ПОЛИНОМ ЖЕГАЛКИНА

Теорема.

Любая функция алгебры логики от n переменных может быть представлена полиномом Жегалкина и это представление единственно.

Сложение по модулю 2

x	y	$x \oplus y$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

строгая дизъюнкция, исключающее «или», жегалкинское сложение, М2…

Свойства операции сложение по модулю 2

$$x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$$

$$x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3$$

$$x_1 (x_2 \oplus x_3) = x_1 x_2 \oplus x_1 x_3$$

Возможно разложение в СДНФ
(освобождение от М2 или строгой дизъюнкции)

$$x_1 \oplus x_2 = \overline{x_1} x_2 \vee x_1 \overline{x_2}$$

Свойства операции сложение по модулю 2

$$x \oplus x = 0$$

$$x \oplus \overline{x} = 1$$

Операции с константами

$$x \oplus 0 = x$$

$$x \oplus 1 = \overline{x}$$

Связь между дизъюнкцией
и суммой по модулю два (строгой дизъюнкцией)

$$x_1 \vee x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2$$

Полином (многочлен) Жегалкина:

функция от 2 логических переменных

$$P(x, y) = a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y \oplus a_{12} xy$$

функция от 3 логических переменных

$$P(x, y, z) = a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y \oplus a_3 z \oplus$$

$$\oplus a_{12} xy \oplus a_{13} xz \oplus a_{23} yz \oplus a_{123} xyz$$

$a_0, a_1, \ldots, a_{123}$ - полиномиальные коэффициенты (принимают значение равное 0 или 1)

Полином (многочлен) Жегалкина от n логических переменных:

$$P(x_1 x_2 x_3 \ldots x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus \ldots \oplus a_n x_n \oplus$$

$$\oplus\, a_{12} x_1 x_2 \oplus \ldots \oplus a_{123} x_1 x_2 x_3 \oplus \ldots \oplus a_{123\ldots n} x_1 x_2 x_3 \ldots x_n$$

Всего здесь 2^n слагаемых.

$\oplus$ - означает сложение по модулю 2,

Все полиномиальные коэффициенты являются константами (равными нулю или единице).

Алгоритм построения ПЖ

(с помощью эквивалентных преобразований)

1. **Минимизируем булеву функцию любым известным нам способом**
2. **Заменяем дизъюнкцию суммой по модулю 2**
3. **Заменяем** $f_1 \vee f_2 = f_1 \oplus f_2 \oplus f_1 f_2$ $\quad \overline{x_i} = x_i \oplus 1$
4. **Используем распределительный закон (раскрываем скобки)**
5. **Применяем** $f \oplus f = 0$ **и** $f \oplus 0 = f$

Метод неопределенных коэффициентов

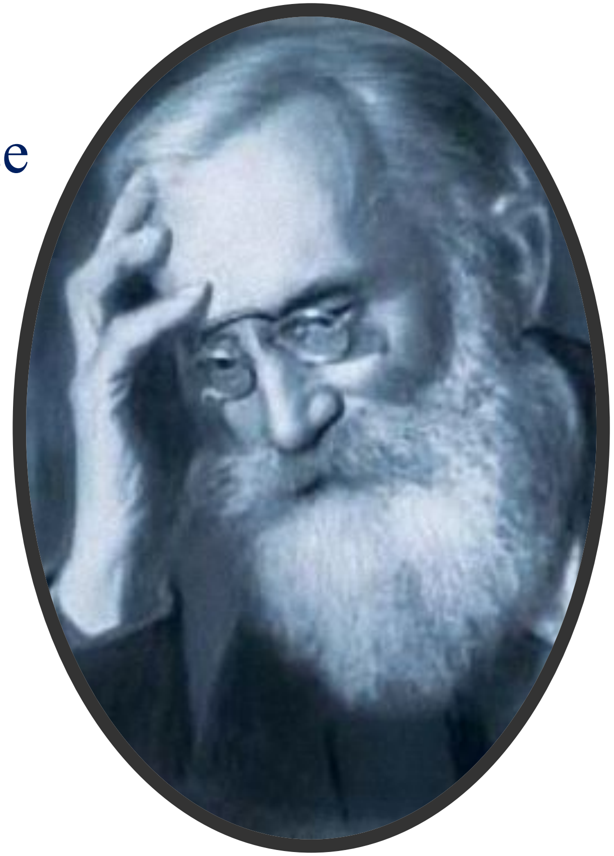
(по таблице истинности или вектору значений функции)

x	y	z	f		a
0	0	0	1	$=a_0$	$a_0=1$
0	0	1	1	$=a_0\oplus a_3=1\oplus a_3$	$a_3=0$
0	1	0	0	$=a_0\oplus a_2=1\oplus a_2$	$a_2=1$
0	1	1	0	$=a_0\oplus a_2\oplus a_3\oplus a_{23}=1\oplus 1\oplus 0\oplus a_{23}$	$a_{23}=0$
1	0	0	1	$=a_0\oplus a_1=1\oplus a_1$	$a_1=0$
1	0	1	0	$=a_0\oplus a_1\oplus a_3\oplus a_{13}=1\oplus 0\oplus 0\oplus a_{13}$	$a_{13}=1$
1	1	0	1	$=a_0\oplus a_1\oplus a_2\oplus a_{12}=1\oplus 0\oplus 1\oplus a_{12}$	$a_{12}=1$
1	1	1	1	$=a_0\oplus a_1\oplus a_2\oplus a_3\oplus a_{12}\oplus a_{13}\oplus a_{23}\oplus a_{123}=1\oplus 0\oplus 1\oplus 0\oplus 1\oplus 1\oplus 0\oplus a_{123}$	$a_{123}=1$

$$P=1\oplus y\oplus xy\oplus xz\oplus xyz$$

Иван Иванович Жегалкин (1869-1947) – российский и советский математик и логик, профессор Московского университета. Заслуженный деятель науки РСФСР один из основоположников современной математической логики. Из его открытий наибольшую известность получил так называемый полином Жегалкина. Жегалкин награжден Орденом Трудового Красного Знамени.

Жегалкин предложил в 1927 году в качестве удобного средства для представления функций булевой логики многочлен, названный **полиномом Жегалкина.**



Известный советский математик Николай Лузин, вспоминая студенческие годы, говорит, что из профессоров не боялся лишь Жегалкина.

А теперь самостоятельно потрудимся над получением полинома Жегалкина в тетрадях.

Вариант А

xyz	f	$x \wedge (y \to z)$	a
000	0	$= a_0$	$a_0 = 0$
001	0	$= 0 \oplus a_3$	$a_3 = 0$
010	0	$= 0 \oplus a_2$	$a_2 = 0$
011	0	$= 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_{23}$	$a_{23} = 0$
100	1	$= 0 \oplus a_1$	$a_1 = 1$
101	1	$= 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_{13}$	$a_{13} = 0$
110	0	$= 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_{12}$	$a_{12} = 1$
111	1	$= 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_{123}$	$a_{123} = 1$

$$P = x \oplus xy \oplus xyz$$

Вариант Б

xyzf	$x \downarrow (y \mid z)$	a
0000	$= a_0$	$a_0 = 0$
0010	$= 0 \oplus a_3$	$a_3 = 0$
0100	$= 0 \oplus a_2$	$a_2 = 0$
0111	$= 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_{23}$	$a_{23} = 1$
1000	$= 0 \oplus a_1$	$a_1 = 0$
1010	$= 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_{13}$	$a_{13} = 0$
1100	$= 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_{12}$	$a_{12} = 0$
1110	$= 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus a_{123}$	$a_{123} = 1$

$$P = yz \oplus xyz$$

Вариант B

x	y	z	f	$x \downarrow (y \leftrightarrow z)$	a
0	0	0	0	$= a_0$	$a_0 = 0$
0	0	1	1	$= 0 \oplus a_3$	$a_3 = 1$
0	1	0	1	$= 0 \oplus a_2$	$a_2 = 1$
0	1	1	0	$= 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus a_{23}$	$a_{23} = 0$
1	0	0	0	$= 0 \oplus a_1$	$a_1 = 0$
1	0	1	0	$= 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus a_{13}$	$a_{13} = 1$
1	1	0	0	$= 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus a_{12}$	$a_{12} = 1$
1	1	1	0	$= 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_{123}$	$a_{123} = 0$

$$P = y \oplus z \oplus xy \oplus xz$$

Вариант Г

x	y	z	f	$x \vee (y \leftrightarrow z)$	a
0	0	0	1	$= a_0$	$a_0 = 1$
0	0	1	0	$= 1 \oplus a_3$	$a_3 = 1$
0	1	0	0	$= 1 \oplus a_2$	$a_2 = 1$
0	1	1	1	$= 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus a_{23}$	$a_{23} = 0$
1	0	0	1	$= 1 \oplus a_1$	$a_1 = 0$
1	0	1	1	$= 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus a_{13}$	$a_{13} = 1$
1	1	0	1	$= 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus a_{12}$	$a_{12} = 1$
1	1	1	1	$= 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_{123}$	$a_{123} = 0$

$$P = 1 \oplus y \oplus z \oplus xy \oplus xz$$

Вариант Д

x	y	z	f	$x \mid (y \leftrightarrow z)$	a
0	0	0	1	$= a_0$	$a_0 = 1$
0	0	1	1	$= 1 \oplus a_3$	$a_3 = 0$
0	1	0	1	$= 1 \oplus a_2$	$a_2 = 0$
0	1	1	1	$= 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_{23}$	$a_{23} = 0$
1	0	0	0	$= 1 \oplus a_1$	$a_1 = 1$
1	0	1	1	$= 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_{13}$	$a_{13} = 1$
1	1	0	1	$= 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_{12}$	$a_{12} = 1$
1	1	1	0	$= 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_{123}$	$a_{123} = 0$

$$P = 1 \oplus x \oplus xy \oplus xz$$

Дополнительное задание.

Пусть функция задана вектором значений $f = (11001011)$.

Найти полином Жегалкина.

ВСЕМ ДОБРА!!!