~~Е~~

Н

~~А~~

Ая

Производн
ая

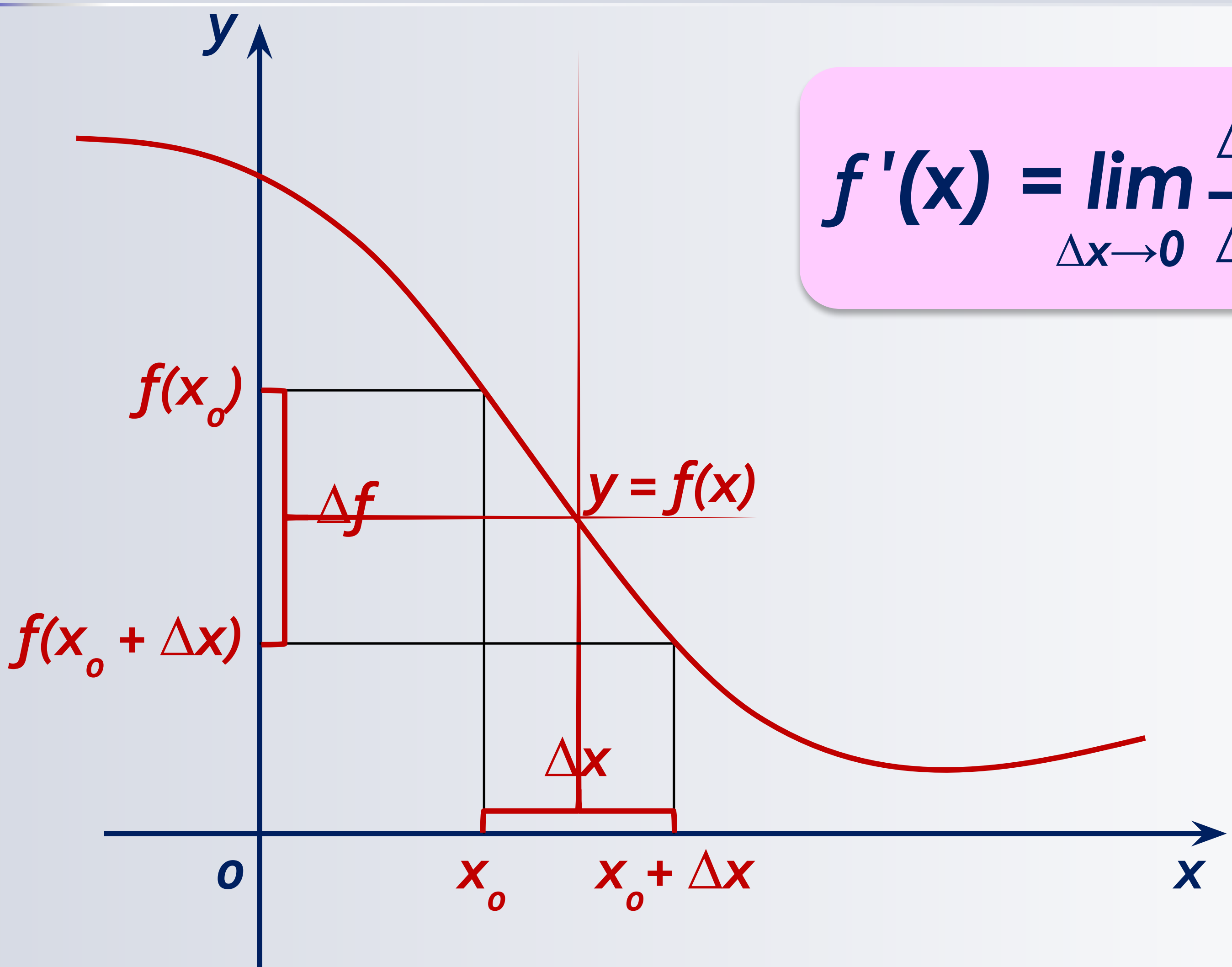
Понятие производной

Производной функции $y = f(x)$, заданной на некотором интервале $(a; b)$, в некоторой точке x этого интервала называют предел отношения приращения функции в этой точке к соответствующему приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Нахождение производной называют дифференцированием

Понятие производной



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Алгоритм нахождения производной

1. *Зафиксировать значение* x_o, *найти* $f(x_o)$.
2. *Дать аргументу* x_o *приращение* Δx, *перейти в новую точку* $x_o + \Delta x$, *найти* $f(x_o + \Delta x)$.
3. *Найти приращение функции:* $\Delta f = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$.
4. *Составить отношение* $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.
5. *Вычислить* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.
6. *Этот предел и есть* $f'(x_o)$.

Примеры

1. Найти производную функции $y = kx + b$ ***в точке*** x_o

1. $f(x_o) = kx_o + b$
2. $f(x_o + \Delta x) = k(x_o + \Delta x) + b$
3. $\Delta f = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) = k(x_o + \Delta x) + b - (kx_o + b) =$
   $= kx_o + k \cdot \Delta x + b - kx_o - b = k \cdot \Delta x$
4. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{k \cdot \Delta x}{\Delta x} = k$
5. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(k) = k$

$$(kx + b)' = k$$

Примеры

2. Найти производную функции y = C (C – const) в точке x_o

1. $f(x_o) = C$

2. $f(x_o + \Delta x) = C$

3. $\Delta f = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) = C - C = 0$

4. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$

5. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$

$$(C)' = 0$$

Примеры

3. Найти производную функции $y = x^2$ в точке x_o

1. $f(x_o) = (x_o)^2$
2. $f(x_o + \Delta x) = (x_o + \Delta x)^2$
3. $\Delta f = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) = (x_o + \Delta x)^2 - (x_o)^2 =$

   $= x_o^2 + 2x_o \cdot \Delta x + \Delta x^2 - x_o^2 = 2x_o \cdot \Delta x + \Delta x^2$
4. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{2x_o \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x(2x_o + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_o + \Delta x$
5. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(2x_o + \Delta x) = 2x_o$

$$\boxed{(x^2)' = 2x}$$

Примеры

4. Найти производную функции $y = \sqrt{x}$ *в точке* x_o

1. $f(x_o) = \sqrt{x_o}$
2. $f(x_o + \Delta x) = \sqrt{x_o + \Delta x}$
3. $\Delta f = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) = \sqrt{x_o + \Delta x} - \sqrt{x_o} =$

$$= \frac{\left(\sqrt{x_o + \Delta x} - \sqrt{x_o}\right)\left(\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}\right)}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}} = \frac{\left(\sqrt{x_o + \Delta x}\right)^2 - \left(\sqrt{x_o}\right)^2}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}} =$$

$$= \frac{x_o + \Delta x - x_o}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}}$$

4. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}}$

Примеры

4. Найти производную функции $y = \sqrt{x}$ *в точке* x_o

$$4.\ \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}}$$

$$5.\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x_o}}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Примеры

5. Найти производную функции $y = 1/x$ *в точке* x_o

$$1.\ f(x_o) = \frac{1}{x_o}$$

$$2.\ f(x_o + \Delta x) = \frac{1}{x_o + \Delta x}$$

$$3.\ \Delta f = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) = \frac{1}{x_o + \Delta x} - \frac{1}{x_o} =$$

$$= \frac{x_o - (x_o + \Delta x)}{x_o(x_o + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x_o^2 + x_o \cdot \Delta x}$$

$$4.\ \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x\left(x_o^2 + x_o \cdot \Delta x\right)} = \frac{-1}{x_o^2 + x_o \cdot \Delta x}$$

Примеры

5. Найти производную функции y = 1/x в точке x_o

4. $$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x\left(x_o^2 + x_o \cdot \Delta x\right)} = \frac{-1}{x_o^2 + x_o \cdot \Delta x}$$

5. $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{-1}{x_o^2 + x_o \cdot \Delta x}\right) = -\frac{1}{x_o^2}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$$

Правила нахождения производной

1. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в точке x производные, то их сумма $u(x) + v(x)$ также имеет в этой точке производную, причем*

$$(u + v)' = u' + v'$$

2. *Если функция $u(x)$ имеет в точке x производную и C – данное число, то функция $C \cdot u(x)$ также имеет в этой точке производную, причем*

$$(Cu)' = C \cdot u'$$

Правила нахождения производной

3. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в точке x производные, то их произведение $u(x) \cdot v(x)$ также имеет в этой точке производную, причем*

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

4. *Если функция $v(x)$ имеет в точке x производную и $v(x) \neq 0$, то функция $\frac{1}{v(x)}$ также имеет в этой точке производную, причем*

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

Правила нахождения производной

5. *Если функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *имеют в точке* x *производные и* $v(x) \neq 0$, *то функция* $\frac{u(x)}{v(x)}$ *также имеет в этой точке производную, причем*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Если функция имеет производную (дифференцируема) в точке x, то она непрерывна в этой точке.

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

$f(x)$	$f'(x)$
C (const)	0
kx+b	k
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

$f(x)$	$f'(x)$
C (const)	0
kx+b	k
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$

ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

$$(U+V)' = U' + V'$$

$$(UV)' = U'V + UV'$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$$

$$(CU)' = CU', C - const$$

№1.

Найдите производные функций:

$$а)\ f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$$

$$б)\ f(x) = x^2 \cdot (2x - 7)$$

$$в)\ f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 1}$$

$$г)\ f(x) = x^{-5}$$

$$д)\ f(x) = 3x^7 - \frac{5}{x^3}$$

$$a)\, f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)' = (x^2)' - \left(\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= 2x - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x + \frac{1}{x^2}$$

$$б)\, f(x) = x^2 \cdot (2x-7)$$

$$f'(x) = (x^2)' \cdot (2x-7) + (x^2) \cdot (2x-7)' =$$

$$= 2x \cdot (2x-7) + x^2 \cdot 2 = 4x^2 - 14x + 2x^2 =$$

$$= 6x^2 - 14x$$

$$в)\ f(x)=\frac{x^2}{x^3-1}$$

$$f'(x)=\frac{(x^2)'\cdot(x^3-1)-x^2\cdot(x^3-1)'}{(x^3-1)^2}=$$

$$=\frac{2x\cdot(x^3-1)-x^2\cdot 3x^2}{(x^3-1)^2}=\frac{2x^4-2x-3x^4}{(x^3-1)^2}=$$

$$=\frac{-x^4-2x}{(x^3-1)^2}$$

$$д)\ f(x) = 3x^7 - \frac{5}{x^3}$$

$$f'(x) = (3x^7 - \frac{5}{x^3})' = (3x^7)' - (5x^{-3})' =$$

$$= 3 \cdot 7x^6 - 5 \cdot (-3x^{-3-1}) = 21x^6 + 15x^{-4} =$$

$$= 21x^6 + \frac{15}{x^4}$$

Найдите производные функций

а) $f(x) = x^2 + x^3$;

б) $f(x) = \frac{1}{x} + 5x - 2$;

в) $f(x) = x^2 + 3x - 1$;

г) $f(x) = x^3 + \sqrt{x}$.

$$а)\, f(x) = x^2 + x^3$$

$$f(x) = (x^2)' + (x^3)' = 2x + 3x^2$$

$$б)\, f(x) = \frac{1}{x} + 5x - 2$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' + (5x)' - 2' = -\frac{1}{x^2} + 5$$

$$в)\ f(x) = x^2 + 3x - 1$$

$$f'(x) = 2x + 3$$

$$г)\ f(x) = x^3 + \sqrt{x}$$

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Найдите производные функций

а) $y = x^8 - 3x^4 - x + 5;$

г) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{x^3} + 1.$

$$a)\ f(x)=x^8-3x^4-x+5$$

$$f'(x)=8x^7-3\cdot 4x^3-1=8x^7-12x^3-1$$

$$г)\ f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{3}{x^3}+1=\frac{1}{2}x^2+3x^{-3}+1$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot 2x+3\cdot(-3x^{-3-1})=$$

$$=x-9x^{-4}=x-\frac{9}{x^4}$$

Задание

- Выучить таблицу и правила вычисления производных
- № 14.1 (1 столбик), 14.5