Частные производные высших порядков

- Частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ функции $u = u(x; y)$ называются *частными производными первого порядка.* Эти функции могут иметь частные производные, которые называются *частными производными второго порядка.*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u''_{xx};$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u''_{xy};$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = u''_{yx};$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u''_{yy}.$$

Аналогично определяются частные производные третьего порядка и т.д.

Пример. $u = x^4 + 2x^3y + 4y - 3;$

$$u'_x = 4x^3 + 6x^2y \qquad \left[\begin{array}{l} u''_{xx} = 12x^2 + 12xy \\ \quad u''_{xy} = 6x^2 \end{array}\right.$$

$$u'_y = 2x^3 + 4 \qquad \left[\begin{array}{l} u''_{yx} = 6x^2 \\ \quad u''_{yy} = 0 \end{array}\right.$$

Частные производные высших порядков

- **Теорема (Шварца).** Если функция $u = u(x; y)$ в точке $M(x; y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка, то $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

Доказательство.

$] \; W = \big(u(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - u(x_0 + \Delta x; y_0)\big) - \big(u(x_0; y_0 + \Delta y) - u(x_0; y_0)\big);$

Обозначим $\varphi(x) = u(x; y_0 + \Delta y) - u(x; y_0);$

тогда $W = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0 + \theta_1 \Delta x) \cdot \Delta x =$

$= \{u'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x; y_0 + \Delta y) - u'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x; y_0)\} \cdot \Delta x =$
$= u''_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x; y_0 + \theta_2 \Delta y) \Delta x \Delta y;$

а если $\psi(y) = u(x_0 + \Delta x; y) - u(x_0; y);$

То $W = \psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0) = \psi'(y_0 + \theta_3 \Delta y) \Delta y =$

$= \big\{u'_y(x_0 + \Delta x; y_0 + \theta_3 \Delta y) - u'_y(x_0; y_0 + \theta_3 \Delta y)\big\} \cdot \Delta y =$
$= u''_{yx}(x_0 + \theta_4 \Delta x; y_0 + \theta_3 \Delta y) \Delta x \Delta y;$

Следовательно $u''_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x; y_0 + \theta_2 \Delta y) = u''_{yx}(x_0 + \theta_4 \Delta x; y_0 + \theta_3 \Delta y);$

В пределе получим $u''_{xy}(x_0; y_0) = u''_{yx}(x_0; y_0).$

Дифференциалы высших порядков

- Пусть функция $u = u(x; y)$ имеет непрерывные производные, тогда $du = u'_x(x; y)dx + u'_y(x; y)dy$-первый ее дифференциал;

Второй дифференциал:

$$d(du) = d^2u = d\left(u'_x dx + u'_y dy\right) =$$

$= (u'_x dx + u'_y dy)'_x dx + (u'_x dx + u'_y dy)'_y dy = u''_{xx} dx^2 + u''_{yx} dy dx + u''_{xy} dx dy + u''_{yy} dy^2;$

$$\boxed{\boldsymbol{d^2u = u''_{xx} dx^2 + 2u''_{xy} dx dy + u''_{yy} dy^2}}$$

Третий дифференциал $d^3u = d(d^2u)$ и т.д.

$$\boxed{\boldsymbol{d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n \cdot u}}$$

$d^3u = u'''_{xxx} dx^3 + 3u'''_{x^2y} dx^2 dy + 3u'''_{xy^2} dx dy^2 + u'''_{y^3} dy^3;$

Пример. $u = x^4 + 2x^3y + 4y - 3;$

$d^2u = (12x^2 + 12xy)dx^2 + 12x^2 dx dy.$

Производная сложной функции

1) Пусть $z = f(x; y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$ => $z = f(x(t); y(t))$ – *сложная* функция. x и y *-промежуточные переменные*.

Теорема. Если $z = f(x; y)$ дифференцируема в некоторой области D, $x = x(t)$, $y = y(t)$ так же являются дифференцируемыми функциями, то сложная функция $z = f(x(t); y(t))$ является дифференцируемой и ее производная

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}}$$

Доказательство. Т.к. все функции дифференцируемы, то

$\Delta z = f'_x \cdot \Delta x + f'_y \cdot \Delta y + \propto \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y;$

$$z' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f'_x \cdot \Delta x + f'_y \cdot \Delta y + \propto \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(f'_x \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \propto \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) = f'_x x'_t \cdot + f'_y \cdot y'_t.$$

Производная сложной функции

2) Пусть $z = f(x;y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$.

$$\frac{\mathbf{dz}}{\mathbf{dt}} = \frac{\boldsymbol{\partial z}}{\boldsymbol{\partial x}} \cdot \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}} + \frac{\boldsymbol{\partial z}}{\boldsymbol{\partial y}} \cdot \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dt}} + \frac{\boldsymbol{\partial z}}{\boldsymbol{\partial t}} \cdot \frac{\mathbf{dt}}{\mathbf{dt}}$$

Пример. $z = x^2 + y - \sqrt{t}$, $x = sint$, $y = lnt$. $\frac{dz}{dt} = ?$

$$\frac{dz}{dt} = 2x \cdot cost + 1 \cdot \frac{1}{t} + \left(-\frac{1}{2\sqrt{t}}\right) = 2sintcost + \frac{1}{t} - \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

3) Пусть $z = f(x;y)$, где $x = x(u;v)$, $y = y(u;v)$.

Тогда $z = f(x(u;v); y(u;v))$

$$\frac{\boldsymbol{\partial z}}{\boldsymbol{\partial u}} = \frac{\boldsymbol{\partial z}}{\boldsymbol{\partial x}} \cdot \frac{\boldsymbol{\partial x}}{\boldsymbol{\partial u}} + \frac{\boldsymbol{\partial z}}{\boldsymbol{\partial y}} \cdot \frac{\boldsymbol{\partial y}}{\boldsymbol{\partial u}}$$

$$\frac{\boldsymbol{\partial z}}{\boldsymbol{\partial v}} = \frac{\boldsymbol{\partial z}}{\boldsymbol{\partial x}} \cdot \frac{\boldsymbol{\partial x}}{\boldsymbol{\partial v}} + \frac{\boldsymbol{\partial z}}{\boldsymbol{\partial y}} \cdot \frac{\boldsymbol{\partial y}}{\boldsymbol{\partial v}}$$

Дифференцирование неявной функции

- Говорят что функция $z = f(x;y)$ задана неявно уравнением $F(x;y;z) = 0$, если для каждой пары значений $(x;y)$ однозначно определяется значение z, такое, что $(x;y;z)$ удовлетворяют уравнению $F(x;y;z) = 0$.

Теорема. Равенство $F(x;y;z) = 0$ определяет в некоторой окрестности точки $M\quad(x_0;y_0;z_0)$ функцию $z = f(x;y)$, заданную неявно, если существуют непрерывные $F'_x,\ F'_y, F'_z$ в точке $M\quad(x_0;y_0;z_0)$, причем $F'_z \neq 0$ в окрестности точки $M\quad(x_0;y_0;z_0)$. Причем

$$\boxed{\boldsymbol{z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z};\quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}}}$$

Доказательство. $F(x;y;f(x;y)) = 0$

$$F'_x + \ F'_z \cdot \ z'_x = 0 \qquad => \quad z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}$$

$$F'_y + \ F'_z \cdot \ z'_y = 0 \qquad => \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

Дифференцирование неявной функции

- **Следствие.** Равенство $F(x;y)=0$ определяет в некоторой окрестности точки $M\quad(x_0;y_0)$ функцию y= $f(x)$, заданную неявно, если существуют непрерывные $F'_x,\ F'_y$ в точке $M\quad(x_0;y_0)$, причем $F'_y\neq 0$ в окрестности точки $M\quad(x_0;y_0)$. Причем

$$\boxed{\boldsymbol{y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}}}$$

Пример. $e^z+z-x^2y+1=0;\qquad \frac{\partial z}{\partial x}=?\,\frac{\partial z}{\partial y}=?$

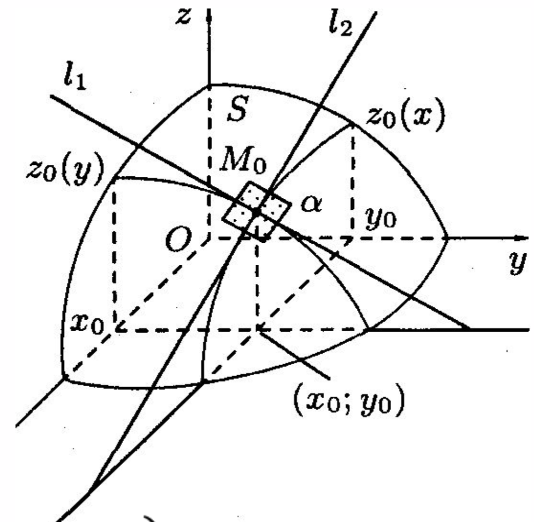
$$F(x;y;z)=e^z+z-x^2y+1$$

$$F'_x=-2xy;\qquad F'_y=-x^2;\quad F'_z=e^z+1.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2xy}{e^z+1};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2}{e^z+1}.$$

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

1) Уравнением $z = f(x; y)$ задается поверхность S.



Рассмотрим сечение этой поверхности

с плоскостями $x = x_0$:

$z = f(x_0; y) = \varphi(y) \quad => \quad z - z_0 = \varphi'(y_0)(y - y_0)$

с плоскостями $y = y_0$:

$z = f(x; y_0) = \psi(x) \quad => \quad z - z_0 = \psi'(x_0)(x - x_0)$

Уравнения касательных $\quad l_1: z - z_0 = f'_y(x_0; y_0)(y - y_0)$

$l_2: z - z_0 = f'_x(x_0; y_0)(x - x_0)$

Плоскость , проходящая через указанные касательные называется *касательной плоскостью* к поверхности.

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$:

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad |: (-C)$

$A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) = (z - z_0)$

С учетом того, что при $x = x_0$ должна получиться касательная l_1, получаем

$B_1 = f'_y(x_0; y_0)$

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Аналогично $A_1 = f'_x(x_0; y_0)$,

тогда уравнение касательной плоскости примет вид:

$$\boxed{\boldsymbol{f'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(y - y_0) \ - (z - z_0) = 0}}$$

Прямая, перпендикулярная касательной плоскости, называется *нормалью.*

$\vec{n}(f'_x(x_0; y_0); f'_y(x_0; y_0); -1)$- направляющий вектор нормали

Уравнение нормали к поверхности

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{x - x_0}{f'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}}}$$

2) В случае неявного задания поверхности уравнением $F(x; y; z) = 0$

Т.к. $\quad z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}; \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} \quad => -\frac{F'_x}{F'_z}(x - x_0) - \frac{F'_y}{F'_z}(y - y_0) \ - (z - z_0) = 0$

$\Rightarrow$ Уравнение касательной плоскости

$$\boxed{\boldsymbol{F'_x(x - x_0) + F'_y(y - y_0) \ + \ F'_z(z - z_0) = 0}}$$

$\Rightarrow$ Уравнение нормали $\boxed{\boldsymbol{\frac{x-x_0}{F'_x(x_0;y_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(x_0;y_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(x_0;y_0)}}}$

Производная по направлению

- Пусть $u = f(x;y;z)$, $M_0(x_0;y_0;z_0)$- точка из области определения функции ; $\vec{l}$ -произвольный вектор $|\vec{l}| = d$, а точка M: $\overrightarrow{M_0M} = \vec{l}$.

Если существует $\lim\limits_{d\to 0} \frac{u(\mathrm{M})-u(M_0)}{d} = \frac{\partial u}{\partial l}$, то он называется *производной функции* $u = f(x;y;z)$ в точке M_0 *по направлению* вектора $\vec{l}$.

Если $\propto, \beta, \gamma$ -углы, которые образует вектор $\vec{l}$ с осями координат, то
$\vec{l} = (d\cos\propto; d\cos\beta; d\cos\gamma) => M(x_0 + d\cos\propto; y_0 + d\cos\beta; z_0 + d\cos\gamma)$

$u(M) - u(M_0) = f(x_0 + d\cos\propto; y_0 + d\cos\beta; z_0 + d\cos\gamma) - f(x_0;y_0;z_0)=$
$= \varphi(d) - \varphi(0)$, *где* $\varphi(d) = f(x_0 + d\cos\propto; y_0 + d\cos\beta; z_0 + d\cos\gamma)$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{d\to 0} \frac{u(\mathrm{M})-u(M_0)}{d} = \lim_{d\to 0} \frac{\varphi(\mathrm{d})-\varphi(0)}{d} = \varphi'(0);$$

$$\varphi'(d) = f'_x(x_0 + d\cos\propto; y_0 + d\cos\beta; z_0 + d\cos\gamma) \cdot \cos\propto +$$
$$+f'_y(x_0 + d\cos\propto; y_0 + d\cos\beta; z_0 + d\cos\gamma) \cdot \cos\beta+$$
$$+ f'_z(x_0 + d\cos\propto; y_0 + d\cos\beta; z_0 + d\cos\gamma) \cdot \cos\gamma;$$

Производная по направлению

$$\varphi'(0) = f'_x(x_0; y_0; z_0)\cos\propto + f'_y(x_0; y_0; z_0)\cos\beta + f'_z(x_0; y_0; z_0)\cos\gamma$$

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial l} = f'_x(x_0; y_0; z_0)\cos\propto + f'_y(x_0; y_0; z_0)\cos\beta + f'_z(x_0; y_0; z_0)\cos\gamma}}$$

Пример . Найти производную функции $u = x^2 + \frac{y^3}{z}$ в точке $M(1; 1; -1)$ по направлению вектора $\vec{l} = (2; -2; 1)$.

$$u'_x = 2x\Big|_{M_0} = 2\,;\, u'_y = \frac{3y^2}{z}\Big|_{M_0} = -3\,;\, u'_z = -\frac{y^3}{z^2}\Big|_{M_0} = -1\,;$$

$$|\vec{l}| = \sqrt{4+4+1} = 3;$$

$$\cos\propto = \frac{2}{3};\;\; \cos\beta = \frac{-2}{3};\;\;\; \cos\gamma = \frac{1}{3};$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = 2\cdot\frac{2}{3} + 3\cdot\frac{2}{3} - 1\cdot\frac{1}{3} = 3.$$

Производная по направлению

$\frac{\partial u}{\partial l}$- скорость изменения значений функции в направлении вектора $\vec{l}$.

Если функция $u = f(x; y; z)$, то вектор $\left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ называется *градиентом* этой функции $\overrightarrow{gradu} = \nabla\vec{u}$.

$\overrightarrow{e_l} = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = (cos \propto; cos\beta; cos\gamma)$-единичный вектор направления.

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial l} = \overrightarrow{gradu} \cdot \overrightarrow{e_l}}}$$

$\frac{\partial u}{\partial l} = \overrightarrow{gradu} \cdot \overrightarrow{e_l} = |\overrightarrow{gradu}|cos\varphi \;\; =>$

$\overrightarrow{gradu}$ - это направление **наибыстрейшего роста** значений функции $u = f(x; y; z)$