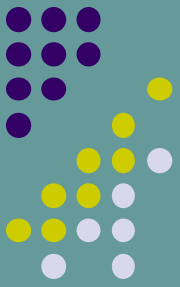


Первообразная Интеграл

Содержание



- Понятие первообразной
- Неопределенный интеграл
- Таблица первообразных
- Три правила нахождения первообразных
- Определенный интеграл
- Вычисление определенного интеграла
- Площадь криволинейной трапеции
- Площадь криволинейной трапеции **Площадь криволинейной трапеции (1)**
- Площадь криволинейной трапеции **Площадь криволинейной трапеции (2)**
- Площадь криволинейной трапеции **Площадь криволинейной трапеции (3)**
- Площадь криволинейной трапеции **Площадь**

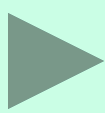
Понятие первообразной



Функцию $F(x)$ называют первообразной для функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$, если на нем производная функции $F(x)$ равна $f(x)$:

$$F'(x) = f(x)$$

Операцию, обратную дифференцированию называют интегрированием.



Примеры



1. $f(x) = 2x; \quad F(x) = x^2$
 $F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x)$

2. $f(x) = -\sin x; \quad F(x) = \cos x$
 $F'(x) = (\cos x)' = -\sin x = f(x)$

3. $f(x) = 6x^2 + 4; \quad F(x) = 2x^3 + 4x$
 $F'(x) = (2x^3 + 4x)' = 6x^2 + 4 = f(x)$

4. $f(x) = 1/\cos^2 x; \quad F(x) = \operatorname{tg} x$
 $F'(x) = (\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x = f(x)$

Неопределенный интеграл



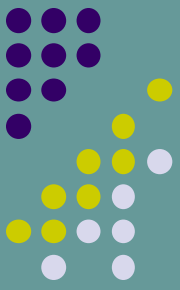
Неопределенным интегралом от непрерывной на интервале $(a; b)$ функции $f(x)$ называют любую ее первообразную функцию.

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Где C – произвольная постоянная (*const*).



Примеры



$$1. \int A dx = Ax + C; \quad (Ax + C)' = A$$

$$2. \int e^x dx = e^x + C; \quad (e^x + C)' = e^x$$

$$3. \int \sin x dx = -\cos x + C; \quad (-\cos x + C)' = \sin x$$

$$4. \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C; \quad \left(\frac{x^4}{4} + C \right)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = x^3$$

$$5. \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C; \quad (\operatorname{tg} x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Таблица первообразных



$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$
$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	x^n	$a^x + C$	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$	\sqrt{x}	$\frac{1}{x} + C$	$\ln x $
$\sin x + C$	$\cos x$	$e^x + C$	e^x
$-\cos x + C$	$\sin x$	C	Cx
$\operatorname{tg} x + C$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\log_a x + C$	$\frac{1}{x \ln a}$
$-\operatorname{ctg} x + C$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\arcsin x + C$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Три правила нахождения первообразных



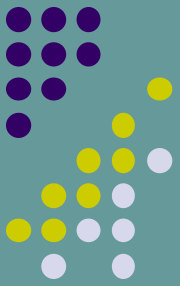
1° Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а $G(x)$ – первообразная для $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ есть первообразная для $f(x) + g(x)$.

2° Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а k – постоянная, то функция $kF(x)$ есть первообразная для $kf(x)$.

3° Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а k и b – постоянные, причем $k \neq 0$, то функция $\frac{1}{k} F(kx + b)$ есть первообразная для $f(kx + b)$.



Физический смысл первообразной



Определенный интеграл



$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

– формула **Ньютона-Лейбница**.

Геометрический смысл определенного интеграла заключается в том, что определенный интеграл равен площади криволинейной трапеции, образованной линиями:

сверху ограниченной кривой $y = f(x)$,
и прямыми $y = 0$; $x = a$; $x = b$.

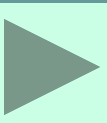




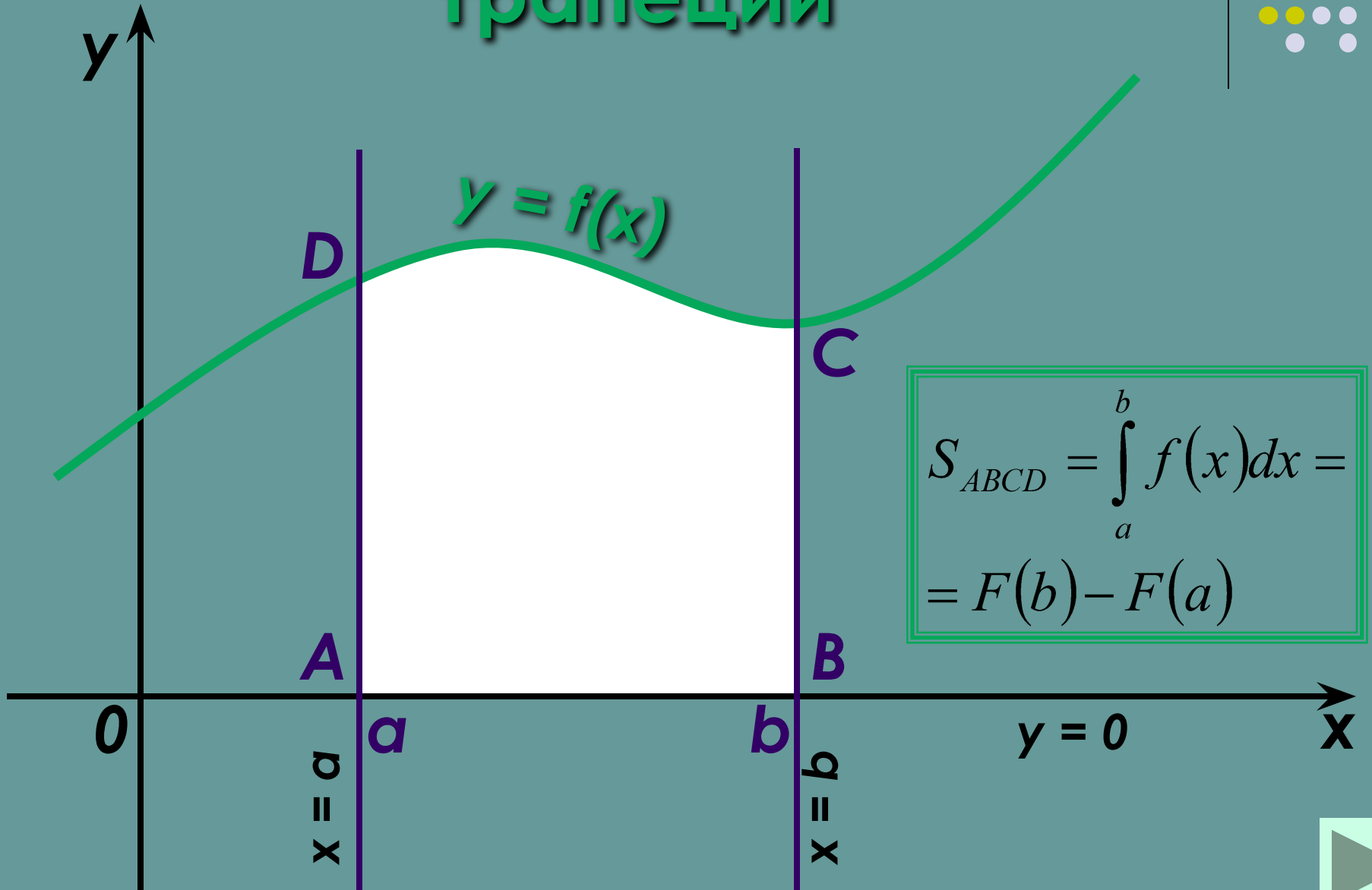
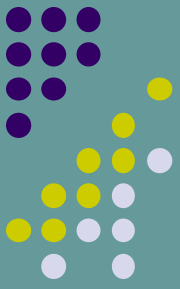
Вычисление определенного интеграла

$$\int_1^2 (3x^2 - 2x + 1) dx = (x^3 - x^2 + x) \Big|_1^2 =$$
$$= (2^3 - 2^2 + 2) - (1^3 - 1^2 + 1) = 6 - 1 = 5$$

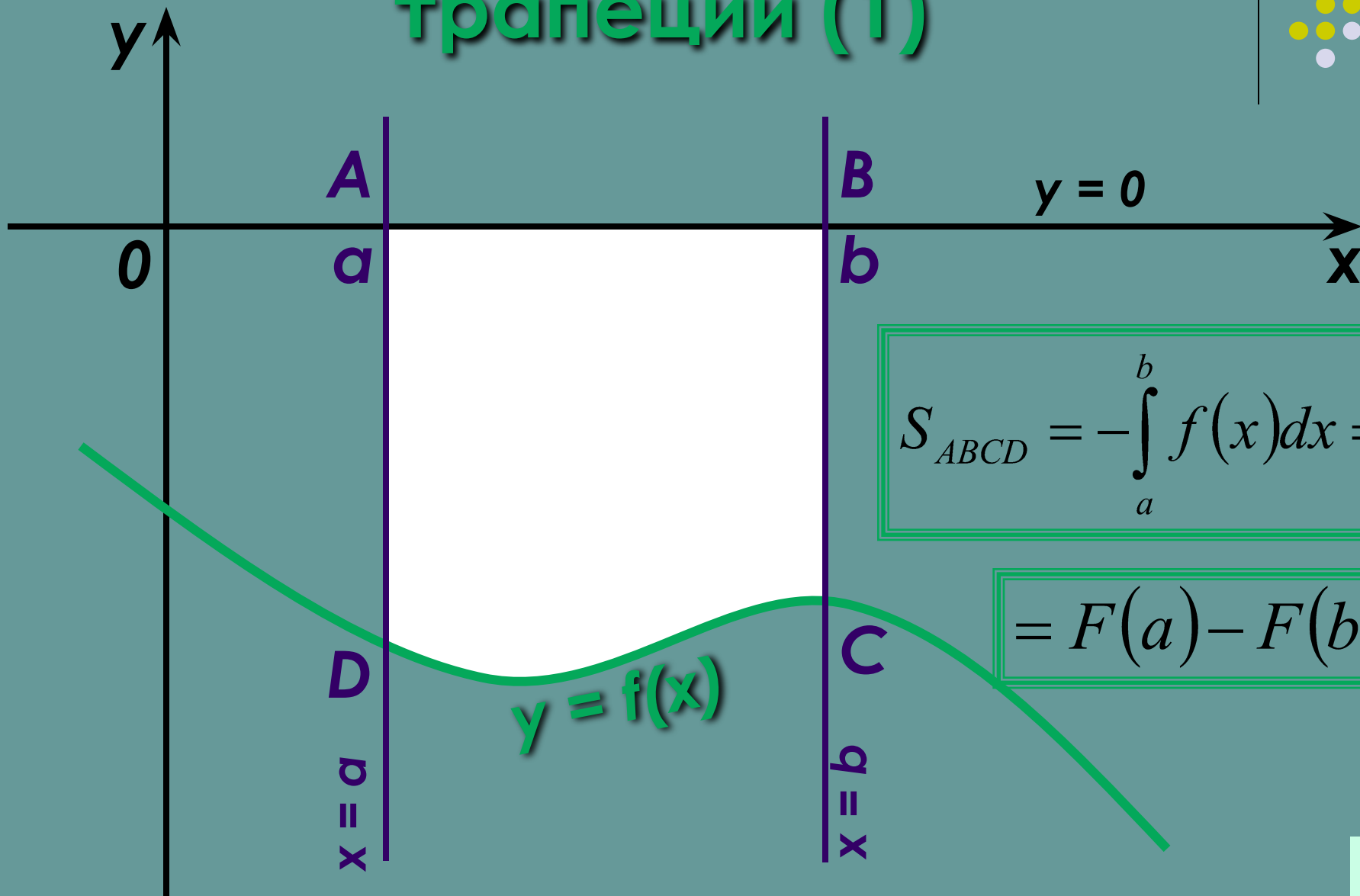
$$\int_3^{10} (\sqrt{x+6}) dx = \frac{2(x+6)\sqrt{x+6}}{3} \Big|_3^{10} =$$
$$= \frac{2(10+6)\sqrt{10+6}}{3} - \frac{2(3+6)\sqrt{3+6}}{3} = \frac{80}{3} - 18 = 7\frac{2}{3}$$



Площадь криволинейной трапеции



Площадь криволинейной трапеции (1)

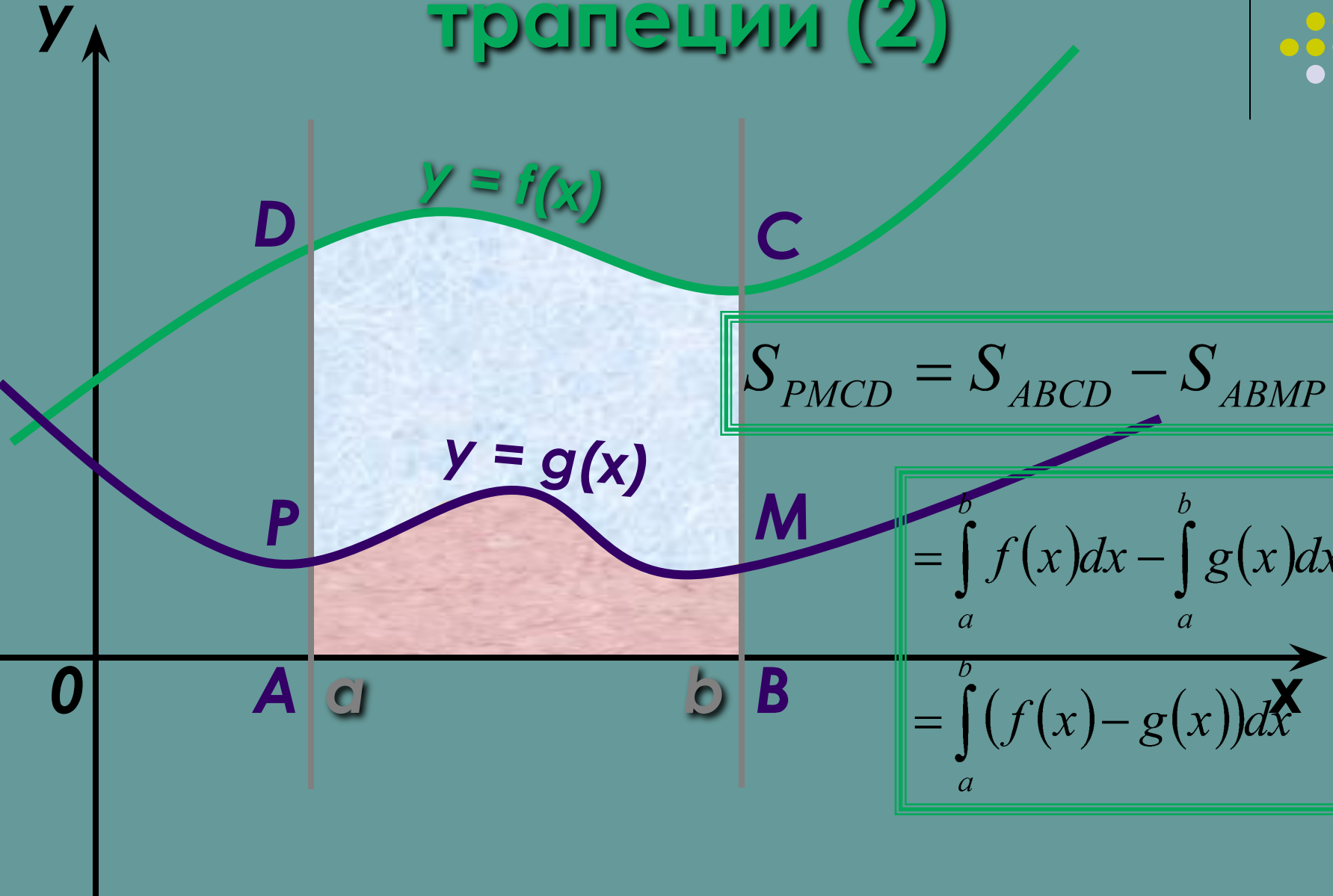


$$S_{ABCD} = -\int_a^b f(x) dx =$$

$$= F(a) - F(b)$$



Площадь криволинейной трапеции (2)

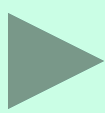
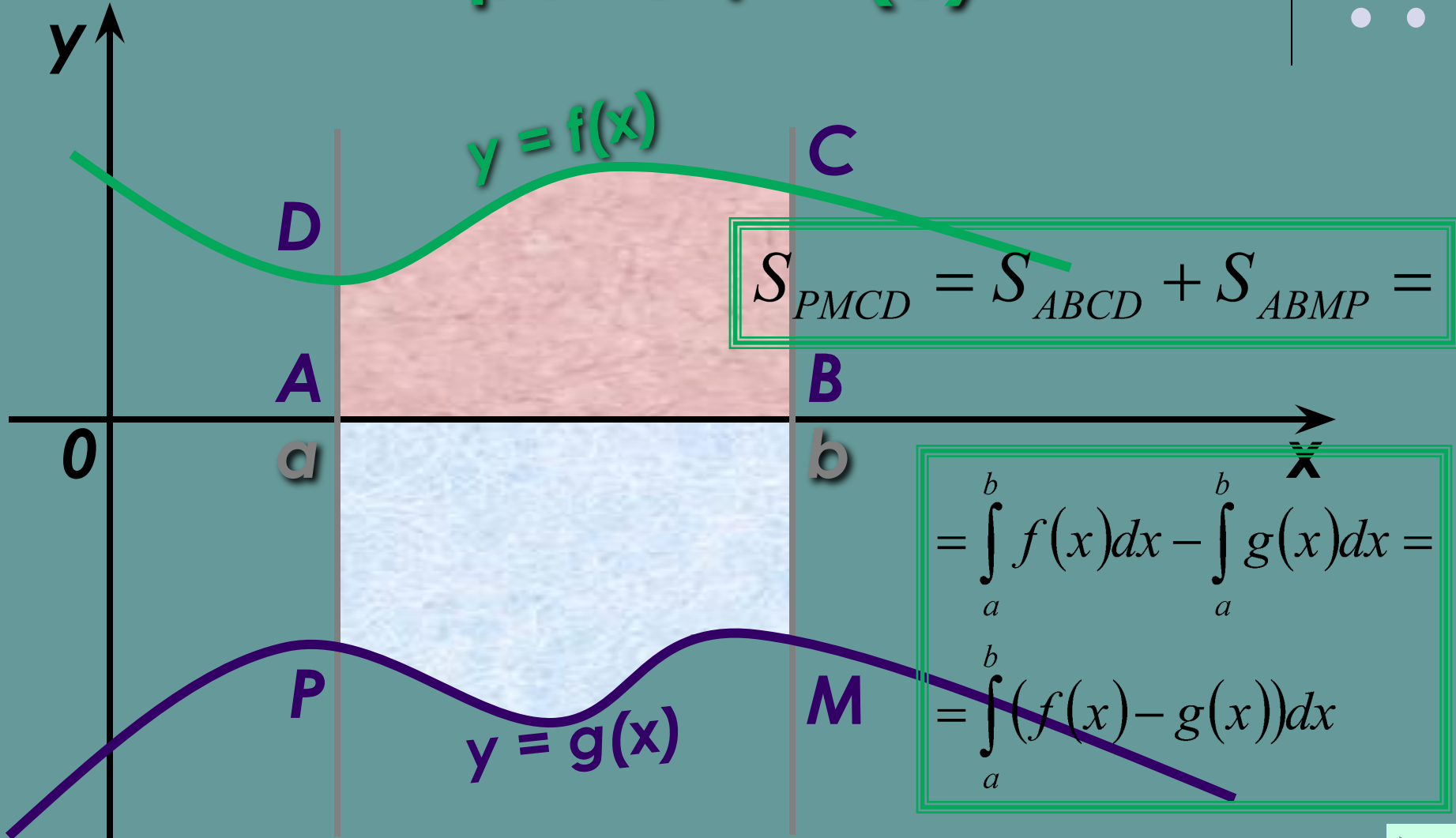


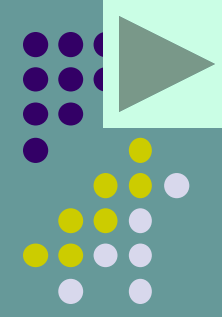
$$S_{PMCD} = S_{ABCD} - S_{ABMP} =$$

$$= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx =$$
$$= \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

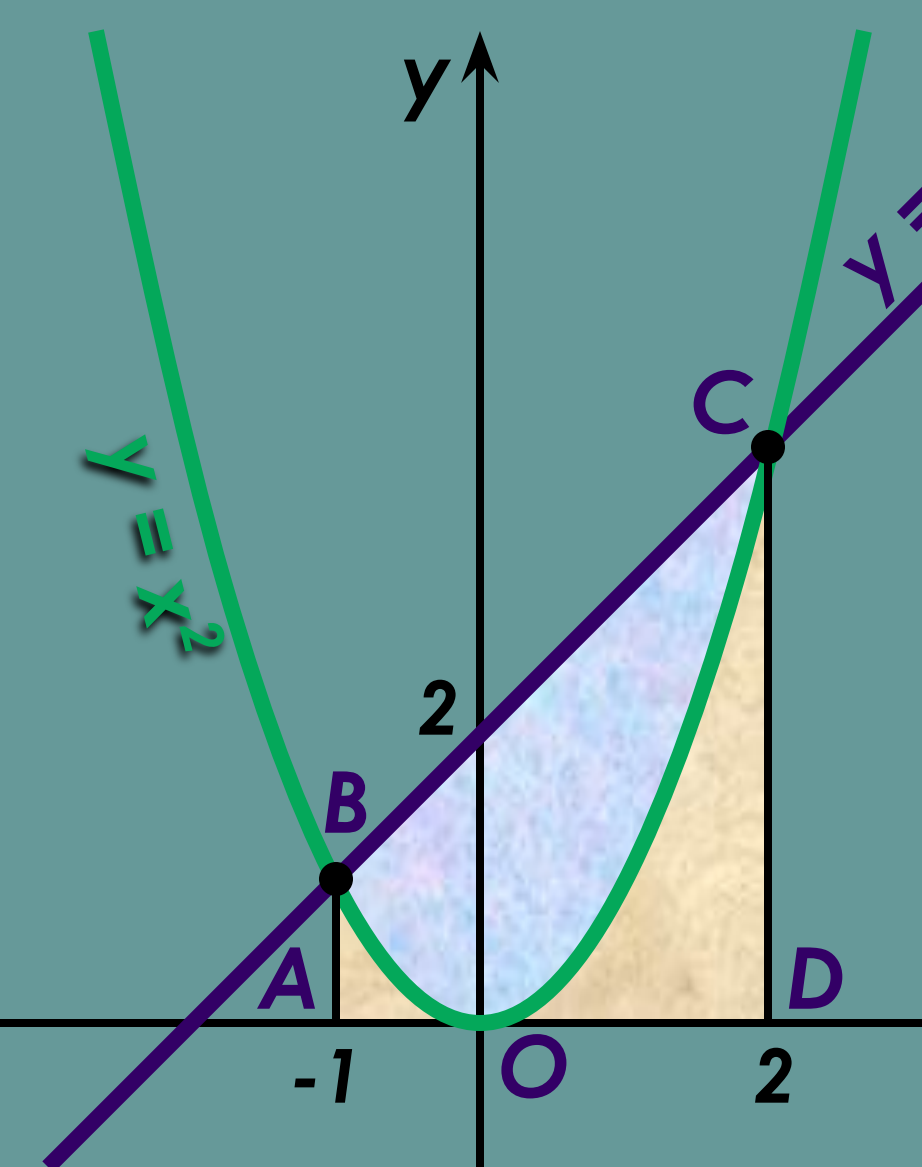


Площадь криволинейной трапеции (3)





Пример 1: вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = x + 2$.



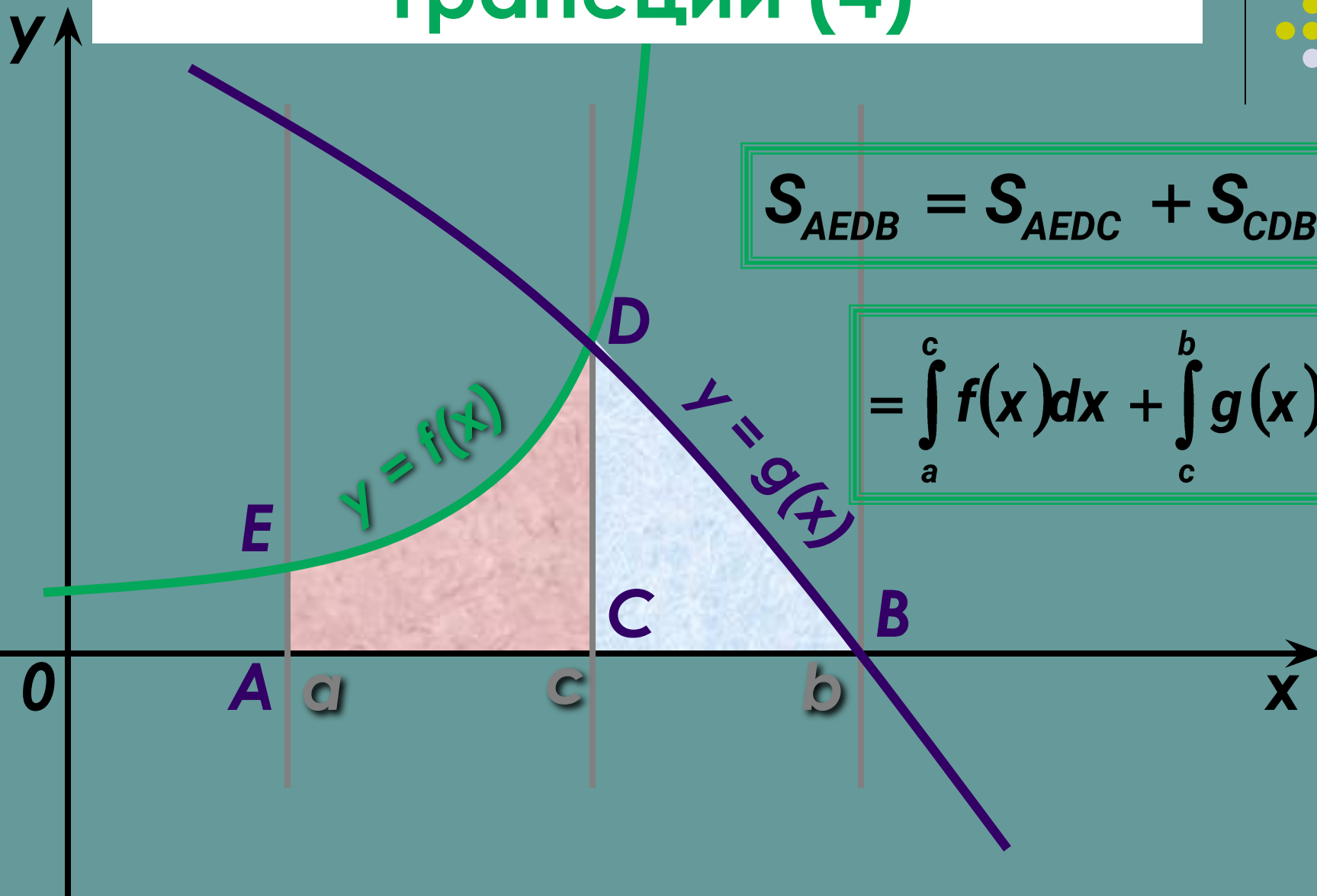
$$S_{BOC} = S_{ABCD} - S_{ABOCD} =$$

$$= \int_{-1}^2 (x + 2) dx - \int_{-1}^2 (x^2) dx =$$

$$= \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 =$$

$$= \left(2 + 4 - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) = 5 - \frac{1}{2} = 4,5$$

Площадь криволинейной трапеции (4)



$$S_{AEDB} = S_{AEDC} + S_{CDB} =$$

$$= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b g(x) dx$$

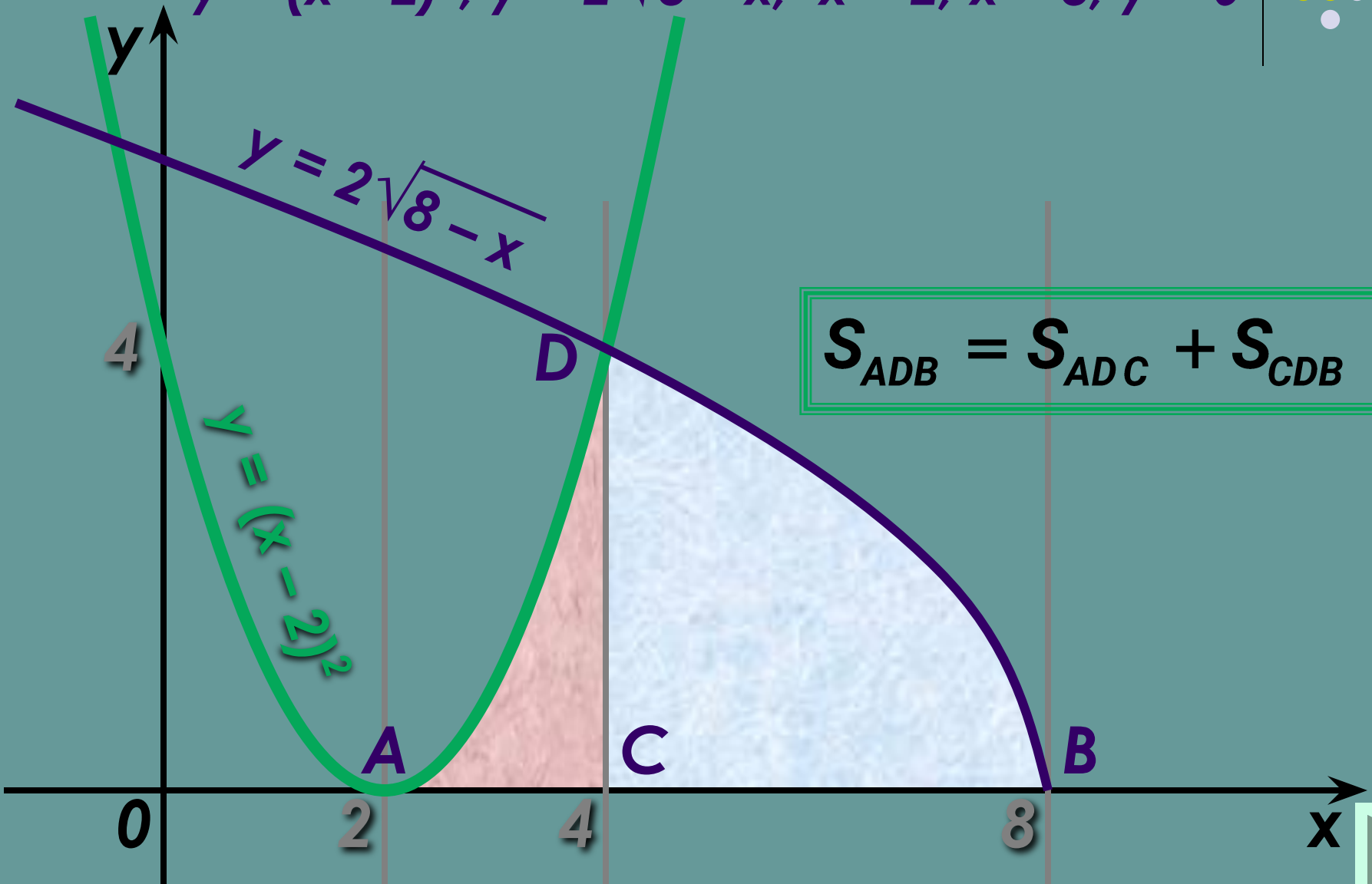




Пример 2:

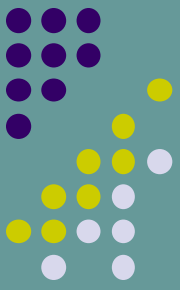
вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = (x - 2)^2, y = 2\sqrt{8 - x}, x = 2, x = 8, y = 0$$



$$S_{ADB} = S_{ADC} + S_{CDB} =$$





Пример 2:

вычислить площадь фигуры,
ограниченной линиями

$$y = (x - 2)^2, y = 2\sqrt{8 - x}, x = 2, x = 8, y = 0$$

$$= \int_2^4 (x - 2)^2 dx + \int_4^8 2\sqrt{8 - x} dx = \frac{(x - 2)^3}{3} \Big|_2^4 - \frac{4(8 - x)\sqrt{8 - x}}{3} \Big|_4^8 =$$

$$= \left(\frac{(4 - 2)^3}{3} - \frac{(2 - 2)^3}{3} \right) - \left(\frac{4(8 - 8)\sqrt{8 - 8}}{3} - \frac{4(8 - 4)\sqrt{8 - 4}}{3} \right) =$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{32}{3} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$$

