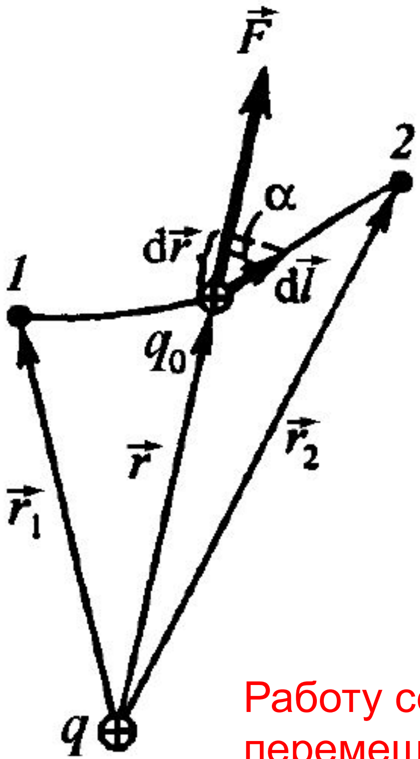
Работа электростатического поля



Постановка задачи. Точечный заряд q создает эл/ст поле. В этом поле из точки 1 в точку 2 по произвольной траектории перемещается другой заряд q_0
Чему равна работа, совершаемая полем?

Согласно определению введенному в механике работа (dA) определяется скалярным произведением:

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r});$$

dA – элементарная работа (элемент работы);

$\vec{F}$ – сила совершающая работу;

$d\vec{r}$ – перемещение в направлении действия силы;

Работу совершает, только та <u>компонента силы</u>, которая совпадает с перемещением

Согласно рисунку и определению работа электростатической силы равна:

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = F \underbrace{dl \cos\alpha}_{dr} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} dr;$$

$d\vec{r}$ – элементарное перемещение заряда в направлении действия силы (сила центральная действует радиально);

dl –элемент траектории по которой перемещае тся заряд;

Работа при движении по всей траектории из точки 1 в точку 2 равна;

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} dA = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = -\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right) = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

Т.Е. работа определяется только **положениями** начальной и конечной точек.

Из этого следует, что работа электростатического поля по перемещению заряда в по любому замкнутому контуру равна нулю.

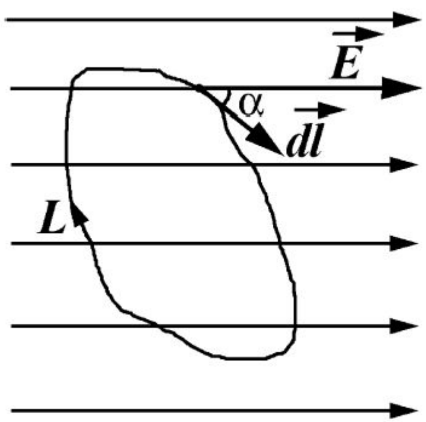
Такие поля называются *потенциальными*, а силы их создающие *консервативными*

Вывод: Электростатическое поле точечного заряда является *потенциальным*, а электростатические силы - *консервативными*

Работу можно представить еще следующим образом:

$$A_{12} = q\int_{r_1}^{r_2} \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = q\int_{r_1}^{r_2} E(r)\,dr = q\int_{r_1}^{r_2} E(l)\cdot\cos\alpha\cdot dl = q\int_{r_1}^{r_2}\left(\vec{E}(l)\cdot d\vec{l}\right)$$

Величина $\int_{r_1}^{r_2}\left(\vec{E}(l)\cdot d\vec{l}\right)$ т.е. линейный интеграл (т.е. взятый по линии) называется ***циркуляцией вектора напряженности***, и представляет собой работу при перемещении единичного положительного заряда.



$$\oint_L \left(\vec{E}(l)\cdot d\vec{l}\right) = 0$$

Теорема о циркуляции вектора *E*. ***Циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю.***

Потенциальная энергия заряда

В потенциальном поле тела обладают потенциальной энергией и тела могут совершать работу за счет убыли потенциальной энергии .

Представим выражение для работы A_{12} на слайде (1) при переходе тела из 1-2 в виде:

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r_2} = W_1 - W_2$$

тогда правая часть это разность потенциальных энергий заряда q_0 *(пробного заряда)* в начальной и конечной точках поля заряда **q**:

Поскольку потенциальную энергию заряда q_0, находящегося в поле заряда **q** можно определить с точностью до константы, то выражение для энергии :

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r} + const$$

При удалении заряда на бесконечность, **W** обращается в нуль, получаем: *const* = 0.

Для *одноименных* зарядов потенциальная энергия их взаимодействия **положительна** (***отталкивание***), для *разноименных* зарядов **– отрицательна *(притяжения).***

Потенциальная энергия **W** заряда q_0 находящемся в поле системы из ***n*** точечных зарядов равна сумме его энергий, создаваемых каждым из зарядов в отдельности ***U***:

$$W_0 = q_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

10. Потенциал и разность потенциалов электростатического поля заряда

Энергетическая характеристика поля, **независящая** от пробного заряда q_0 и равная:

$$\varphi = \frac{\text{энергия}}{\text{заряд}} = \frac{W}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

называется -***потенциал***.

<u>*Потенциал*</u> - *скалярная* величина, определяемая потенциальной энергией единичного положительного заряда, помещенного в эту точку.

Работа с помощью этого понятия выражается ***разностью потенциалов*** в начальной и конечной точках:

$$A_{12} = W_1 - W_2 = q_0\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = q_0\Delta\varphi$$

Тогда разность потенциалов:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \Delta\varphi = \frac{A_{12}}{q_0} = \int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Интегрировать можно по любому пути.

Другое определение потенциала – это работа по перемещению единичного положительно заряда из данной точки на бесконечность:

$$A_\infty = q_0 \cdot \varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{A_\infty}{q_0}$$

Потенциальная энергия на бесконечности (т. е. за пределами поля) равна нулю, следовательно, и потенциал тоже и из формула для работы следует это определение :

Из определения потенциала видно, что это алгебраическая величина:

$$\varphi = \frac{W}{q_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$$

$\varphi > 0$, если $q > 0$; $\varphi < 0$, если $q < 0$.

Если поле создается системой зарядов q_1, $q_2 \ldots q_n$, то потенциал результирующего поля в любой точке найдется на основании принципа суперпозиции, т. е.

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i$$

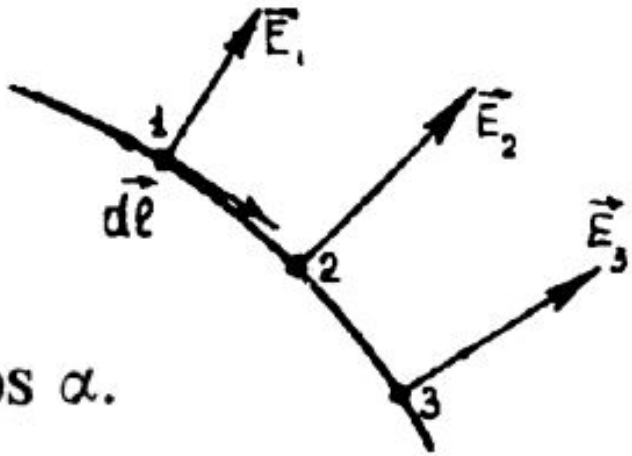
где φ_i — потенциал поля в данной точке от заряда q_i. Т. о., при наложении электростатических полей потенциал результирующего поля равен алгебраической сумме потенциалов слагаемых полей. В этом состоит значительное преимущество энергетической характеристики поля — потенциала перед силовой характеристикой поля — напряженностью, являющейся векторной величиной.

Связь между напряженностью поля и потенциалом.

Поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал, называется **эквипотенциальной**:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3.$$

Если заряд q_0 по эквипотенциальной поверхности из точки. 1 перемещается в точку 2. **Элементарная работа** совершаемая полем:



$$dA = -q_0 d\varphi = 0 \quad \text{т. к.} \quad d\varphi = 0.$$

С другой стороны $dA = q_0 E dl \cos\alpha.$

Так как $q_0 \neq 0$, $\vec{E} \neq 0$, $\vec{dl} \neq 0$, то $\cos\alpha = 0$.

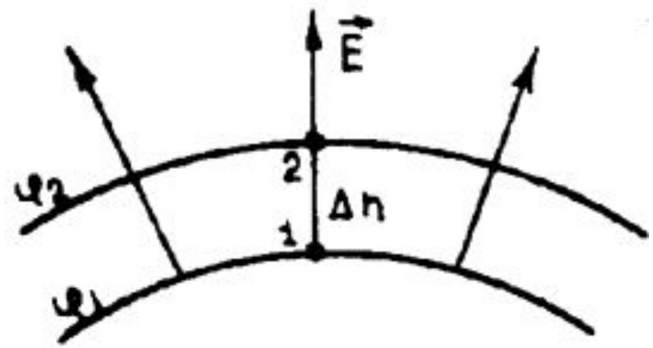
Следовательно, $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$,

т. е. вектор Е перпендикулярен к эквипотенциальной поверхности в каждой ее точке (см. рисунок)

Зададим две эквипотенциальные поверхности с потенциалами:

φ_1 и φ_2 – расстояние между ними Δn. Здесь Δn

-взято, чтобы показать что расстояние по нормали.



Расстояние между поверхностями очень мало так, что напряженность не меняется

Работа перемещения через потенциал и напряженность поля:

$$\Delta A = -q_0 \Delta\varphi \text{ и } A = q_0 E \cdot \Delta n.$$

Следовательно $E \cdot \Delta n = -\Delta\varphi$ или $E = -\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta n}$,

т. е. напряженность электростатического поля равна изменению потенциала на единицу длины вдоль линии напряженности. Знак «минус» означает, что вдоль линии напряженности потенциал убывает.

В пределе $E = -\dfrac{d\varphi}{dn}$ т. е. напряженность равна градиенту потенциала с обратным знаком.

1. Потенциал бесконечно заряженной плоскости между точками, лежащими на расстояниях *x_1*, и *x_2* от плоскости:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} E\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_2 - x_1)$$

2. Разность потенциалов между заряженными плоскостями

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E\,dx = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,dx = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

3. *Поле равномерно заряженной сферической поверхности*

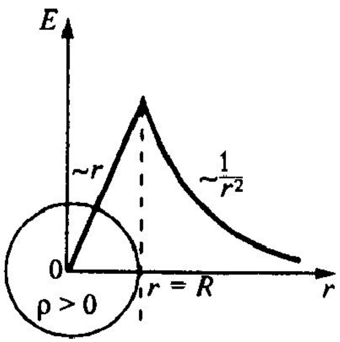
R- радиус сферы (внутри сферы зарядов нет)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E\,dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\,dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Внутри сферы потенциал

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$$

4. Потенциал *равномерно объемно заряженного шара R- радиус шара*



$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Вне шара $r > R$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$$

На поверхности шара $r = R$

Внутри шара $r < R$

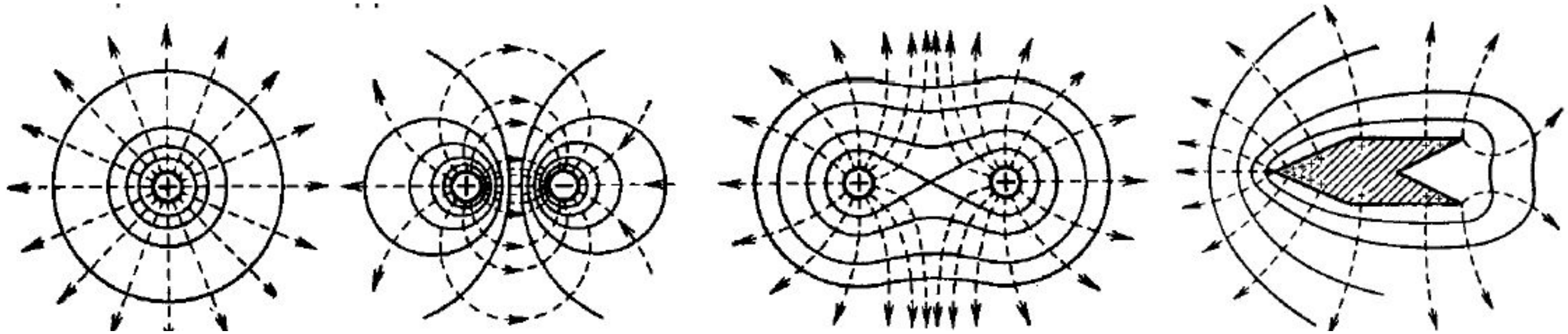
$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}$$

Единица потенциала - вольт (В):

1В есть потенциал такой точки поля, в которой заряд в 1Кл обладает потенциальной энергией 1Дж (1В=1Дж/1Кл).

Принцип суперпозиции : потенциал поля, создаваемого несколькими зарядами (системой), равен ***алгебраической*** *сумме* потенциалов полей всех этих зарядов.

Графическое изображение распределения потенциала - *эквипотенциальные поверхности,* во всех точках которых потенциал имеет одно и то же значение.



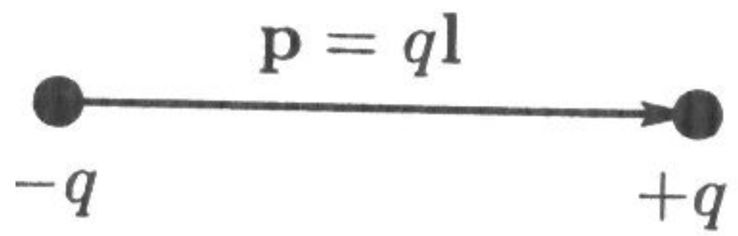
Разность потенциалов между двумя соседними эквипотенциальными поверхностями одинакова.

Густота эквипотенциальных поверхностей характеризует напряженность поля в разных точках.

Вектор ***E*** *перпендикулярен* эквипотенциальным поверхностям и *направлен в сторону убывания потенциала.*

11. Диполь

Электрический диполь (или двойным электрическим полюсом)- система двух равных по модулю разноименных точечных зарядов (**+*q*, -*q***), расстояние ***l*** между которыми ***l*** **<<*r*** расстояния ***r*** до точки, в которой это поле рассматривается



Плечо диполя l - вектор, направленный по оси диполя от **« – »** к **« + »**

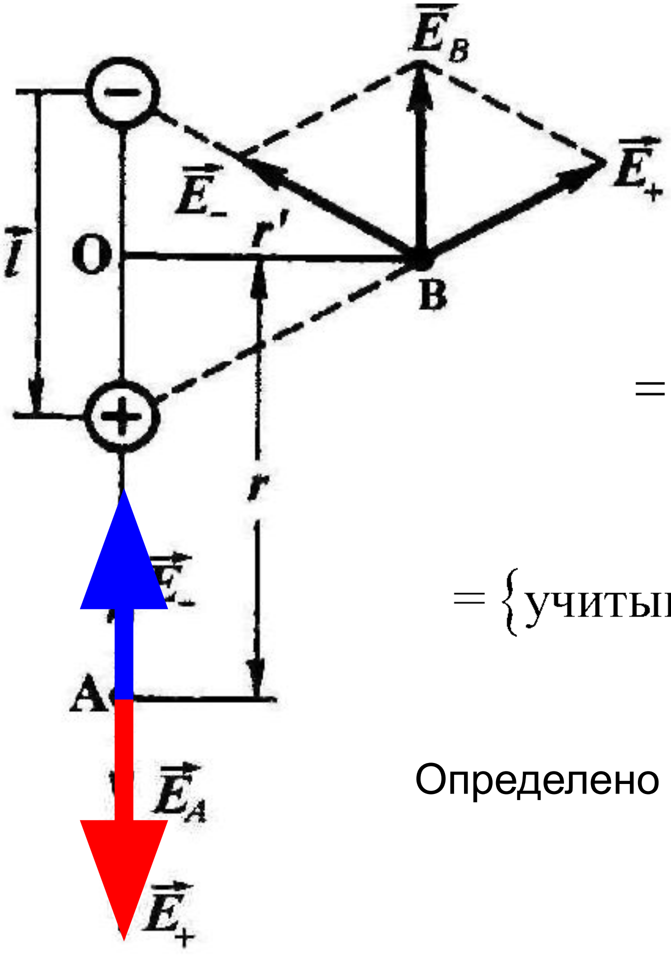
Электрический момент диполя –

$\boldsymbol{p_e}$ - **вектор**, совпадающий по направлению с плечом диполя и равный:

$$\vec{p}_e = |q|\vec{l}$$

Используя **принцип суперпозиции**
рассчитаем электростатическое поле диполя…

Случай 1) Напряженность поля диполя на продолжении его оси в точке **A**



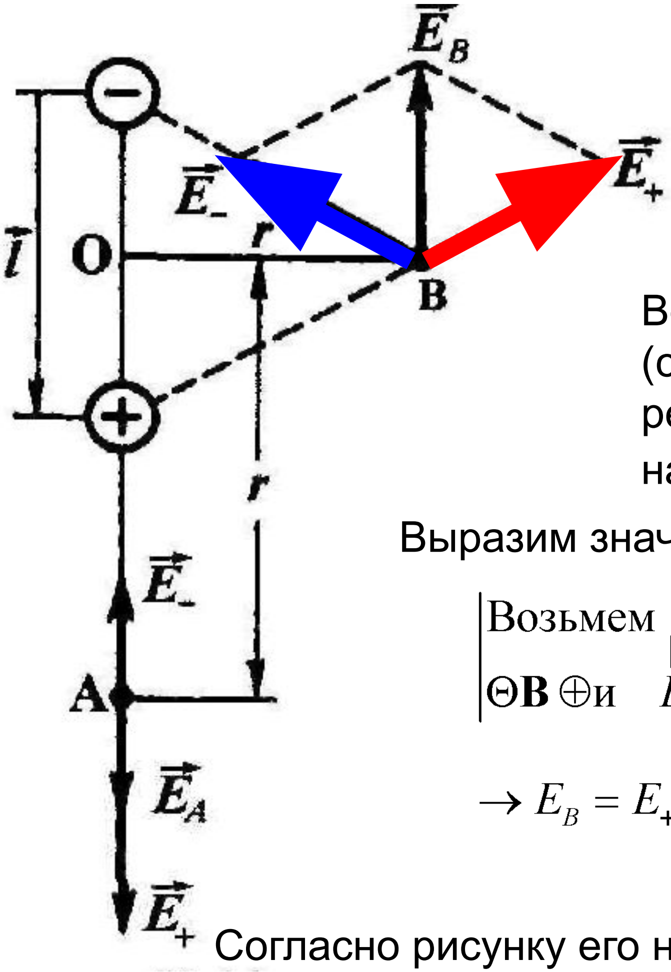
$$E_A = k\frac{q}{(r - l/2)^2} - k\frac{q}{(r + l/2)^2} =$$

$$= \frac{q(r + l/2)^2 - q(r - l/2)^2}{(r - l/2)^2 \cdot (r + l/2)^2} = \frac{2qlr}{\left(r^2 - (l/2)^2\right)^2} =$$

$$= \left\{\text{учитывая, что } r >> l \text{ получаем}\right\} = k\frac{2ql}{r^3} = k\frac{2p_e}{r^3}$$

Определено и направление поля: **<u>оно направлено от диполя</u>**

Случай 2) Напряженность поля в точке ***B***, лежащей на перпендикуляре, восстановленном к оси диполя из его середины.



Модуль вектора напряженности поля в точке **B** от обеих зарядов равен:

$$E_+ = E_- = k\frac{q}{(r')^2 + (l/2)^2} = k\frac{q}{(r')^2}$$

Воспользовавшись принципом суперпозиции (сложения) векторов получим направление результирующего поля (см.рис) и величину напряженности в точке **B**.

Выразим значение этой напряженности через значение диполя.

$$\left|\begin{matrix}\text{Возьмем } \Delta - \text{ки} \\ \Theta\mathbf{B} \oplus\text{и } \vec{E}_{\mathbf{B}}\vec{E}_+\mathbf{B}\end{matrix} : \left\langle\begin{matrix}\text{Они подобны и} \\ \text{составим пропоцию}\end{matrix}\right\rangle\right| \begin{matrix} l \div \sqrt{(r')^2 + (l/2)^2} \\ E_B \div E_+ \end{matrix}$$

$$\to E_B = E_+\frac{l}{\sqrt{(r')^2 + (l/2)^2}} = E_+\frac{l}{(r')}; \quad \textbf{или} \quad E_B = k\frac{q}{(r')^2}\frac{l}{r'} = k\frac{p_e}{(r')^3}$$

Согласно рисунку его направление противоположно вектору ***l***, **поэтому**

$$E_B = k\frac{q}{(r')^2}\frac{l}{r'} = -k\frac{p_e}{(r')^3} \quad \text{векторный вид}: \ \vec{E}_B = k\frac{q}{(r')^2}\frac{l}{r'} = k\frac{\vec{p}_e}{(r')^3}$$

Общий случай 3) сводится к двум рассмотренным частным.

Постановка задачи:

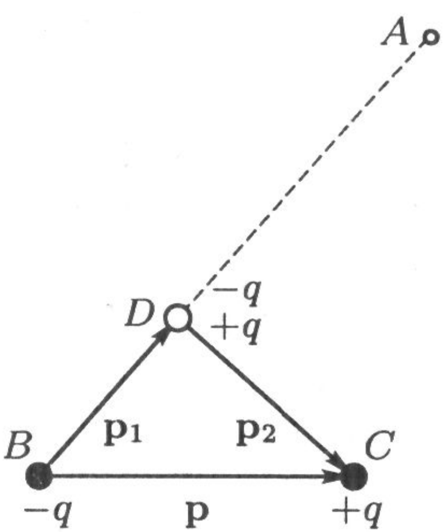
Найти напряженность поля диполя ***p*** (***BC***) в точке ***A*** в СГС-системе (эту систему используем, чтобы избавится от коэффициента k).

Решение:

а) на линии ***BA*** в точку ***D*** поместим два заряда ***+q*** и ***–q***, (заряды друг друга компенсируют - поле не изменится), но при этом получаем два диполя (см. рис.);
б) из точки ***D*** направление на ***C*** составляет перпендикуляр с прямой ***BC***.

Таким образом напряженность поля в точке ***A***
Можно представить в виде суперпозиции полей от двух диполей с моментами ***p₁*** (***BD***) и ***p₂***(***DC***):

$$\vec{E} = \underset{p_\parallel}{\frac{2\vec{p}_1}{r^3}} - \underset{p_\perp}{\frac{\vec{p}_2}{r^3}};$$



Согласно операциям с векторами $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}$ или $\vec{p}_2 = \vec{p} - \vec{p}_1$. Здесь $\vec{p}$ – это исходный диполь. **Делаем замену...**

$$\vec{E} = \frac{3\vec{p}_1}{r^3} - \frac{\vec{p}}{r^3};$$

Модуль $\vec{p}_1$ через исходный диполь $p_1 = p \cdot \cos\alpha$ или $(\vec{p}\vec{n})$.

$\vec{n}$ единичный вектор направления на точку A Получили :

$$\vec{E} = \frac{3(\vec{p}\vec{n})}{r^4}\vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3};$$

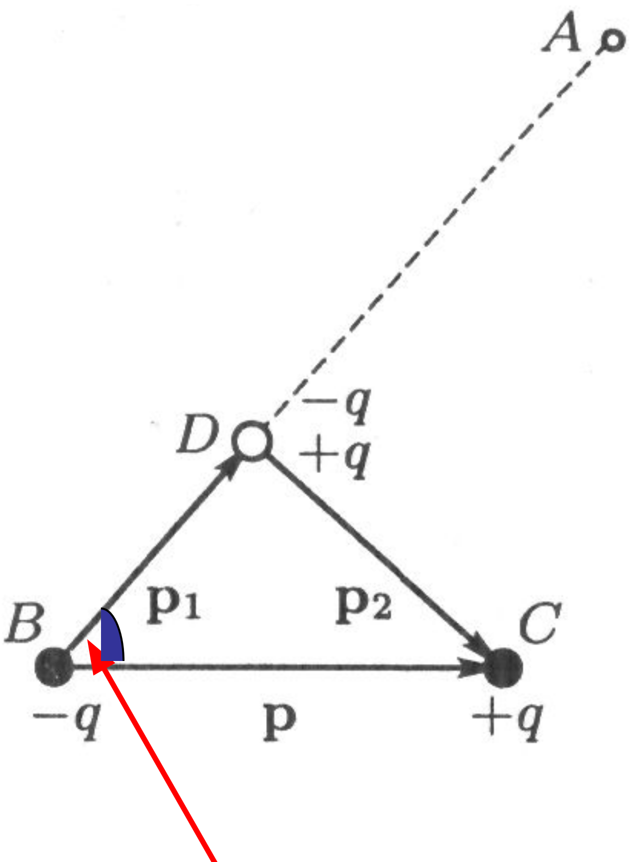
$\vec{r}$ - вектор положения точки A относительно диполя.

Векторная запись…

Определим модуль вектора напряженности в точке ***A***:

$$\vec E = \frac{2\vec p_1}{r^3} - \frac{\vec p_2}{r^3}$$

$$\vec p_1 \parallel \vec r \qquad \vec p_2 \perp \vec r$$



$$E = \sqrt{E_\parallel^2 + E_\perp^2} = \sqrt{\left(\frac{2p_1}{r^3}\right)^2 + \left(\frac{p_2}{r^3}\right)^2} = \frac{p}{r^3}\sqrt{4\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{p}{r^3}\sqrt{4\cos^2\alpha + \underbrace{\sin^2\alpha}_{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1}}$$

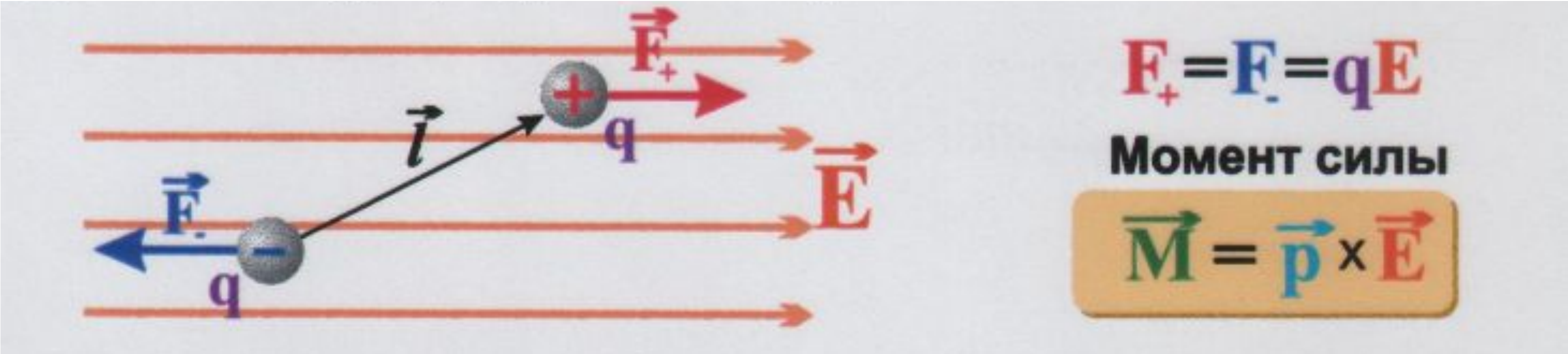
$$\text{Результат}: \; E = \frac{p}{r^3}\sqrt{1+3\cos^2\alpha}$$

α -угол под которым видна точка А от диполя при этом $l \ll r$

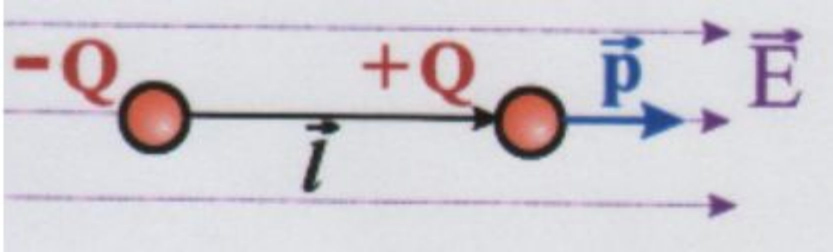
Диполь во внешнем электростатическом поле

На заряды диполя действует силы – возникает момент, поворачивающий электрический диполя вдоль направления поля.

Если диполь располагается **параллельно** электрическому полю – положение **устойчивое**, если **антипараллелено - неустойчиво**.

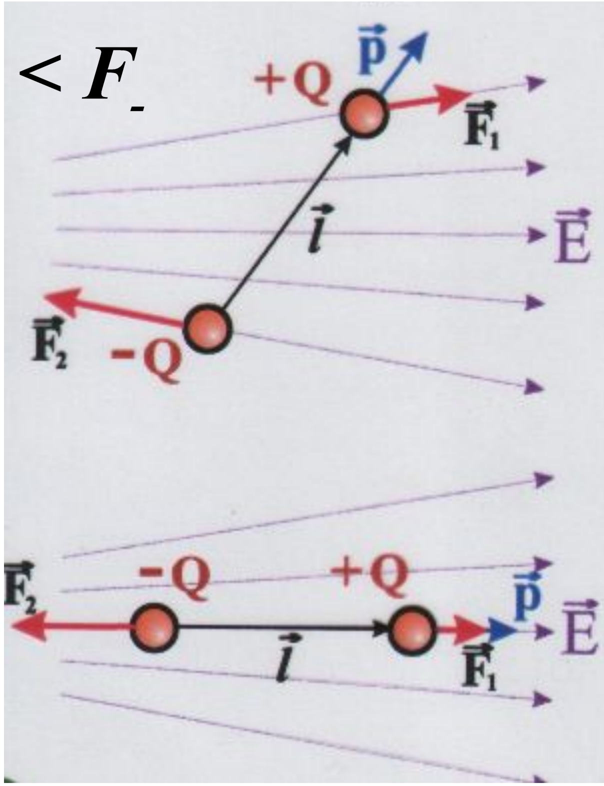


В **однородном поле** результирующая сил равна нулю:
силы действующие на **положительный** и **отрицательный** заряды диполя равны по модулю, но противоположны по направлению и диполь покоится



В неоднородном поле действующие на диполь силы не равны

$F_+ < F_-$



На диполь действуют:

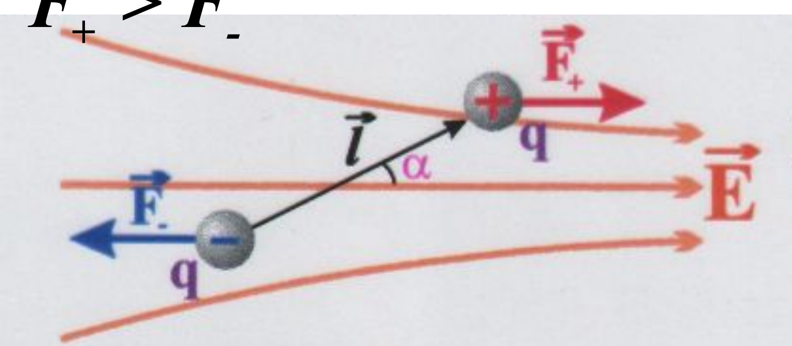
1. Момент не равных по модулю кулоновских сил F_1 и F_2, вращающий диполь до выполнения условия $\vec{p} \parallel \vec{E}$.

2. Равнодействующая двух сил

$$F = F_2 - F_1 = p\frac{dE}{dx},$$

втягивающая диполь в область более сильного поля

$F_+ > F_-$



Во внешнем неоднородном поле диполь :

· поворачивается по полю;

•передвигает в область поля с большей напряженностью, под действие результирующей силы

•(втягивается в область более сильного поля).