

Частные производные высших порядков

Частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ функции $u = u(x; y)$ называются *частными производными первого порядка*. Эти функции могут иметь частные производные, которые называются *частными производными второго порядка*.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u''_{xx};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u''_{xy};$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = u''_{yx};$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u''_{yy}.$$

Аналогично определяются частные производные третьего порядка и т.д.

Пример. $u = x^4 + 2x^3y + 4y - 3$;

$$u'_x = 4x^3 + 6x^2y \quad \left[\begin{array}{l} u''_{xx} = 12x^2 + 12xy \\ u''_{xy} = 6x^2 \end{array} \right.$$

$$u'_y = 2x^3 + 4 \quad \left[\begin{array}{l} u''_{yx} = 6x^2 \\ u''_{yy} = 0 \end{array} \right.$$

Частные производные высших порядков

Теорема (Шварца). Если функция $u = u(x; y)$ в точке $M(x; y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка, то $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

Доказательство.

$$] W = (u(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - u(x_0 + \Delta x; y_0)) - (u(x_0; y_0 + \Delta y) - u(x_0; y_0));$$

Обозначим $\varphi(x) = u(x; y_0 + \Delta y) - u(x; y_0)$;

$$\text{тогда } W = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0 + \theta_1 \Delta x) \cdot \Delta x =$$

$$= \{u'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x; y_0 + \Delta y) - u'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x; y_0)\} \cdot \Delta x =$$

$$= u''_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x; y_0 + \theta_2 \Delta y) \Delta x \Delta y;$$

а если $\psi(y) = u(x_0 + \Delta x; y) - u(x_0; y)$;

$$\text{То } W = \psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0) = \psi'(y_0 + \theta_3 \Delta y) \Delta y =$$

$$= \{u'_y(x_0 + \Delta x; y_0 + \theta_3 \Delta y) - u'_y(x_0; y_0 + \theta_3 \Delta y)\} \cdot \Delta y =$$

$$= u''_{yx}(x_0 + \theta_4 \Delta x; y_0 + \theta_3 \Delta y) \Delta x \Delta y;$$

Следовательно $u''_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x; y_0 + \theta_2 \Delta y) = u''_{yx}(x_0 + \theta_4 \Delta x; y_0 + \theta_3 \Delta y)$;

В пределе получим $u''_{xy}(x_0; y_0) = u''_{yx}(x_0; y_0)$.

Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $u = u(x; y)$ имеет непрерывные производные, тогда

$du = u'_x(x; y)dx + u'_y(x; y)dy$ -первый ее дифференциал;

Второй дифференциал:

$$d(du) = d^2u = d(u'_x dx + u'_y dy) =$$

$$= (u'_x dx + u'_y dy)'_x dx + (u'_x dx + u'_y dy)'_y dy = u''_{xx} dx^2 + u''_{yx} dy dx + u''_{xy} dx dy + u''_{yy} dy^2;$$

$$\boxed{d^2u = u''_{xx} dx^2 + 2u''_{xy} dx dy + u''_{yy} dy^2}$$

Третий дифференциал $d^3u = d(d^2u)$ и т.д.

$$\boxed{d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n \cdot u}$$

$$d^3u = u'''_{xxx} dx^3 + 3u'''_{x^2y} dx^2 dy + 3u'''_{xy^2} dx dy^2 + u'''_{y^3} dy^3;$$

Пример. $u = x^4 + 2x^3y + 4y - 3$;

$$d^2u = (12x^2 + 12xy)dx^2 + 12x^2 dx dy.$$

Производная сложной функции

1) Пусть $z = f(x; y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t) \Rightarrow z = f(x(t); y(t))$ – сложная функция. x и y – промежуточные переменные.

Теорема. Если $z = f(x; y)$ дифференцируема в некоторой области D , $x = x(t)$, $y = y(t)$ так же являются дифференцируемыми функциями, то сложная функция $z = f(x(t); y(t))$ является дифференцируемой и ее производная

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}}$$

Доказательство. Т.к. все функции дифференцируемы, то

$$\Delta z = f'_x \cdot \Delta x + f'_y \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y;$$

$$\begin{aligned} z' &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f'_x \cdot \Delta x + f'_y \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(f'_x \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) = f'_x x'_t + f'_y y'_t. \end{aligned}$$

Производная сложной функции

2) Пусть $z = f(x; y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dt}$$

Пример. $z = x^2 + y - \sqrt{t}$, $x = \sin t$, $y = \ln t$. $\frac{dz}{dt} = ?$

$$\frac{dz}{dt} = 2x \cdot \cos t + 1 \cdot \frac{1}{t} + \left(-\frac{1}{2\sqrt{t}}\right) = 2\sin t \cos t + \frac{1}{t} - \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

3) Пусть $z = f(x; y)$, где $x = x(u; v)$, $y = y(u; v)$.

Тогда $z = f(x(u; v); y(u; v))$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

Дифференцирование неявной функции

Говорят что функция $z = f(x; y)$ задана неявно уравнением $F(x; y; z) = 0$, если для каждой пары значений $(x; y)$ однозначно определяется значение z , такое, что $(x; y; z)$ удовлетворяют уравнению $F(x; y; z) = 0$.

Теорема. Равенство $F(x; y; z) = 0$ определяет в некоторой окрестности точки $M(x_0; y_0; z_0)$ функцию $z = f(x; y)$, заданную неявно, если существуют непрерывные F'_x, F'_y, F'_z в точке $M(x_0; y_0; z_0)$, причем $F'_z \neq 0$ в окрестности точки $M(x_0; y_0; z_0)$. Причем

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}; \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

Доказательство. $F(x; y; f(x; y)) = 0$

$$F'_x + F'_z \cdot z'_x = 0 \quad \Rightarrow \quad z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}$$

$$F'_y + F'_z \cdot z'_y = 0 \quad \Rightarrow \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

Дифференцирование неявной функции

Следствие. Равенство $F(x; y) = 0$ определяет в некоторой окрестности точки $M(x_0; y_0)$ функцию $y = f(x)$, заданную неявно, если существуют непрерывные F'_x, F'_y в точке $M(x_0; y_0)$, причем $F'_y \neq 0$ в окрестности точки $M(x_0; y_0)$. Причем

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

Пример. $e^z + z - x^2y + 1 = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = ? \quad \frac{\partial z}{\partial y} = ?$

$$F(x; y; z) = e^z + z - x^2y + 1$$

$$F'_x = -2xy; \quad F'_y = -x^2; \quad F'_z = e^z + 1.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy}{e^z + 1}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{e^z + 1}.$$

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

1) Уравнением $z = f(x; y)$ задается поверхность S .

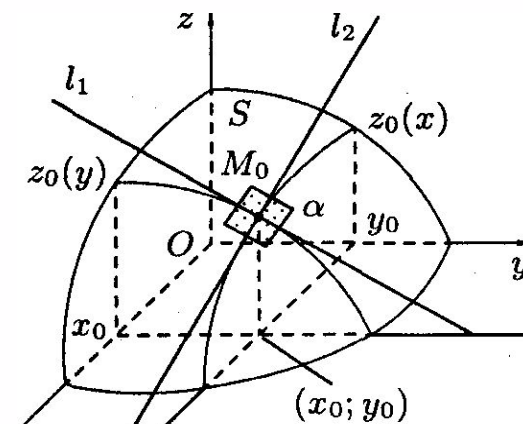
Рассмотрим сечение этой поверхности

с плоскостями $x = x_0$:

$$z = f(x_0; y) = \varphi(y) \Rightarrow z - z_0 = \varphi'(y_0)(y - y_0)$$

с плоскостями $y = y_0$:

$$z = f(x; y_0) = \psi(x) \Rightarrow z - z_0 = \psi'(x_0)(x - x_0)$$



Уравнения касательных

$$l_1: z - z_0 = f'_y(x_0; y_0)(y - y_0)$$

$$l_2: z - z_0 = f'_x(x_0; y_0)(x - x_0)$$

Плоскость, проходящая через указанные касательные называется *касательной плоскостью* к поверхности.

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad | : (-C)$$

$$A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) = (z - z_0)$$

С учетом того, что при $x = x_0$ должна получиться касательная l_1 , получаем

$$B_1 = f'_y(x_0; y_0)$$

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Аналогично $A_1 = f'_x(x_0; y_0)$,

тогда уравнение касательной плоскости примет вид:

$$f'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

Прямая, перпендикулярная касательной плоскости, называется *нормалью*.

$n(f'_x(x_0; y_0); f'_y(x_0; y_0); -1)$ - направляющий вектор нормали

Уравнение нормали к поверхности

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

2) В случае неявного задания поверхности уравнением $F(x; y; z) = 0$

Т.к. $z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}$; $z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$ $\Rightarrow -\frac{F'_x}{F'_z}(x - x_0) - \frac{F'_y}{F'_z}(y - y_0) - (z - z_0) = 0$

\Rightarrow Уравнение касательной плоскости

$$F'_x(x - x_0) + F'_y(y - y_0) + F'_z(z - z_0) = 0$$

\Rightarrow Уравнение нормали $\frac{x - x_0}{F'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0; y_0)}$

Производная по направлению

Пусть $u = f(x; y; z)$, $M_0(x_0; y_0; z_0)$ - точка из области определения функции ; \vec{l} -произвольный вектор $|\vec{l}| = d$, а точка M : $\overline{M_0M} = \vec{l}$.

Если существует $\lim_{d \rightarrow 0} \frac{u(M) - u(M_0)}{d} = \frac{\partial u}{\partial l}$, то он называется *производной* функции $u = f(x; y; z)$ в точке M_0 по направлению вектора \vec{l} .

Если α, β, γ - углы, которые образует вектор \vec{l} с осями координат, то $\vec{l} = (d \cos \alpha; d \cos \beta; d \cos \gamma) \Rightarrow M(x_0 + d \cos \alpha; y_0 + d \cos \beta; z_0 + d \cos \gamma)$

$u(M) - u(M_0) = f(x_0 + d \cos \alpha; y_0 + d \cos \beta; z_0 + d \cos \gamma) - f(x_0; y_0; z_0) = \varphi(d) - \varphi(0)$, где $\varphi(d) = f(x_0 + d \cos \alpha; y_0 + d \cos \beta; z_0 + d \cos \gamma)$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{u(M) - u(M_0)}{d} = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\varphi(d) - \varphi(0)}{d} = \varphi'(0);$$

$$\begin{aligned} \varphi'(d) = & f'_x(x_0 + d \cos \alpha; y_0 + d \cos \beta; z_0 + d \cos \gamma) \cdot \cos \alpha + \\ & + f'_y(x_0 + d \cos \alpha; y_0 + d \cos \beta; z_0 + d \cos \gamma) \cdot \cos \beta + \\ & + f'_z(x_0 + d \cos \alpha; y_0 + d \cos \beta; z_0 + d \cos \gamma) \cdot \cos \gamma; \end{aligned}$$

Производная по направлению

$$\varphi'(0) = f'_x(x_0; y_0; z_0) \cos \alpha + f'_y(x_0; y_0; z_0) \cos \beta + f'_z(x_0; y_0; z_0) \cos \gamma$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = f'_x(x_0; y_0; z_0) \cos \alpha + f'_y(x_0; y_0; z_0) \cos \beta + f'_z(x_0; y_0; z_0) \cos \gamma$$

Пример . Найти производную функции $u = x^2 + \frac{y^3}{z}$ в точке $M(1; 1; -1)$ по направлению вектора $\vec{l} = (2; -2; 1)$.

$$u'_x = 2x \Big|_{M_0} = 2; u'_y = \frac{3y^2}{z} \Big|_{M_0} = -3; u'_z = -\frac{y^3}{z^2} \Big|_{M_0} = -1;$$

$$|\vec{l}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3;$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{3}; \cos \beta = \frac{-2}{3}; \cos \gamma = \frac{1}{3};$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = 2 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{2}{3} - 1 \cdot \frac{1}{3} = 3.$$

Производная по направлению

$\frac{\partial u}{\partial l}$ - скорость изменения значений функции в направлении вектора \vec{l} .

Если функция $u = f(x; y; z)$, то вектор $(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial z})$ называется *градиентом* этой функции $\overrightarrow{gradu} = \nabla u$.

$\vec{e}_l = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$ -единичный вектор направления.

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial l} = \overrightarrow{gradu} \cdot \vec{e}_l}$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \overrightarrow{gradu} \cdot \vec{e}_l = |\overrightarrow{gradu}| \cos \varphi \Rightarrow$$

\overrightarrow{gradu} - это направление **наибыстрейшего роста** значений функции $u = f(x; y; z)$