0$  в окрестности точки  $M(x_0; y_0)$ . Причем

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

Пример.  $e^z + z - x^2y + 1 = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = ? \quad \frac{\partial z}{\partial y} = ?$

$$F(x; y; z) = e^z + z - x^2y + 1$$

$$F'_x = -2xy; \quad F'_y = -x^2; \quad F'_z = e^z + 1.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy}{e^z + 1}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{e^z + 1}.$$

# Касательная плоскость и нормаль к поверхности

1) Уравнением  $z = f(x; y)$  задается поверхность  $S$ .

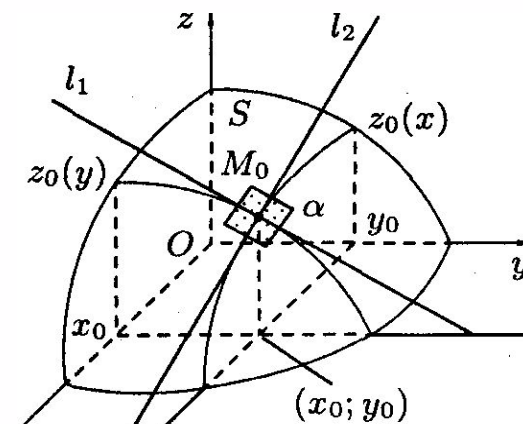
Рассмотрим сечение этой поверхности

с плоскостями  $x = x_0$ :

$$z = f(x_0; y) = \varphi(y) \Rightarrow z - z_0 = \varphi'(y_0)(y - y_0)$$

с плоскостями  $y = y_0$ :

$$z = f(x; y_0) = \psi(x) \Rightarrow z - z_0 = \psi'(x_0)(x - x_0)$$



Уравнения касательных

$$l_1: z - z_0 = f'_y(x_0; y_0)(y - y_0)$$

$$l_2: z - z_0 = f'_x(x_0; y_0)(x - x_0)$$

Плоскость, проходящая через указанные касательные называется *касательной плоскостью* к поверхности.

Уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(x_0; y_0; z_0)$ :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad | : (-C)$$

$$A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) = (z - z_0)$$

С учетом того, что при  $x = x_0$  должна получиться касательная  $l_1$ , получаем

$$B_1 = f'_y(x_0; y_0)$$



# Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Аналогично  $A_1 = f'_x(x_0; y_0)$ ,

тогда уравнение касательной плоскости примет вид:

$$f'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

Прямая, перпендикулярная касательной плоскости, называется *нормалью*.

$n(f'_x(x_0; y_0); f'_y(x_0; y_0); -1)$  - направляющий вектор нормали

Уравнение нормали к поверхности

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

2) В случае неявного задания поверхности уравнением  $F(x; y; z) = 0$

Т.к.  $z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}$ ;  $z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} \Rightarrow -\frac{F'_x}{F'_z}(x - x_0) - \frac{F'_y}{F'_z}(y - y_0) - (z - z_0) = 0$

$\Rightarrow$  Уравнение касательной плоскости

$$F'_x(x - x_0) + F'_y(y - y_0) + F'_z(z - z_0) = 0$$

$\Rightarrow$  Уравнение нормали  $\frac{x - x_0}{F'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0; y_0)}$

## Производная по направлению

Пусть  $u = f(x; y; z)$ ,  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  - точка из области определения функции;  $\vec{l}$  - произвольный вектор  $|\vec{l}| = d$ , а точка  $M$ :  $\overline{M_0M} = \vec{l}$ .

Если существует  $\lim_{d \rightarrow 0} \frac{u(M) - u(M_0)}{d} = \frac{\partial u}{\partial l}$ , то он называется *производной* функции  $u = f(x; y; z)$  в точке  $M_0$  по направлению вектора  $\vec{l}$ .

Если  $\alpha, \beta, \gamma$  - углы, которые образует вектор  $\vec{l}$  с осями координат, то  $\vec{l} = (d \cos \alpha; d \cos \beta; d \cos \gamma) \Rightarrow M(x_0 + d \cos \alpha; y_0 + d \cos \beta; z_0 + d \cos \gamma)$

$u(M) - u(M_0) = f(x_0 + d \cos \alpha; y_0 + d \cos \beta; z_0 + d \cos \gamma) - f(x_0; y_0; z_0) = \varphi(d) - \varphi(0)$ , где  $\varphi(d) = f(x_0 + d \cos \alpha; y_0 + d \cos \beta; z_0 + d \cos \gamma)$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{u(M) - u(M_0)}{d} = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\varphi(d) - \varphi(0)}{d} = \varphi'(0);$$

$$\begin{aligned} \varphi'(d) = & f'_x(x_0 + d \cos \alpha; y_0 + d \cos \beta; z_0 + d \cos \gamma) \cdot \cos \alpha + \\ & + f'_y(x_0 + d \cos \alpha; y_0 + d \cos \beta; z_0 + d \cos \gamma) \cdot \cos \beta + \\ & + f'_z(x_0 + d \cos \alpha; y_0 + d \cos \beta; z_0 + d \cos \gamma) \cdot \cos \gamma; \end{aligned}$$

## Производная по направлению

$$\varphi'(0) = f'_x(x_0; y_0; z_0)\cos \alpha + f'_y(x_0; y_0; z_0)\cos\beta + f'_z(x_0; y_0; z_0)\cos\gamma$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = f'_x(x_0; y_0; z_0)\cos \alpha + f'_y(x_0; y_0; z_0)\cos\beta + f'_z(x_0; y_0; z_0)\cos\gamma$$

Пример . Найти производную функции  $u = x^2 + \frac{y^3}{z}$  в точке  $M(1; 1; -1)$  по направлению вектора  $\vec{l} = (2; -2; 1)$ .

$$u'_x = 2x \Big|_{M_0} = 2; u'_y = \frac{3y^2}{z} \Big|_{M_0} = -3; u'_z = -\frac{y^3}{z^2} \Big|_{M_0} = -1;$$

$$|\vec{l}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3;$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{3}; \cos\beta = \frac{-2}{3}; \cos\gamma = \frac{1}{3};$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = 2 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{2}{3} - 1 \cdot \frac{1}{3} = 3.$$

# Производная по направлению

$\frac{\partial u}{\partial l}$  - скорость изменения значений функции в направлении вектора  $\vec{l}$ .

Если функция  $u = f(x; y; z)$ , то вектор  $(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial z})$  называется *градиентом* этой функции  $\overrightarrow{gradu} = \nabla u$ .

$\vec{e}_l = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$ -единичный вектор направления.

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial l} = \overrightarrow{gradu} \cdot \vec{e}_l}$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \overrightarrow{gradu} \cdot \vec{e}_l = |\overrightarrow{gradu}| \cos \varphi \Rightarrow$$

$\overrightarrow{gradu}$  - это направление **наибыстрейшего роста** значений функции  $u = f(x; y; z)$