

~~E~~



A<sub>Я</sub>

~~A~~

**Производн**

**ая**

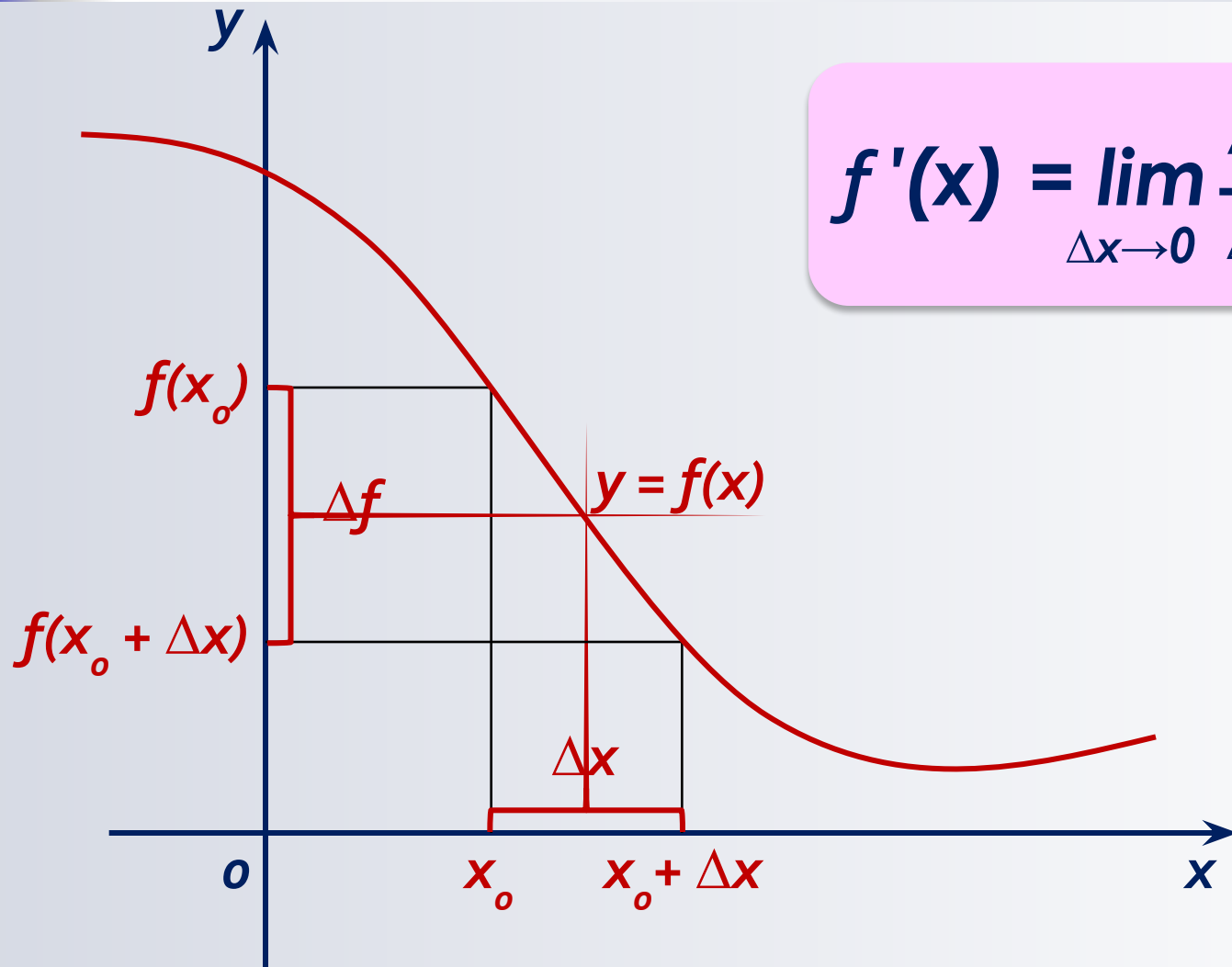
# Понятие производной

**Производной** функции  $y = f(x)$ , заданной на некотором интервале  $(a; b)$ , в некоторой точке  $x$  этого интервала называют **предел** отношения приращения функции в этой точке к соответствующему приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Нахождение производной называют **дифференцированием**

# Понятие производной



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

# Алгоритм нахождения производной

1. Зафиксировать значение  $x_0$ , найти  $f(x_0)$ .
2. Дать аргументу  $x_0$  приращение  $\Delta x$ , перейти в новую точку  $x_0 + \Delta x$ , найти  $f(x_0 + \Delta x)$ .
3. Найти приращение функции:  $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ .
4. Составить отношение  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ .
5. Вычислить  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ .
6. Этот предел и есть  $f'(x_0)$ .

# Примеры

1. Найти производную функции  $y = kx + b$  в точке  $x_0$

$$1. f(x_0) = kx_0 + b$$

$$2. f(x_0 + \Delta x) = k(x_0 + \Delta x) + b$$

$$3. \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = k(x_0 + \Delta x) + b - (kx_0 + b) = \\ = kx_0 + k \cdot \Delta x + b - kx_0 - b = k \cdot \Delta x$$

$$4. \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{k \cdot \Delta x}{\Delta x} = k$$

$$5. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (k) = k$$

$$(kx + b)' = k$$

# Примеры

2. Найти производную функции  $y = C$  ( $C$  – const) в точке  $x_0$

$$1. f(x_0) = C$$

$$2. f(x_0 + \Delta x) = C$$

$$3. \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = C - C = 0$$

$$4. \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

$$5. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$(C)' = 0$$

# Примеры

3. Найти производную функции  $y = x^2$  в точке  $x_0$

$$1. f(x_0) = (x_0)^2$$

$$2. f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2$$

$$3. \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - (x_0)^2 = \\ = x_0^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2$$

$$4. \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

$$5. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

$$(x^2)' = 2x$$



# Примеры

4. Найти производную функции  $y = \sqrt{x}$  в точке  $x_0$

$$1. f(x_0) = \sqrt{x_0}$$

$$2. f(x_0 + \Delta x) = \sqrt{x_0 + \Delta x}$$

$$3. \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0} =$$

$$= \frac{(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{(\sqrt{x_0 + \Delta x})^2 - (\sqrt{x_0})^2}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} =$$

$$= \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}$$

$$4. \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}$$

# Примеры

4. Найти производную функции  $y = \sqrt{x}$  в точке  $x_0$

$$4. \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}$$

$$5. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

# Примеры

5. Найти производную функции  $y = 1/x$  в точке  $x_0$

$$1. f(x_0) = \frac{1}{x_0}$$

$$2. f(x_0 + \Delta x) = \frac{1}{x_0 + \Delta x}$$

$$3. \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} =$$
$$= \frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{x_0(x_0 + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x}$$

$$4. \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x(x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x)} = \frac{-1}{x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x}$$

# Примеры

5. Найти производную функции  $y = 1/x$  в точке  $x_0$

$$4. \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x (x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x)} = \frac{-1}{x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x}$$

$$5. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{-1}{x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x} \right) = -\frac{1}{x_0^2}$$

$$\left( \frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}$$

# Правила нахождения производной

1. Если функции  $u(x)$  и  $v(x)$  имеют в точке  $x$  производные, то их сумма  $u(x) + v(x)$  также имеет в этой точке производную, причем

$$(u + v)' = u' + v'$$

2. Если функция  $u(x)$  имеет в точке  $x$  производную и  $C$  – данное число, то функция  $C \cdot u(x)$  также имеет в этой точке производную, причем

$$(Cu)' = C \cdot u'$$

# Правила нахождения производной

3. Если функции  $u(x)$  и  $v(x)$  имеют в точке  $x$  производные, то их произведение  $u(x) \cdot v(x)$  также имеет в этой точке производную, причем

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$



4. Если функция  $v(x)$  имеет в точке  $x$  производную и  $v(x) \neq 0$ , то функция  $\frac{1}{v(x)}$  также имеет в этой точке производную, причем

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

# Правила нахождения производной

5. Если функции  $u(x)$  и  $v(x)$  имеют в точке  $x$  производные и  $v(x) \neq 0$ , то функция  $\frac{u(x)}{v(x)}$  также имеет в этой точке производную, причем

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$



*Если функция имеет производную (дифференцируема) в точке  $x$ , то она непрерывна в этой точке.*



# ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

$f(x)$	$f'(x)$
$C$ (const)	$0$
$kx+b$	$k$
$x^2$	$2x$
$x^3$	$3x^2$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

# ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

$f(x)$	$f'(x)$
$C$ (const)	0
$kx+b$	$k$
$x^2$	$2x$
$x^3$	$3x^2$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x^n$	$nx^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$

# ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

$$(U+V)' = U' + V'$$

$$(UV)' = U'V + UV'$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$$

$$(CU)' = CU', C - \text{const}$$

## №1.

Найдите производные функций:

$$a) f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$$

$$z) f(x) = x^{-5}$$

$$б) f(x) = x^2 \cdot (2x - 7)$$

$$d) f(x) = 3x^7 - \frac{5}{x^3}$$

$$в) f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 1}$$

$$a) f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)' = (x^2)' - \left(\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= 2x - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x + \frac{1}{x^2}$$

$$b) f(x) = x^2 \cdot (2x - 7)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2)' \cdot (2x - 7) + (x^2) \cdot (2x - 7)' = \\ &= 2x \cdot (2x - 7) + x^2 \cdot 2 = 4x^2 - 14x + 2x^2 = \\ &= 6x^2 - 14x \end{aligned}$$

$$6) f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 1}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2)' \cdot (x^3 - 1) - x^2 \cdot (x^3 - 1)'}{(x^3 - 1)^2} =$$

$$= \frac{2x \cdot (x^3 - 1) - x^2 \cdot 3x^2}{(x^3 - 1)^2} = \frac{2x^4 - 2x - 3x^4}{(x^3 - 1)^2} =$$

$$= \frac{-x^4 - 2x}{(x^3 - 1)^2}$$

$$d) f(x) = 3x^7 - \frac{5}{x^3}$$

$$f'(x) = \left(3x^7 - \frac{5}{x^3}\right)' = (3x^7)' - (5x^{-3})' =$$

$$= 3 \cdot 7x^6 - 5 \cdot (-3x^{-3-1}) = 21x^6 + 15x^{-4} =$$

$$= 21x^6 + \frac{15}{x^4}$$

**Найдите производные функций**

**а)  $f(x) = x^2 + x^3;$**

**б)  $f(x) = \frac{1}{x} + 5x - 2;$**

**в)  $f(x) = x^2 + 3x - 1;$**

**г)  $f(x) = x^3 + \sqrt{x}.$**



$$a) f(x) = x^2 + x^3$$

$$f'(x) = (x^2)' + (x^3)' = 2x + 3x^2$$

$$b) f(x) = \frac{1}{x} + 5x - 2$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' + (5x)' - 2' = -\frac{1}{x^2} + 5$$

$$6) f(x) = x^2 + 3x - 1$$

$$f'(x) = 2x + 3$$

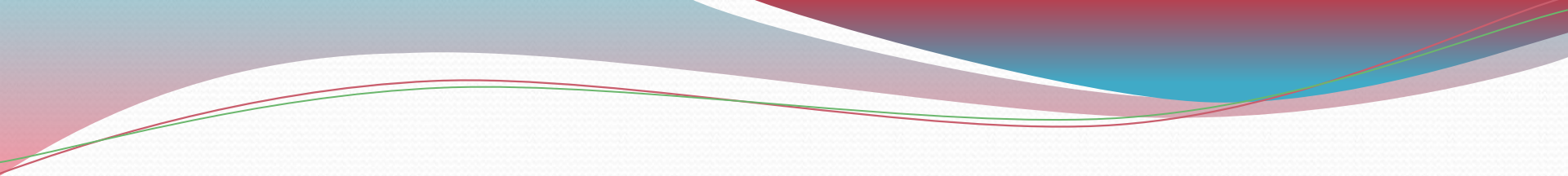

$$2) f(x) = x^3 + \sqrt{x}$$

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

**Найдите производные функций**

**а)  $y = x^8 - 3x^4 - x + 5;$**

**г)  $y = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{x^3} + 1.$**

  

$$a) f(x) = x^8 - 3x^4 - x + 5$$

$$f'(x) = 8x^7 - 3 \cdot 4x^3 - 1 = 8x^7 - 12x^3 - 1$$

$$e) f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{x^3} + 1 = \frac{1}{2}x^2 + 3x^{-3} + 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x + 3 \cdot (-3x^{-3-1}) =$$

$$= x - 9x^{-4} = x - \frac{9}{x^4}$$

# Задание

- Выучить таблицу и правила вычисления производных
- № 14.1 (1 столбик), 14.5