

# Закон изменения и сохранения импульса

## системы тел

Механической системой тел называют

совокупность тел, объединенных каким-либо взаимодействием.

Силы взаимодействия, действующие между телами системы, называют внутренними, а силы, действующие на тела системы со стороны тел, не входящих в систему, называют внешними.

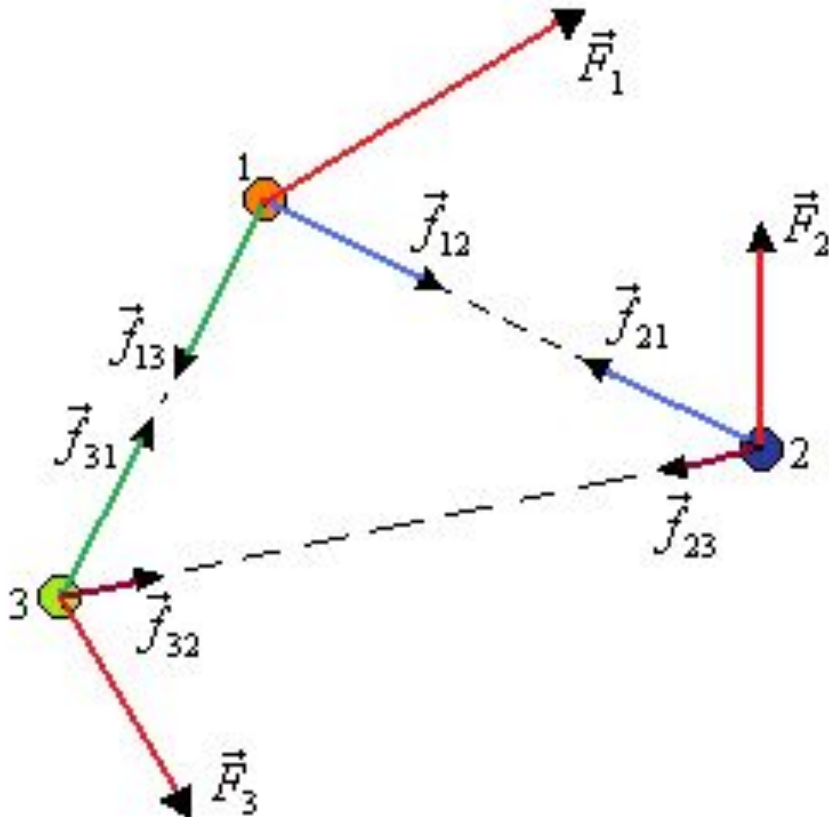
Систему тел называют изолированной (замкнутой), если на тела системы не действуют внешние силы.

Запишем второй закон Ньютона для каждого из

$\vec{F}^{\text{эл}}$  - внешние силы,

$\vec{f}$  - силы

взаимодействия.



$$\vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \vec{F}_1 = m_1 \vec{a}_1 = \frac{d\vec{p}_1}{dt}$$

$$\vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \vec{F}_2 = m_2 \vec{a}_2 = \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

$$\vec{f}_{31} + \vec{f}_{32} + \vec{F}_3 = m_3 \vec{a}_3 = \frac{d\vec{p}_3}{dt}$$

Сложим почленно все уравнения:

$$(\vec{f}_{12} + \vec{f}_{21}) + (\vec{f}_{13} + \vec{f}_{31}) + (\vec{f}_{23} + \vec{f}_{32}) + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} + \frac{d\vec{p}_3}{dt}.$$

Сумма внутренних сил равна нулю по третьему закону Ньютона, тогда

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3)}{dt}.$$

ИЛИ

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}_{\text{сист.}}}{dt}$$

$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$  - равнодействующая внешних сил;

$\vec{p}_{\text{сист.}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$  - импульс системы тел.

**Закон изменения импульса системы тел:**

равнодействующая внешних сил  
равна скорости изменения импульса  
системы.

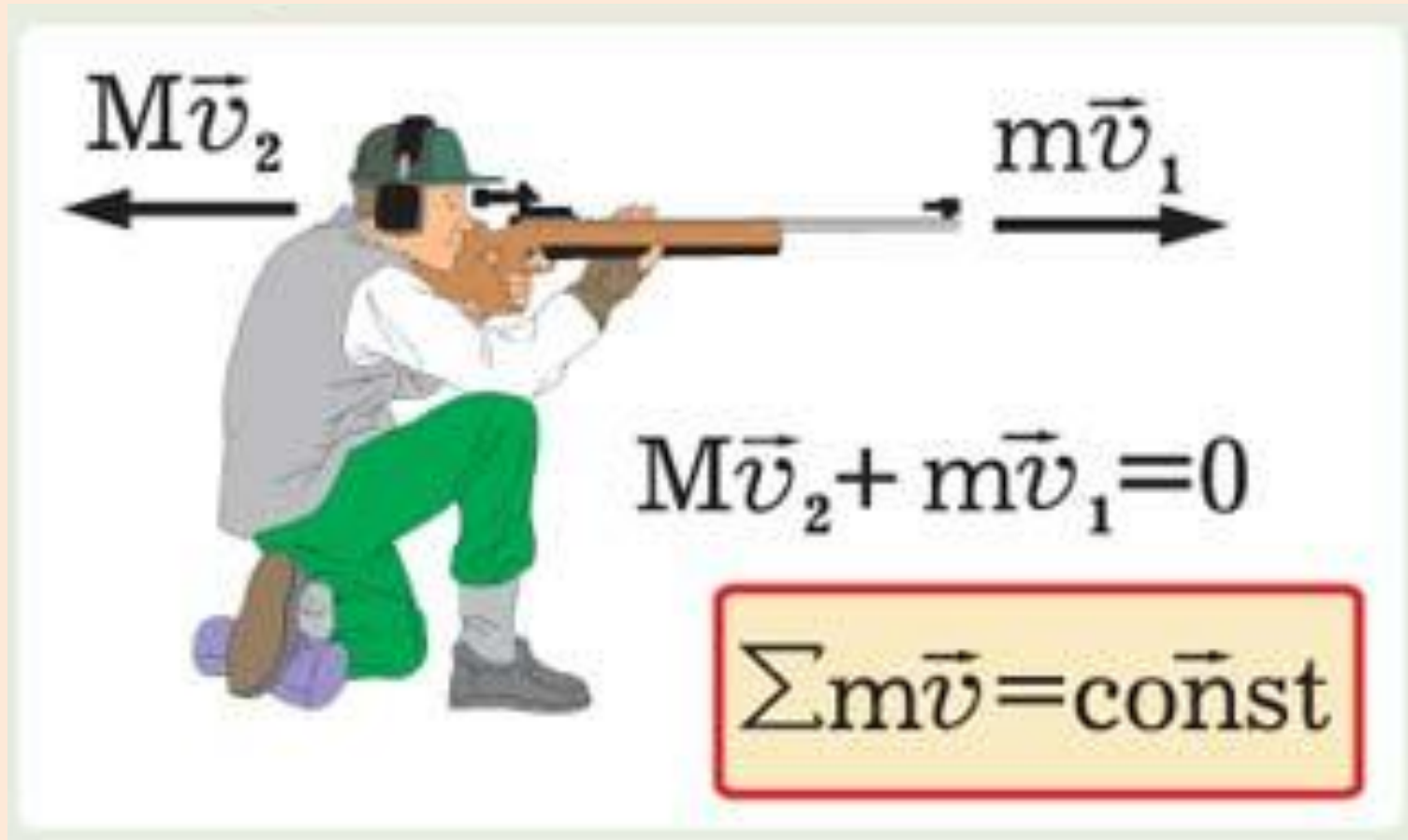
$$\text{Если } \vec{F} = 0, \text{ то } \frac{d\vec{p}_{\text{сист.}}}{dt} = 0$$

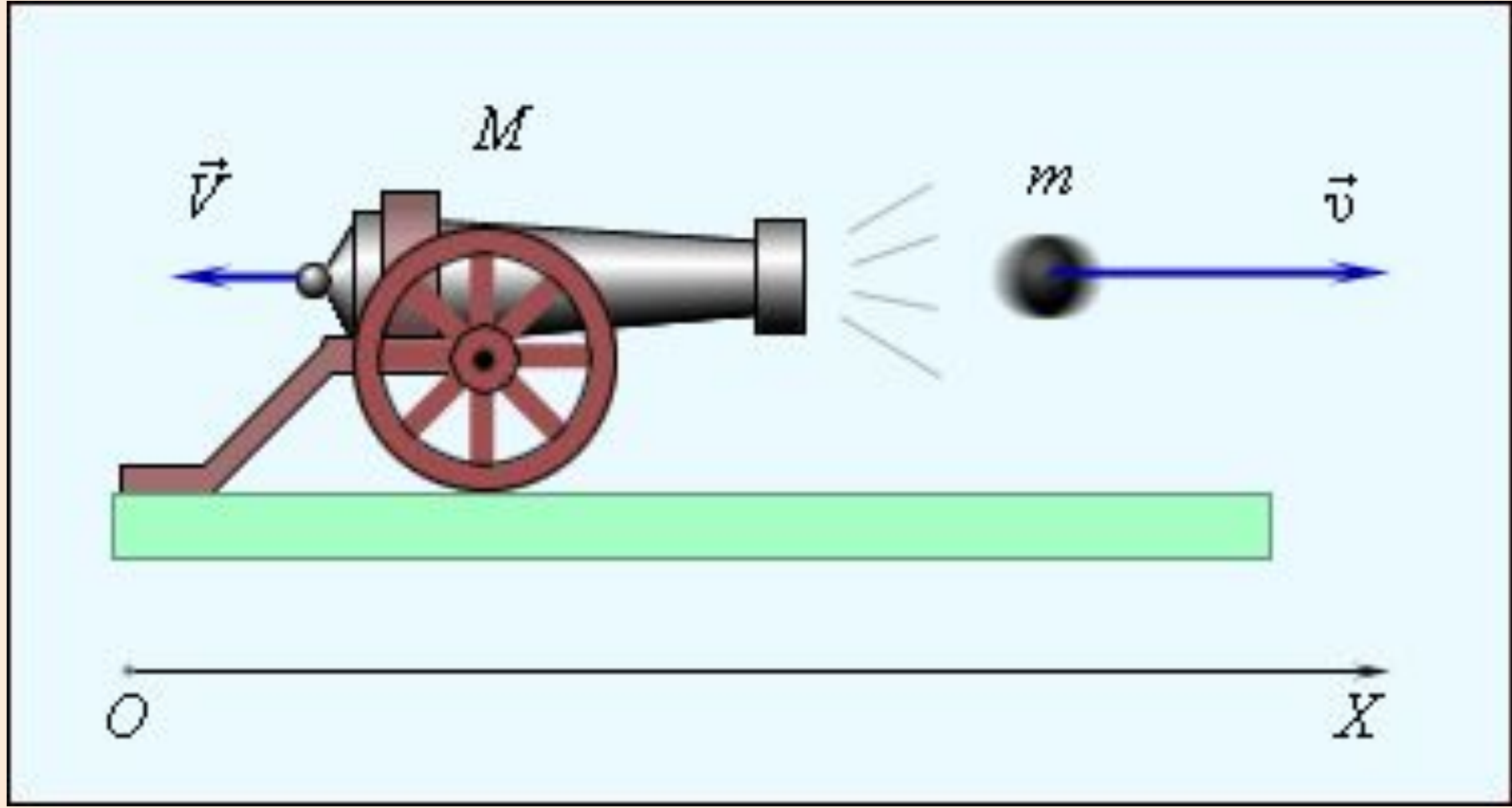
$$\vec{p}_{\text{сист.}} = \text{const.}$$

## Закон сохранения импульса:

в замкнутой системе тел векторная сумма импульсов тел, входящих в систему, есть величина постоянная.

Пример: явление отдачи при выстреле.





# Центр инерции системы тел. Центр масс

Центром инерции системы тел называют такую точку, скорость перемещения которой, умноженная на массу всей системы, дает импульс всей системы.

$$\vec{v}_C (m_1 + m_2 + \dots + m_n) = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n$$

$$\dot{\vec{r}}_C (m_1 + m_2 + \dots + m_n) = m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 + \dots + m_n \dot{\vec{r}}_n$$

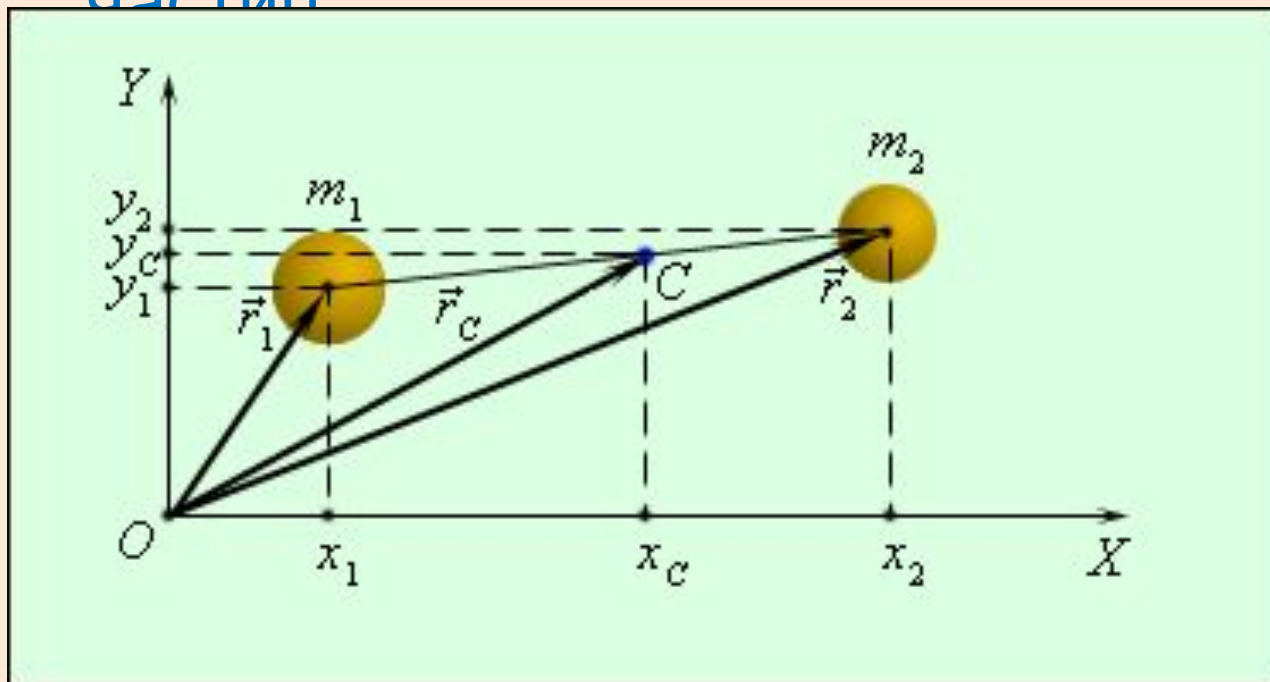
$$\vec{r}_C (m_1 + m_2 + \dots + m_n) = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n$$



$$\vec{r}_C = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{(m_1 + m_2 + \dots + m_n)}$$

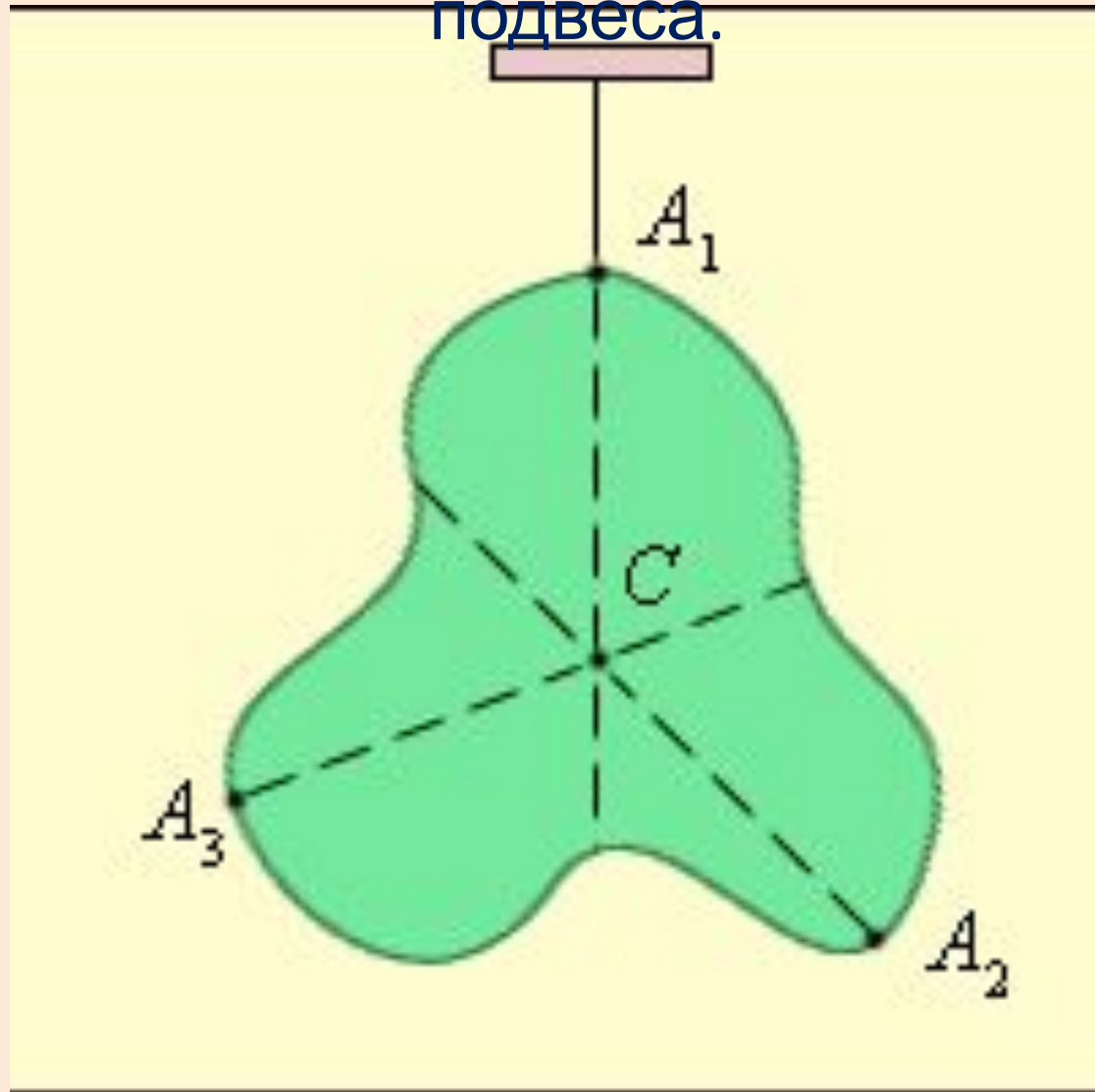
$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m}$$

Центр инерции  $C$  системы из двух  
частей



Центром масс системы тел называют точку, в которую сжалась бы система покоящихся тел, подверженная только силам всемирного тяготения (при условии, что тела могли бы сжиматься до бесконечно малых размеров).

Определение положения центра масс  $C$   
тела сложной формы.  $A_1, A_2, A_3$  точки  
подвеса.



# Уравнение движения центра

$$M\vec{p}_{\text{сист.}} = (m_1 + m_2 + \dots + m_n)\vec{v}_C = m\vec{v}_C$$

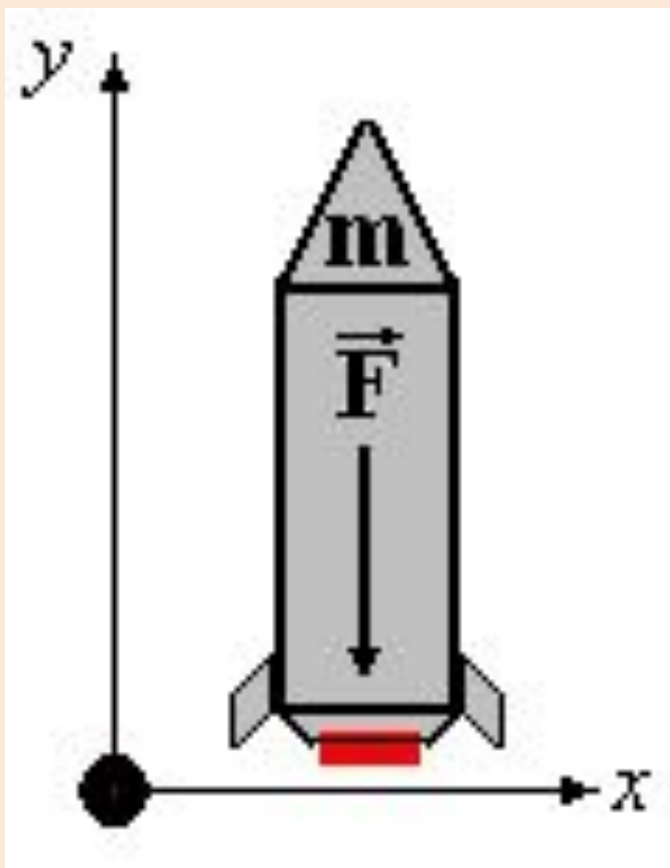
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}_{\text{сист.}}}{dt} = m \frac{d\vec{v}_C}{dt}$$

$$\vec{F} = m\vec{a}_C$$

Центр масс системы тел движется так, как если бы вся масса системы была сосредоточена в нем, и к нему же приложены все внешние силы.

Внутренние силы взаимодействия не могут придать какое-либо ускорение центру масс системы тел и изменить скорость его движения.

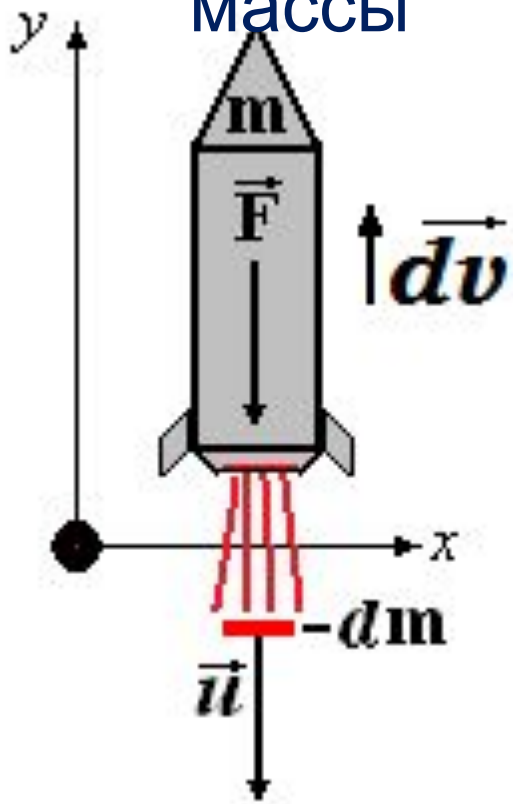
# Второй закон Ньютона для тела переменной массы. Реактивное движение.



Пусть в момент времени  $t=0$  ракета начинает движение в системе отсчета, связанной с Землей

$$\vec{p}_{\text{сист.}} = 0$$

$\vec{u}$  - относительная скорость отделяющейся массы



Через промежуток времени  $dt$

· Масса ракеты:  $m+dm$ ;  $dm < 0$

Скорость ракет  $d\vec{v}$  ;

Масса отделившейся части:

$-dm$ ;

Скорость  $\vec{u} + d\vec{v}$  вшейся части:

---

Изменение импульса  
системы:

$$\begin{aligned} dp_{\text{сист.}} &= (m + dm)d\vec{v} - dm(\vec{u} + d\vec{v}) \\ &= m \cdot d\vec{v} + dm \cdot \vec{u} \end{aligned}$$

Согласно второму закону Ньютона  $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$

):

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}_{\text{сист.}}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dm}{dt} \vec{u}$$

Уравнение

Мещерского:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt} \vec{u}$$

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_p$$

← реактивная  
сила

$$\vec{F}_p = \frac{dm}{dt} \vec{u}$$







# Формула

## Циолковского

Пусть на тело (ракету) не действуют внешние силы  $\vec{F} = 0$ , тогда

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt} \vec{u}$$

$$m \cdot d\vec{v} = dm \cdot \vec{u}$$

В проекции на направление движения:

$$dv = -\frac{dm}{m} \cdot u$$

$$\int dv = -u \int \frac{dm}{m}$$

$$v = -u \cdot \ln m + C$$

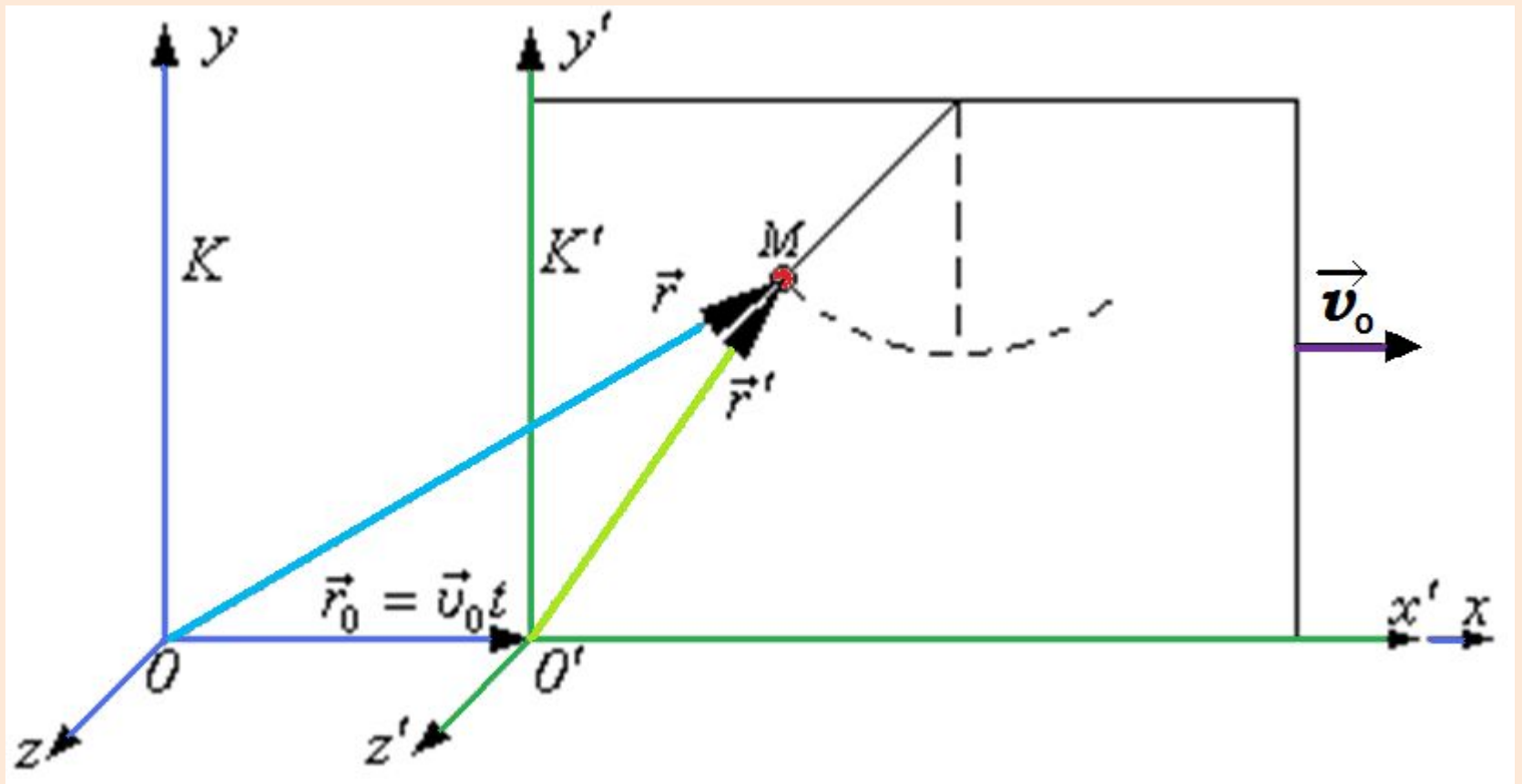
Из начальных

условий  $C = u \cdot \ln m_0$

$$v = u \cdot \ln \frac{m_0}{m}$$

# Преобразования Галилея.

## Классический закон сложения скоростей.



$$\begin{cases} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}_0 t \\ t' = t \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \vec{r} = \vec{v}_0 t' + \vec{r}' \\ t = t' \end{cases}$$

Дифференцируя радиус-вектор по времени, получим классический закон преобразования скорости точки при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой - закон сложения скоростей:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0 + \frac{d\vec{r}'}{dt'} \quad \text{или} \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$$

Абсолютная  
скорость  
(скорость точки в  
сис-теме K)

Переносная  
скорость (скорость  
системы K в  
системе K)

Относительная  
скорость  
(скорость точки в  
системе K )

Дифференцируя скорость по времени с учётом того,  
то

$$\vec{v}_0 = \text{const.},$$

получим:

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

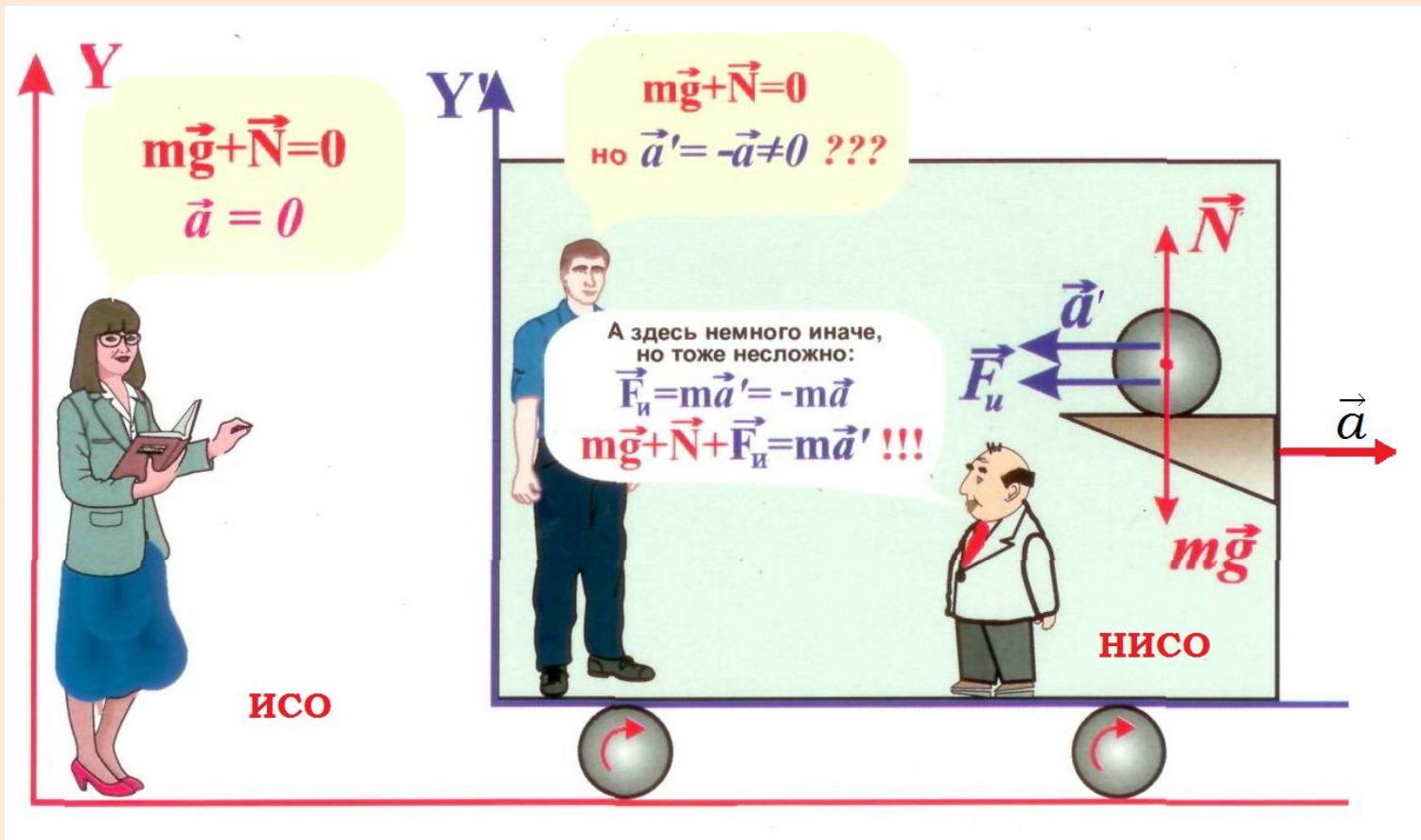
Ускорение точки одинаково во всех  
инерциальных системах отсчёта.

**Принцип относительности Галилея:**  
в инерциальных системах отсчета все  
механические явления протекают  
одинаково.

# Неинерциальные системы

отсчета

Неинерциальные системы отсчета (НИСО) движутся относительно инерциальных систем отсчета (ИСО) с ускорением. Законы Ньютона в НИХ



Для неинерциальных систем отсчета законы динамики можно применить, если кроме сил, обусловленных взаимодействием тел друг с другом, ввести в рассмотрение силы, называемые силами инерции.

Рассмотрим три различных случая:

- тело находится в неинерциальной системе отсчета, движущейся поступательно;
- тело покоится во вращающейся системе отсчета;
- тело движется во вращающейся системе отсчета.

## НИСО движется поступательно

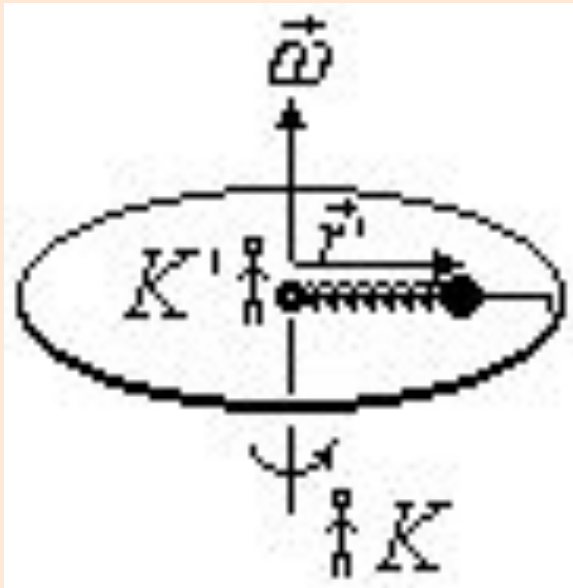
$$\vec{F}_И = -m\vec{a}$$

Сила инерции

Ускорение НИСО  
относительно  
ИСО  
(переносное)

**Сила инерции направлена  
противоположно переносному  
ускорению системы и пропорциональна  
массе тела.**

# Тело покоится во вращающейся НИСО



$$\vec{F}_{\text{цб}} = m\omega^2\vec{r}'$$

Для наблюдателя системы

К: 
$$\vec{F}_{\text{упр}} = m\vec{a}_n = -m\omega^2\vec{r}'$$

Для наблюдателя системы

К:

$$\vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_{\text{цб}} = 0$$



# Тело движется во вращающейся НИСО

Наряду с центробежной силой инерции действует сила Кориолиса. Ее причина – изменение ускорения тела при его движении в НИСО.

$$\vec{F}_k = 2m[\vec{v}', \vec{\omega}]$$

$\vec{v}'$  - скорость точки во вращающейся системе отсчета.

# Принцип эквивалентности Эйнштейна

Все физические явления в однородном поле тяготения происходят совершенно так же, как и в соответствующем однородном поле сил инерции.