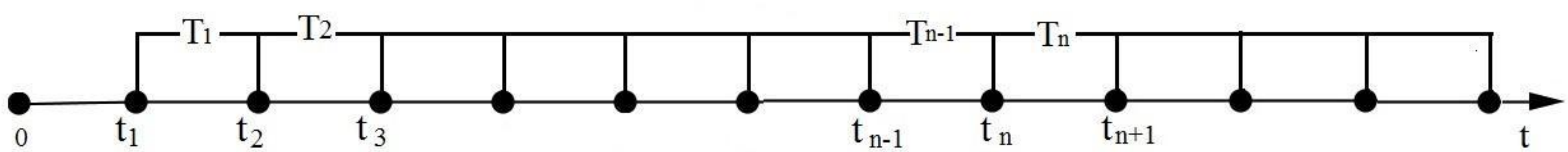
Потоки с ограниченным последействием.
Поток Пальма. Поток Эрланга.

Определение 1. Поток событий называется потоком с ограниченным последействием, если случайные величины $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$ представляющие собой интервалы времени между соответственно первым и вторым, вторым и третьем, и т.д., n-ым и (n+1)-м событиями и т.д., независимы.



Определение 2. Случайные величины бесконечной системы $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$ называется независимыми, если закон распределения каждой конечной подсистемы данной системы не зависит от того, какие значения приняли отдельные случайные величины.

Закон распределения конечной системы случайной величины $T_1, T_2, \ldots, T_n$ может быть задан функцией распределения $F(t_1, t_2, \ldots, t_n) = p(T_1 < t_1) \cdot (T_2 < t_2) \cdot \cdots \cdot (T_n < t_n))$, представляющей собой вероятность совместного выполнения с n неравенств $T_i < t_i, (i = 1, \ldots, n)$ либо плотностью распределения

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \frac{\partial^n F(t_1, t_2, \ldots, t_n)}{\partial t_1 \partial\, t_2 \ldots \partial\, t_n}$$

Определение 3. Стационарный поток с ограниченным последействием называется потоком Пальма.

У потока Пальма случайные величины $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ имеют один и тот же закон распределения.

Простейший поток является потоком Пальма, поскольку он стационарен, случайные величины $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ распределены по показательному закону и независимы в силу отсутствия последействия. Нестационарный пуассоновский поток не является потоком Пальма.

Важным частными случаями потока Пальма являются потоки Эрланга.

Определение 4. Потоком Эрланга $k-\text{ого}$ порядка называется поток, получающийся из простейшего сохранения в нем $k-\text{ого}$ события, и обозначается через $Э_{(k)}$.

Т.о., если $\Pi = (e_n)_{n=1}^{\infty} = (e_1, e_2, \dots)$простейший поток событий e_n, $n = 1,2,3 \dots$, то $Э_{(k)} = (e_{kn})_{n=1}^{\infty} = (e_k, e_{k2}, \dots)$ – соответствующий ему поток Эрланга $k-\text{ого}$ порядка.

Примеры:

1) Поток Эрланга 1 – ого порядка $Э_{(1)} = (e_n)_{n=1}^{n}$ совпадает с исходным простейшим потоком Π и, следовательно, простейший поток является потоком Эрланга 1 – ого порядка.

2) Потока Эрланга 3 – ого порядка $Э_{(3)} = (e_{3n})_{n=1}^{\infty} = (e_3, e_6, e_9, \dots)$, где

$T_{(3)1}$ – промежуток времени между первым e_3 и вторым e_6событиями в потоке $Э_{(3)}$,

$T_{(3)2}$ – промежуток времени между вторым e_6 и третьем e_9 событиями в потоке $Э_{(3)}$, и т.д.

$T_{(3)n}$ – промежуток времени между n-ым e_{3n} и (n+1)-м $e_{(3n+1)}$ событиями в потоке $Э_{(3)}$, а $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ - промежутки времени соответственно между первым e_1 и вторым e_2, вторым e_2и третьим e_3 и т.д. событиями простейшего потока.

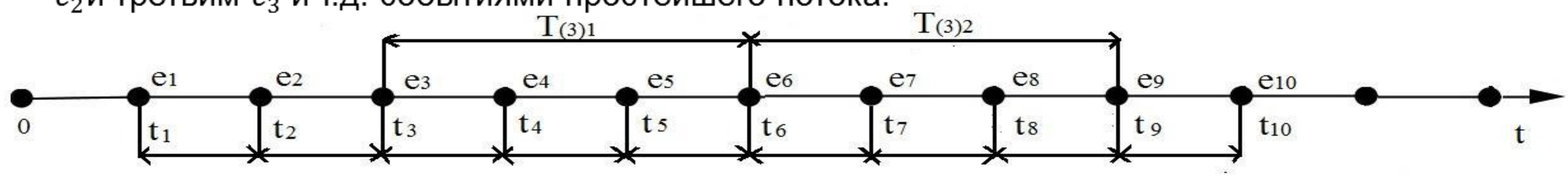


Рисунок потока Эрланга 3-ого порядка

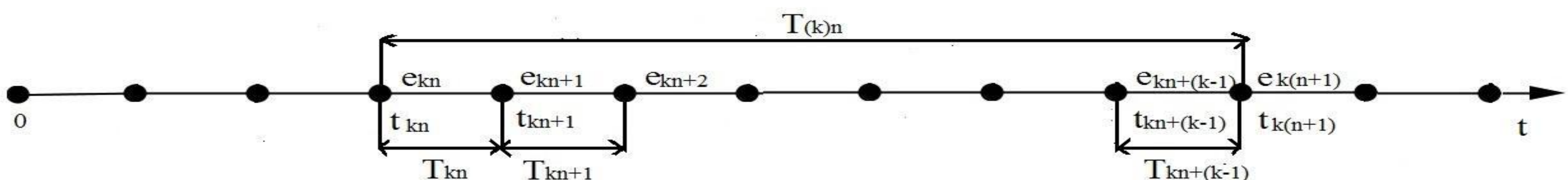


Рисунок промежуток времени $T_{(k)n}$ между соседними событиями e_{kn} и $e_{k(n+1)}$ в потоке Эрланга k-ого порядка $Э_{(3)}$.

Поскольку для потока Эрланга k – ого порядка $Э_{(3)}$ случайной величины $T_{(k)1}, T_{(k)2}, \dots, T_{(k)n}, \dots$ интервалы времени соответственно между первым и вторым, вторым и третьим и т.д. событиями имеют одинаковое распределение, вместо этих случайных величин можно рассматривать случайную величину $T_{(k)}$ – промежуток времени между любыми двумя соседними событиями.

Теорема 1. Для случайной величины T_k – промежутка времени между любыми двумя соседними событиями в потоке Эрланга $k-\text{ого}$ порядка, порожденном простейшим потоком с интенсивностью λ, основные статистические характеристики определяются следующим образом:

1) плотность распределения:

$$f_{(k)}(t) = \frac{\lambda(\lambda\cdot t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda\cdot t},\ t > 0, k = 1,2,3, \dots , \qquad (29)$$

2) математическое ожидание

$$M[T_{(k)}] = \frac{k}{\lambda}, k = 1,2,3, \dots , \quad (30)$$

3) дисперсия

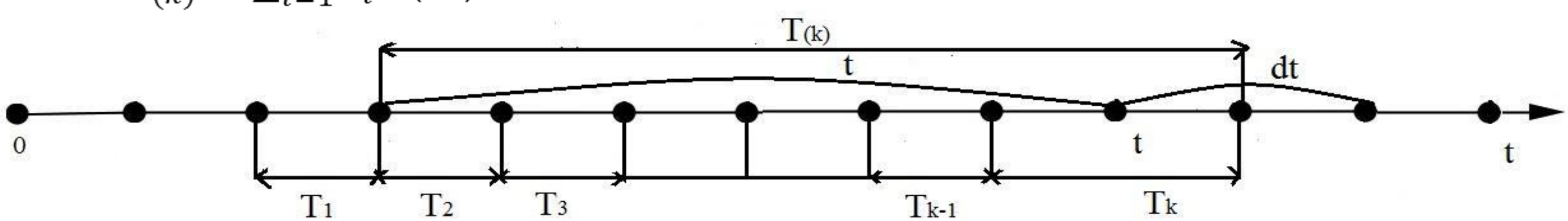
$$D[T_{(k)}] = \frac{k}{\lambda^2}, k = 1,2,3, \dots , \quad (31)$$

4)среднее квадратичное отклонение

$$\sigma[T_{(k)}] = \frac{\sqrt{k}}{\lambda}, k = 1,2,3, \dots , \quad (32)$$

Случайный временной промежуток между любыми двумя соседними событиями в потоке Эрланга $k-\text{ого}$ порядка.

$$T_{(k)} = \sum_{i=1}^{k} T_i \quad (33)$$



Определение 5. Закон распределения с плотностью, выражающейся формулой (29), называется законом Эрланга $k-$ого порядка с параметром λ.

При $k=1$ (когда поток Эрланга $k-$ого порядка является простейшим) закон Эрланга $k-$ого порядка с параметром λ (29) превращается в показательный закон $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ с параметром λ (см. формулу (10))

Обозначим через $\lambda_{(k)}$ – интенсивность потока Эрланга $k-$ого порядка (среднее число событий потока $Э_{(k)}$ в единицу времени). Тогда $\lambda_{(k)}=\frac{1}{M[T_{(k)}]}$ и, следовательно, по формуле (30)

$$\lambda_{(k)}=\frac{k}{\lambda}, k=1,2,3, \dots , \qquad (34)$$

или

$$\lambda=k\cdot\lambda_{(k)}, k=1,2,3, \dots , \qquad (35)$$

Т.о. интенсивность $\lambda_{(k)}$ потока Эрланга $k-$ого порядка в k раз меньше интенсивности λ исходного простейшего потока. В то же время, как показывает сравнение формул (30) с (11), (31) с(12), (32) с (13), математическое ожидание и дисперсия случайной величины T_k в k раз больше соответствующих характеристик случайной величины T, а среднее квадратичное отклонение $\sigma[T_{(k)}]$ в $\sqrt{k}$ больше среднего квадратичного отклонения $\sigma[T]$.

Формулы (29)-(32) выражают соответственно плотность распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины T_k, через интенсивность λ исходного простейшего потока. Можно выразить указанные величины через интенсивность $\lambda_{(k)}$ самого потока $Э_{(k)}$. Для этого надо в указанные формулы вместо λ подставить его выражение через $\lambda_{(k)}$ по формуле (35); в результате получим:

$$f_{(k)}(t) = \frac{k\cdot\lambda_{(k)}\left(k\cdot\lambda_{(k)}\cdot t\right)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-k\cdot\lambda_{(k)}\cdot t}, \ t > 0, k = 1,2,3,\dots, \quad (36)$$

$$M[T_{(k)}] = \frac{k}{\lambda_{(k)}}, k = 1,2,3,\dots, \quad (37)$$

$$D[T_{(k)}] = \frac{k}{{\lambda_{(k)}}^2}, k = 1,2,3,\dots, \quad (38)$$

$$\sigma[T_{(k)}] = \frac{1}{\sqrt{k}\lambda_{(k)}}, k = 1,2,3,\dots, \quad (39)$$

Уменьшение интенсивности $\lambda_{(k)}$ потока Эрланга $k-$ого порядка при увеличении его порядка k(см. (34)) создает некоторое неудобство использования потоков $Э_{(k)}$. Чтобы интенсивность $\lambda_{(k)}$ при увеличении k оставалась постоянной, равной интенсивности λ исходного простейшего потока, достаточно уменьшить в k раз масштаб по временной оси $0t$, т.е. уменьшить в k раз промежуток времени T_k между соседними событиями потока $Э_{(k)}$. Образованный таким образом поток называется нормированным потоком Эрланга $k-$ого порядка и обозначает $\tilde{Э}_k$.

Из (34) находим интенсивность потока $\tilde{Э}_k$:

$$\tilde{\lambda}_k = k\cdot\lambda_{(k)} = \lambda, k = 1,2,3,\dots, \quad (40)$$

Промежуток времени между любыми двумя соседними событиями потока $\tilde{Э}_k$:

$$\tilde{T}_k = \frac{1}{k}T_k, k = 1,2,3,\dots \quad (41)$$

Из (30) математическое ожидание случайной величины $\tilde{T}_k$:

$$M[\tilde{T}_k] = \frac{1}{k}M[T_k] = \frac{1}{\lambda}, \ k = 1,2,3,\dots \quad (42)$$

Из (31) дисперсия случайной величины $\tilde{T}_k$:

$$D[\tilde{T}_k] = D\left[\frac{1}{k}T_k\right] = \frac{1}{k^2}\cdot\frac{k}{\lambda^2} = \frac{1}{k\lambda^2}, \ k = 1,2,3,\dots \quad (43)$$

Из этого равенства находим среднее кваратическое отклонение случайной величины $\tilde{T}_k$:

$$\sigma[T_{(k)}] = \sqrt{D[\tilde{T}_k]} = \frac{1}{\sqrt{k}\lambda}, \ k = 1,2,3,\dots \quad (44)$$

Пусть $F_{T_{(k)}}(t)$ и $f_{T_{(k)}}(t) = f_{(k)}(t)$ соответственно интегральная и дифференциальная функции распределения случайной величины T_k, а $F_{\widetilde{T}_{(k)}}(t)$ и $f_{\widetilde{T}_{(k)}}(t) = \tilde{f}_{(k)}(t)$ – интегральная и дифференциальная функции распределения случайной величины $\widetilde{T}_{(k)}$. Используя определения интегральной функции распределения $F_{T_{(k)}}(t) = p\left(T_{(k)} < t\right)$, дифференциальной функции распределения , равенства (41) и (29), получим

$$\tilde{f}_{(k)}(t) = f_{\widetilde{T}_{(k)}}(t) = \frac{d}{dt} F_{\widetilde{T}_{(k)}}(t) = \frac{d}{dt} p\left(\widetilde{T}_{(k)} < t\right) = \frac{d}{dt} p\left(\frac{1}{k} T_{(k)} < t\right) =$$

$$\frac{d}{dt} p\left(T_{(k)} < kt\right) = \frac{d}{dt} F_{T_{(k)}}(kt) = \left[\frac{d}{d(kt)} F_{T_{(k)}}(kt)\right] \cdot \frac{d}{dt}(kt) = k f_{T_{(k)}}(kt) = k \cdot f_{(k)}(kt) =$$

$$\frac{k\lambda(\lambda \cdot k \cdot t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda \cdot t \cdot k} \qquad (45)$$

Т.о. плотность распределения случайной величины $\widetilde{T}_{(k)}$ – интервала времени между любыми двумя соседними событиями в нормированном потоке Эрланга k – ого порядка $\widetilde{Э}_k$ выражается формулой:

$$\tilde{f}_{(k)}(t) = \frac{k\lambda(\lambda \cdot k \cdot t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda \cdot t \cdot k}, t > 0, k = 1,2,3, \dots , \qquad (46)$$

Из сравнения этой формулы с формулой (29) видно, что величина $\widetilde{T}_{(k)}$ распределена так же по закону Эрланга k – ого порядка, но с параметром $k\lambda$.

В формулах (42)-(44) в силу равенства (40), λ можно заменить на $\tilde{\lambda}_{(k)}$.

Полученные характеристики случайной величины $T_{(k)}$, для потока Эрланга $k-$ого порядка $\text{Э}_{(k)}$ и $\widetilde{T}_{(k)} = k^{-1}T_{(k)}$ для нормированного потока Эрланга $k-$ого порядка $\widetilde{\text{Э}}_k$ сведем в Таблицу:

№	Характеристики случайных величин	Случайные величины			
1	Интенсивность исходного простейшего потока				
2			(34)		(40)
3	Плотность распределения		(29) (36)		(45) (46)
4	Параметр закона распределения		(34)		
5	Математическое ожидание		(30) (37)		(42)
6	Дисперсия		(31) (38)		(43)
7	Среднее квадратичное отклонение		(32) (39)		(44)

В силу формул (41) и (33) случайная величина $\tilde{T}_{(k)}$ представляет собой среднее арифметическое k независимых случайных величин $T_{(i)}, (i = \overline{1,k})$, распределенных по одному и тому же закону (показательному с параметром λ). Следовательно, в силу центральной предельной теоремы для одинаково разделенных слагаемых при достаточно больших k случайная величина $T_1 + T_2 + \cdots + T_k$, а, следовательно, и случайная величина $\tilde{T}_{(k)} = k^{-1}(T_1 + T_2 + \cdots + T_k)$ как линейная функция случайной величины $T_1 + T_2 + \cdots + T_k$, будет распределена по закону, близкому к нормальному параметрами которого являются математическое ожидание $\mathrm{M}\left[\tilde{T}_{(k)}\right] = \lambda^{-1}$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[\tilde{T}_k] = \frac{1}{\sqrt{k}\lambda}$ случайной величины $\tilde{T}_{(k)}$.

Центральная предельная теорема для одинаково распределенных параметров. Если $T_1, T_2, \dots, T_k$, независимые случайные величины, имеющие одно и тоже распределение с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2, то при $k \to \infty$, закон распределения суммы $T = T_1 + T_2 + \cdots + T_k$ приближается к нормальному.

Определение 6. Закон распределения непрерывной случайной величины T называется нормальным, если плотность распределения задается формулой

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(t-m)^2}{2\sigma^2}},$$

где параметр m – математическое ожидание,

параметр σ – среднее квадратическое отклонение случайной величины T.

График функции $f(t)$ плотности распределения нормального закона называется нормальной кривой (кривой Гаусса).

Первая теорема Чебышева («Закон больших чисел»):

Случайная величина $\widetilde{T}_{(k)} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} T_{(i)}$ – среднее арифметическое независимых одинаково распределенных случайных величин $T_{(i)}$, $(i = \overline{1,k})$, с математическим ожиданием m, сходится по вероятности при $k \to \infty$ к математическому ожиданию m.

Определение 7. Величина $\widetilde{T}_{(k)}$ сходится по вероятности к величине λ^{-1} при $k \to \infty$, если для любого сколько угодно малого $\varepsilon > 0$ вероятность $p\left(\left|\widetilde{T}_{(k)} - \lambda^{-1}\right| < \varepsilon\right)$ события, состоящего в том, что $\left|\widetilde{T}_{(k)} - \lambda^{-1}\right| < \varepsilon$, стремится к единице при $k \to \infty$.

Одновременно с этим среднее квадратическое отклонение $\sigma[\widetilde{T}_k] = \frac{1}{\sqrt{k}\lambda}$ стремится к нулю с возрастанием k, т.е. промежуток времени $\widetilde{T}_{(k)}$ между любыми соседними событиями потока Эрланга $k - \text{ого}$ порядка при неограниченном увеличении порядка k становится все менее случайным и по первой теореме Чебышева «Закона больших чисел», приближается по вероятности к своему математическому ожиданию $\mathrm{M}\left[\widetilde{T}_{(k)}\right] = \lambda^{-1}$. А сам поток $\widetilde{Э}_k$, т.о., приближается к потоку, промежуток времени между любыми двумя соседними событиями которого равен λ^{-1}, и который, следовательно, является регулярным. Это свойство потоков Эрланга выявляет роль их порядков и как «меры последействия»: от полного отсутствия последействия при $k = 1$ (поток Эрланга первого порядка $Э_{(1)}$ является простейшим) до жесткого последействия, порождаемого функциональной связью между моментами появления событий, при $k \to \infty$ (поток Эрланга $Э_{(k)}$ приближается к регулярному потоку при $k \to \infty$).

Для упрощения моделирования реального потока с последействием, его заменяют нормированным потоком Эрланга определенного порядка примерно с тем же математическим ожиданием и дисперсией случайного интервала времени между соседними событиями.

Потоки Эрланга в классе потоков Пальма обладают тем преимуществом, что с их помощью можно сводить немарковские процессы к марковским.

Пример

Рассмотрим деятельность некоторого рекламного агентства. Для формулирования рекомендаций по улучшению его работы полезно обладать информацией о потоке поступления заказов на изготовление и размещение рекламы. Поэтому велись наблюдения, в частности, за интервалом времени между соседними поступлениями заказов, представляющим собой непрерывную случайную величину. Обозначим её через T. В результате статистической обработки этих данных были получены следующие характеристики случайной величины T: среднее значение интервала времени T между двумя соседними поступлениями заказов $M[T]$ = 1 неделя и среднее квадратическое отклонение $\sigma[T] = 4$ дня.

Заменим поток заказов нормированным потоком Эрланга $\widetilde{Э}_k$, обладающим приближенно теми же характеристиками, найдем его интенсивность $\tilde{\lambda}_{(k)}$, порядок k и плотность распределения $\tilde{f}_{(k)}(t)$; подсчитаем вероятность того, что промежуток времени между двумя соседними заказами больше трех и меньше пяти дней.

Итак, для потока $\widetilde{Э}_k$ имеем :

$M[\widetilde{T}_k] = 1$ неделя;

$\sigma[\widetilde{T}_k] = 4 \text{ дня} = \frac{4}{7} \text{ недели}$

По формулам (40) и (42) для нормированного потока *Таблица 5*

$\tilde{\lambda}_{(k)} = \lambda = \frac{1}{M[\widetilde{T}_k]} = \frac{1}{1} = 1$ (заказ в неделю),

По формулам (44) и (40)

$\sigma[\widetilde{T}_k] = \frac{1}{\sqrt{k}\lambda} = \frac{1}{\sqrt{k}\tilde{\lambda}_{(k)}} = \frac{1}{\sqrt{k}}$, откуда $k = \left(\sigma[\widetilde{T}_k]\right)^{-2} = \left(\frac{7}{4}\right)^2 \approx 3{,}067$

Т.к. k – порядок нормированного потока Эрланга, то k должно быть натуральным числом. Поэтому в качестве k естественно выбрать число 3, ближайшее натуральное к 3,067. Итак, $k = 3$.

Т.о., данный поток заказов можно приближенно заменить нормированным потоком Эрланга третьего порядка $\widetilde{Э}_{(3)}$ с интенсивностью $\lambda_{(3)} = 1$ заказ в неделю.

По формуле (45)(46) для плотности распределения вероятностей случайной величины $\tilde{T}_{(k)}$, получим выражение (для нормированного потока)

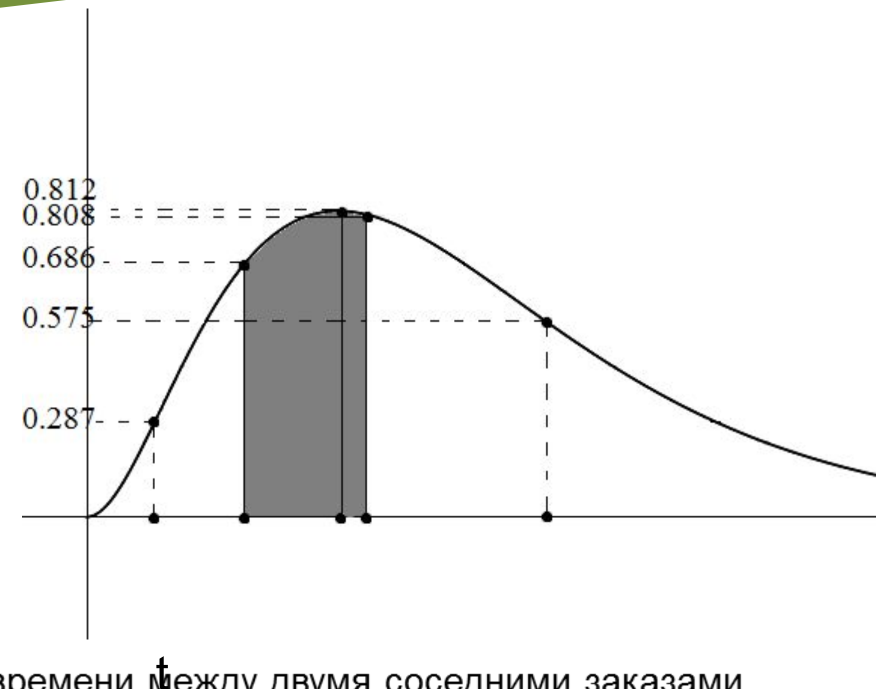
$$\tilde{f}_{(k)}(t) = \frac{k\lambda(\lambda\cdot k\cdot t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda\cdot t\cdot k}$$

$$\tilde{f}_{(3)}(t) = \frac{3\cdot 1(3\cdot 1\cdot t)^{3-1}}{(3-1)!}e^{-3\cdot t\cdot 1} = 13{,}5\cdot t^2\cdot e^{-3\cdot t}, (t>0)$$

Исследуем эту функцию стандартным способом.

$\tilde{f}_{(k)}(t)$ – определена на $(0;+\infty)$, не является ни четной, ни нечетной и ни периодической, возрастает $\left(0,\frac{2}{3}\right)$, убывает $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$, $t=\frac{2}{3}$ – точка максимума, $\tilde{f}_{(3)}\left(\frac{2}{3}\right)\cong 0{,}812$, точки $t_{1,2}=\frac{(2\mp\sqrt{2})}{3}$ – точки перегиба; $\lim\limits_{t\to\infty}\tilde{f}_{(3)}(t)=0$, т.е. ось Ot является для графика горизонтальной асимптотой

Построим график



Вероятность $p = p\left(\frac{3}{7} < \widetilde{T}_{(3)} < \frac{5}{7}\right)$ того, что интервал времени между двумя соседними заказами больше трех и меньше пяти дней, равна по значению площади, заштрихованной на рисунке фигуры, которая вычисляется по формуле:

$p = p\left(\frac{3}{7} < \widetilde{T}_{(3)} < \frac{5}{7}\right) = \int_{\frac{3}{7}}^{\frac{5}{7}} \tilde{f}_{(3)}(t)\,dt = 13{,}5 \int_{\frac{3}{7}}^{\frac{5}{7}} t^2 \cdot e^{-3\cdot t} dt$ интегрирование по частям

$$p = 13{,}5(\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2)$$

$$\mathrm{I}_1 = -\frac{1}{3} t^2 \cdot e^{-3\cdot t}\Big|_{\frac{3}{7}}^{\frac{5}{7}} = -0{,}3\left(\frac{25}{49} \cdot \frac{1}{2{,}71^{\frac{15}{7}}} - \frac{9}{49} \cdot \frac{1}{2{,}71^{\frac{9}{7}}}\right) \approx -0{,}003,$$

$$\mathrm{I}_2 = \frac{2}{3} \int_{\frac{3}{7}}^{\frac{5}{7}} t \cdot e^{-3\cdot t} dt = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3} t \cdot e^{-3\cdot t}\Big|_{\frac{3}{7}}^{\frac{5}{7}} + \frac{1}{3} \int_{\frac{3}{7}}^{\frac{5}{7}} e^{-3\cdot t} dt\right) \approx 0{,}017,$$

$$p \approx 13{,}5 \cdot (-0{,}003 + 0{,}017) = 0{,}189$$

Между пуассоновскими потоками событий и дискретными марковскими процессами с непрерывным временем имеется тесная связь. Пусть система S с дискретными состояниями $s_1, s_2, \ldots, s_m$ в которой протекает случайный процесс с непрерывным временем, находится в данный момент времени t_0 в состоянии s_i и может перейти в другое состояние s_j $(i \neq j)$ под воздействием какого-то пуассоновского потока событий Π_{ij} с интенсивностью $\lambda(t)$. Это понимается так: как только наступает первое после момента времени t_0 событие потока Π_{ij}, то тут же система S переходит из состояния s_i в состояние s_j. Т.о., переход системы S из состояния s_i в состояние s_j осуществляется под воздействием только первого момента времени t_0 события потока Π_{ij}, тем не менее теоретически этот переход удобнее объяснять воздействием «всего» потока событий Π_{ij}, поскольку в этом случае законность приобретает рассмотрение интенсивности $\lambda(t)$ потока Π_{ij}.

Теорема 2. Плотность вероятности перехода $\lambda_{ij}(t)$ системы S из остояния s_i в состояние s_j в момент времени t под воздействием пуассоновского потока Π_{ij} равна интенсивности $\lambda(t)$ этого потока:

$$\lambda_{ij}(t) = \lambda(t)$$

Утверждение.(связь между дискретными марковскими случайными процессами с непрерывным временем и пуассоновскими потоками событий)

Чтобы случайный процесс, с непрерывным временем протекающий в системе с дискретными состояниями был марсковским, необходимо и достаточно, чтобы все потоки событий переводящих систему из состояния, были пуассоновскими (стационарными или нестационарными – безразлично)

В силу этого утверждения, системы, в которых протекают марковские случайные процессы с непрерывным временем, называют пуассоновскими системами.

Используя указанную связь между пуассоновскими потоками и событий и дискретными марковскими случайными процессами с непрерывным временем, исследование процесса целесообразно проводить по следующему алгоритму:

1) Описать каждое возможное состояние системы.

2)Составить граф состояний, в котором стрелками указать только возможные непосредственные переходы системы из состояния в состояние.

3) Разметить составленный граф, т.е. у каждой стрелки возможного непосредственного перехода системы S из состояния s_i в состояние s_j проставить интенсивность $\lambda_{ij}(t)$ потока событий Π_{ij}, под влиянием которого осуществляется этот переход.

4) Указать начальное состояние системы (т.е. $t = 0$).