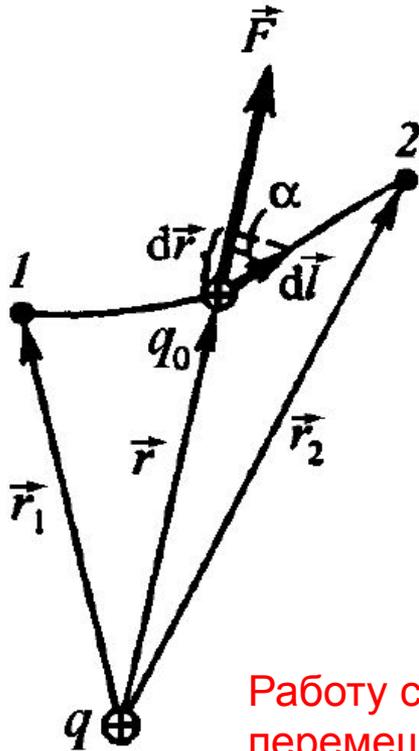


# Работа электростатического поля



**Постановка задачи.** Точечный заряд  $q$  создает эл/ст поле. В этом поле из точки 1 в точку 2 по произвольной траектории перемещается другой заряд  $q_0$ .  
Чему равна работа, совершаемая полем?

Согласно определению введенному в механике работа ( $dA$ ) определяется скалярным произведением:

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r});$$

$dA$  – элементарная работа (элемент работы);

$F$  – сила совершающая работу;

$d\vec{r}$  – перемещение в направлении действия силы;

Работу совершает, только та компонента силы, которая совпадает с перемещением

Согласно рисунку и определению работа электростатической силы равна:

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = F dl \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} dr;$$

$dr$  – элементарное перемещение заряда в направлении действия силы (сила центральная действует радиально);  
 $dl$  –элемент траектории по которой перемещается заряд;

Работа при движении по всей траектории из точки 1 в точку 2 равна;

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} dA = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = -\frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Т.Е. работа определяется только **положениями** начальной и конечной точек.

Из этого следует, что работа электростатического поля по перемещению заряда в по любому замкнутому контуру равна нулю.

Такие поля называются потенциальными, а силы их создающие консервативными

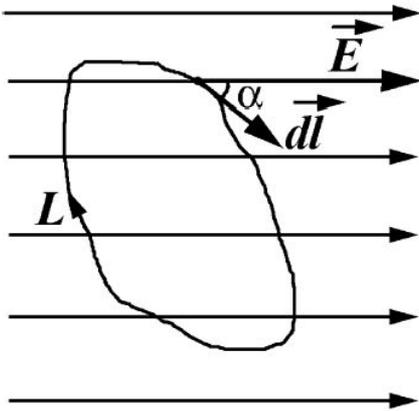
**Вывод:** Электростатическое поле точечного заряда является потенциальным, а электростатические силы - консервативными

Работу можно представить еще следующим образом:

$$A_{12} = q \int_{r_1}^{r_2} \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = q \int_{r_1}^{r_2} E(r) dr = q \int_{r_1}^{r_2} E(l) \cdot \cos \alpha \cdot dl = q \int_{r_1}^{r_2} (\vec{E}(l) \cdot d\vec{l})$$

Величина  $\int_{r_1}^{r_2} (\vec{E}(l) \cdot d\vec{l})$

т.е. линейный интеграл (т.е. взятый по линии) называется **циркуляцией вектора напряженности**, и представляет собой работу при перемещении единичного положительного заряда.



$$\oint_L (\vec{E}(l) \cdot d\vec{l}) = 0$$

**Теорема о циркуляции вектора  $E$ .** *Циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю.*

# Потенциальная энергия заряда

В потенциальном поле тела обладают потенциальной энергией и тела могут совершать работу за счет убыли потенциальной энергии .

Представим выражение для работы  $A_{12}$  на слайде (1) при переходе тела из 1-2 в виде:

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r_2} = W_1 - W_2$$

тогда правая часть это разность потенциальных энергий заряда  $q_0$  (пробного заряда) в начальной и конечной точках поля заряда  $q$ :

Поскольку потенциальную энергию заряда  $q_0$ , находящегося в поле заряда  $q$  можно определить с точностью до константы, то выражение для энергии :  $W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r} + const$

При удалении заряда на бесконечность,  $W$  обращается в нуль, получаем:  $const = 0$ .

Для **одноименных** зарядов потенциальная энергия их взаимодействия **положительна (отталкивание)**, для **разноименных** зарядов – **отрицательна (притяжения)**.

Потенциальная энергия  $W$  заряда  $q_0$  находящемся в поле системы из  $n$  точечных зарядов равна сумме его энергий, создаваемых каждым из зарядов в отдельности  $U$ :

$$W_0 = q_0 \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

# 10. Потенциал и разность потенциалов электростатического поля заряда

Энергетическая характеристика поля, **независящая** от пробного заряда  $q_0$  и равная:

$$\varphi = \frac{\text{энергия}}{\text{заряд}} = \frac{W}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad \text{называется -потенциал.}$$

Потенциал - скалярная величина, определяемая потенциальной энергией единичного положительного заряда, помещенного в эту точку.

Работа с помощью этого понятия выражается **разностью потенциалов** в начальной и конечной точках:

$$A_{12} = W_1 - W_2 = q_0 (\varphi_1 - \varphi_2) = q_0 \Delta\varphi$$

Тогда разность потенциалов:  $\varphi_1 - \varphi_2 = \Delta\varphi = \frac{A_{12}}{q_0} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$  Интегрировать можно по любому пути.

Другое определение потенциала – **это работа по перемещению единичного положительно заряда из данной точки на бесконечность:**

$$A_\infty = q_0 \cdot \varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{A_\infty}{q_0}$$

Потенциальная энергия на бесконечности (т. е. за пределами поля) равна нулю, следовательно, и потенциал тоже и из формула для работы следует это определение :

Из определения потенциала видно, что это алгебраическая величина:

$$\varphi = \frac{W}{q_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}$$

$\varphi > 0$ , если  $q > 0$ ;  $\varphi < 0$ , если  $q < 0$ .

Если поле создается системой зарядов  $q_1, q_2 \dots q_n$ , то потенциал результирующего поля в любой точке найдется на основании принципа суперпозиции, т. е.

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n = \sum_{i=1}^n \varphi_i$$

где  $\varphi_i$  — потенциал поля в данной точке от заряда  $q_i$ . Т. о., при наложении электростатических полей потенциал результирующего поля равен алгебраической сумме потенциалов слагаемых полей. В этом состоит значительное преимущество энергетической характеристики поля — потенциала перед силовой характеристикой поля — напряженностью, являющейся векторной величиной.

## Связь между напряженностью поля и потенциалом.

Поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал, называется **эквипотенциальной**:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3.$$

Если заряд  $q_0$  по эквипотенциальной поверхности из точки 1 перемещается в точку 2. **Элементарная работа** совершаемая полем:

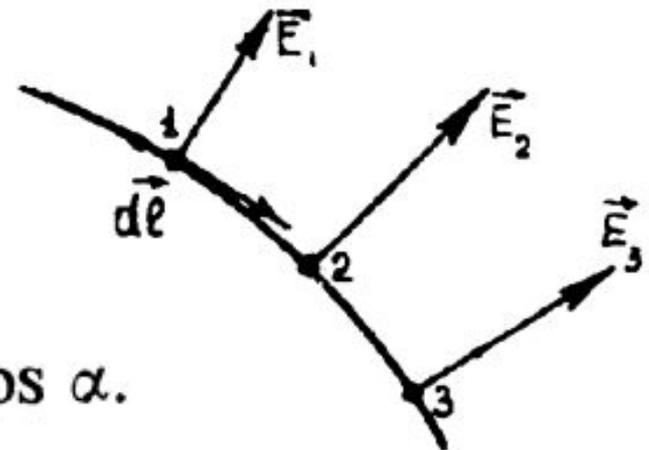
$$dA = -q_0 d\varphi = 0 \quad \text{т. к. } d\varphi = 0.$$

$$\text{С другой стороны} \quad dA = q_0 E dl \cos \alpha.$$

Так как  $q_0 \neq 0$ ,  $\vec{E} \neq 0$ ,  $\vec{dl} \neq 0$ , то  $\cos \alpha = 0$ .

$$\text{Следовательно, } \alpha = \frac{\pi}{2},$$

т. е. вектор  $\vec{E}$  перпендикулярен к эквипотенциальной поверхности в каждой ее точке (см. рисунок )



Зададим две эквипотенциальные поверхности с потенциалами:

$\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – расстояние между ними  $\Delta n$ . Здесь  $\Delta n$

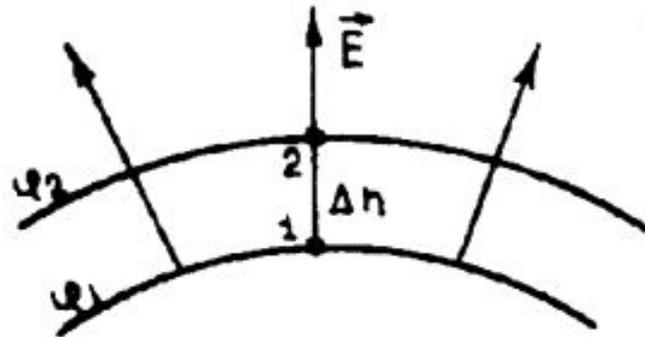
-взято, чтобы показать что расстояние по нормали.

Расстояние между поверхностями очень мало так, что напряженность не меняется

Работа перемещения через потенциал и напряженность поля:

$$\Delta A = -q_0 \Delta \varphi \text{ и } A = q_0 E \cdot \Delta n.$$

Следовательно  $E \cdot \Delta n = -\Delta \varphi$  или  $E = -\frac{\Delta \varphi}{\Delta n}$ ,



т. е. напряженность электростатического поля равна изменению потенциала на единицу длины вдоль линии напряженности. Знак «минус» означает, что вдоль линии напряженности потенциал убывает.

В пределе  $E = -\frac{d\varphi}{dn}$

т. е. напряженность равна градиенту потенциала с обратным знаком.

**1. Потенциал бесконечно заряженной плоскости между точками, лежащими на расстояниях  $x_1$  и  $x_2$  от плоскости:**

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} E dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (x_2 - x_1)$$

**2. Разность потенциалов между заряженными плоскостями**

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E dx = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

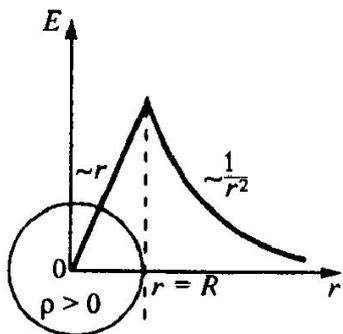
**3. Поле равномерно заряженной сферической поверхности  $R$ - радиус сферы (внутри сферы зарядов нет)**

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Внутри сферы потенциал

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$$

**4. Потенциал равномерно объемно заряженного шара  $R$ - радиус шара**



$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Вне шара  $r > R$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$$

На поверхности шара  $r = R$

Внутри шара  $r < R$

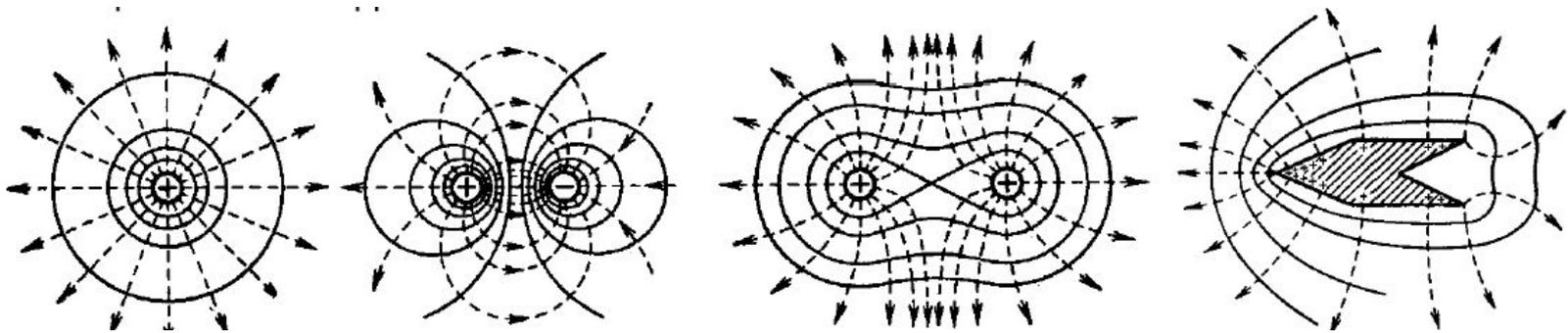
$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}$$

*Единица потенциала* - вольт (В):

1В есть потенциал такой точки поля, в которой заряд в 1Кл обладает потенциальной энергией 1Дж ( $1\text{В}=1\text{Дж}/1\text{Кл}$ ).

*Принцип суперпозиции*: потенциал поля, создаваемого несколькими зарядами (системой), равен **алгебраической** сумме потенциалов полей всех этих зарядов.

Графическое изображение распределения потенциала - *эквипотенциальные поверхности*, во всех точках которых потенциал имеет одно и то же значение.



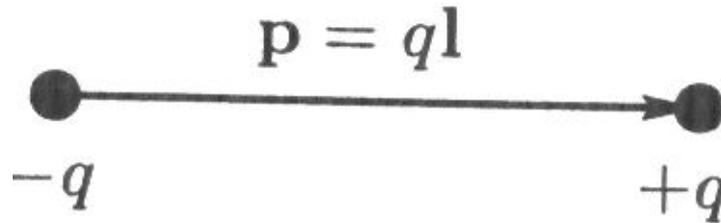
Разность потенциалов между двумя соседними эквипотенциальными поверхностями одинакова.

Густота эквипотенциальных поверхностей характеризует напряженность поля в разных точках.

Вектор ***E*** перпендикулярен эквипотенциальным поверхностям и *направлен в сторону убывания потенциала*.

# 11. Диполь

**Электрический диполь** (или двойным электрическим полюсом)- система двух равных по модулю разноименных точечных зарядов ( $+q, -q$ ), расстояние  $l$  между которыми  $l \ll r$  расстояния  $r$  до точки, в которой это поле рассматривается



**Плечо диполя  $l$**  - вектор, направленный по оси диполя от « $-$ » к « $+$ »

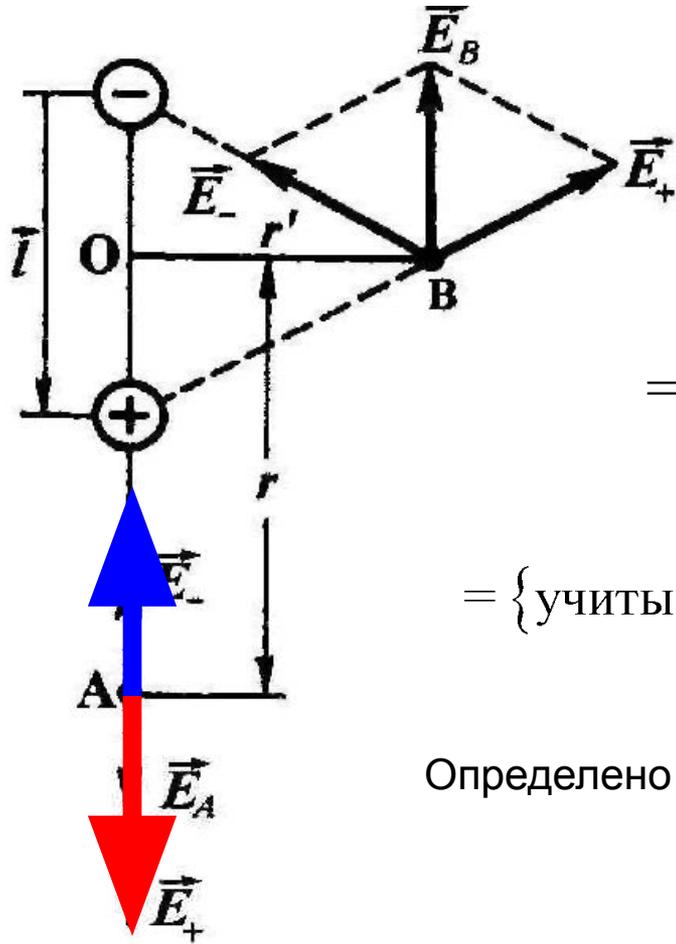
**Электрический момент диполя –**

$p_e$  - вектор, совпадающий по направлению с плечом диполя и равный:

$$p_e = |q| l$$

Используя принцип суперпозиции  
рассчитаем электростатическое поле диполя...

Случай 1) Напряженность поля диполя на продолжении его оси в точке **A**



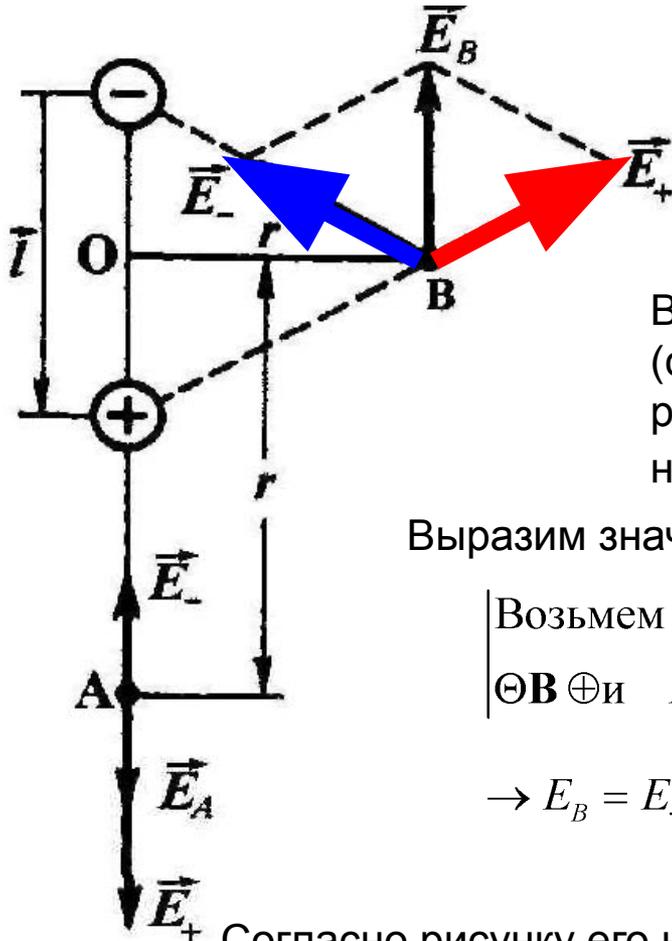
$$E_A = k \frac{q}{(r - l/2)^2} - k \frac{q}{(r + l/2)^2} =$$

$$= \frac{q(r + l/2)^2 - q(r - l/2)^2}{(r - l/2)^2 \cdot (r + l/2)^2} = \frac{2qlr}{(r^2 - (l/2)^2)^2} =$$

$$= \left\{ \text{учитывая, что } r \gg l \text{ получаем} \right\} = k \frac{2ql}{r^3} = k \frac{2p_e}{r^3}$$

Определено и направление поля: оно направлено от диполя

**Случай 2)** Напряженность поля в точке **B**, лежащей на перпендикуляре, восстановленном к оси диполя из его середины.



Модуль вектора напряженности поля в точке **B** от обоих зарядов равен:

$$E_+ = E_- = k \frac{q}{(r')^2 + (l/2)^2} = k \frac{q}{(r')^2}$$

Воспользовавшись принципом суперпозиции (сложения) векторов получим направление результирующего поля (см.рис) и величину напряженности в точке **B**.

Выразим значение этой напряженности через значение диполя.

$$\left| \begin{array}{l} \text{Возьмем } \Delta_{-} \text{ ки} \\ \ominus \mathbf{B} \oplus \text{ и } E_{\mathbf{B}} E_{+} \mathbf{B} \end{array} \right. : \left\langle \begin{array}{l} \text{Они подобны и} \\ \text{составим пропорцию} \end{array} \right\rangle \left| \begin{array}{l} l \div \sqrt{(r')^2 + (l/2)^2} \\ E_{\mathbf{B}} \div E_{+} \end{array} \right.$$

$$\rightarrow E_{\mathbf{B}} = E_{+} \frac{l}{\sqrt{(r')^2 + (l/2)^2}} = E_{+} \frac{l}{(r')} ; \quad \text{или} \quad E_{\mathbf{B}} = k \frac{q}{(r')^2} \frac{l}{r'} = k \frac{p_e}{(r')^3}$$

Согласно рисунку его направление противоположно вектору  $l$ , **поэтому**

$$E_{\mathbf{B}} = k \frac{q}{(r')^2} \frac{l}{r'} = -k \frac{p_e}{(r')^3} \quad \text{векторный вид: } \vec{E}_{\mathbf{B}} = k \frac{q}{(r')^2} \frac{l}{r'} = k \frac{p_e}{(r')^3}$$

### Общий случай 3) сводится к двум рассмотренным частным.

#### Постановка задачи:

Найти напряженность поля диполя  $\mathbf{p}$  ( $BC$ ) в точке  $A$  в СГС-системе (эту систему используем, чтобы избавиться от коэффициента  $k$ ).

#### Решение:

- а) на линии  $BA$  в точку  $D$  поместим два заряда  $+q$  и  $-q$ , (заряды друг друга компенсируют - поле не изменится), но при этом получаем два диполя (см. рис.);  
 б) из точки  $D$  направление на  $C$  составляет перпендикуляр с прямой  $BC$ .

Таким образом напряженность поля в точке  $A$

Можно представить в виде суперпозиции полей от двух диполей с моментами  $\mathbf{p}_1$  ( $BD$ ) и  $\mathbf{p}_2$  ( $DC$ ):

$$\mathbf{E} = \frac{2\mathbf{p}_1}{r^3} - \frac{\mathbf{p}_2}{r^3};$$

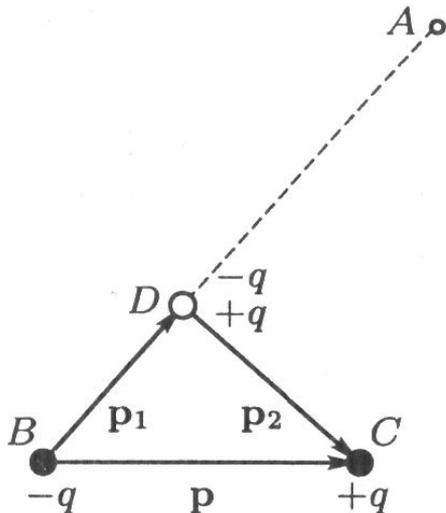
Согласно операциям с векторами  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$  или  $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p} - \mathbf{p}_1$ . Здесь  $\mathbf{p}$  - это исходный диполь. Делаем замену...

$$\mathbf{E} = \frac{3\mathbf{p}_1}{r^3} - \frac{\mathbf{p}}{r^3};$$

Модуль  $\mathbf{p}_1$  через исходный диполь  $p_1 = p \cdot \cos \alpha$  или  $(pn)$ .

$\mathbf{n}$  - единичный вектор направления на точку  $A$ . Получили:

$$\mathbf{E} = \frac{3(pn)}{r^4} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}; \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{r} - \text{вектор положения точки } A \\ \text{относительно диполя.} \end{array} \right.$$



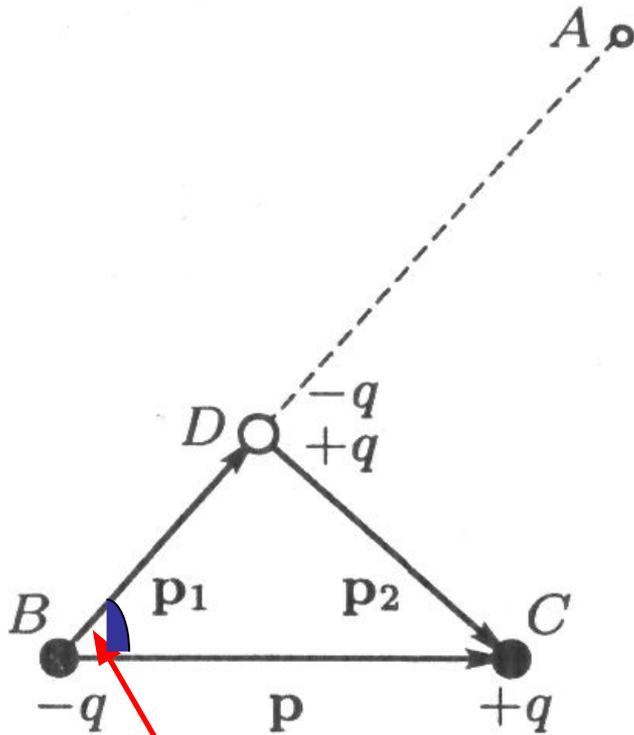
Определим модуль вектора напряженности в точке **A**:

$$\vec{E} = \frac{2p_1}{r_{\perp}^3} - \frac{p_2}{r_{\perp}^3}$$

$$E = \sqrt{E_{\perp}^2 + E_{\parallel}^2} = \sqrt{\left(\frac{2p_1}{r^3}\right)^2 + \left(\frac{p_2}{r^3}\right)^2} = \frac{1}{r^3} \sqrt{4 \cos^2 \alpha + 1}$$

$$= \frac{p}{r^3} \sqrt{4 \cos^2 \alpha + 1}$$

Результат :  $E = \frac{p}{r^3} \sqrt{4 + 3 \cos^2 \alpha}$

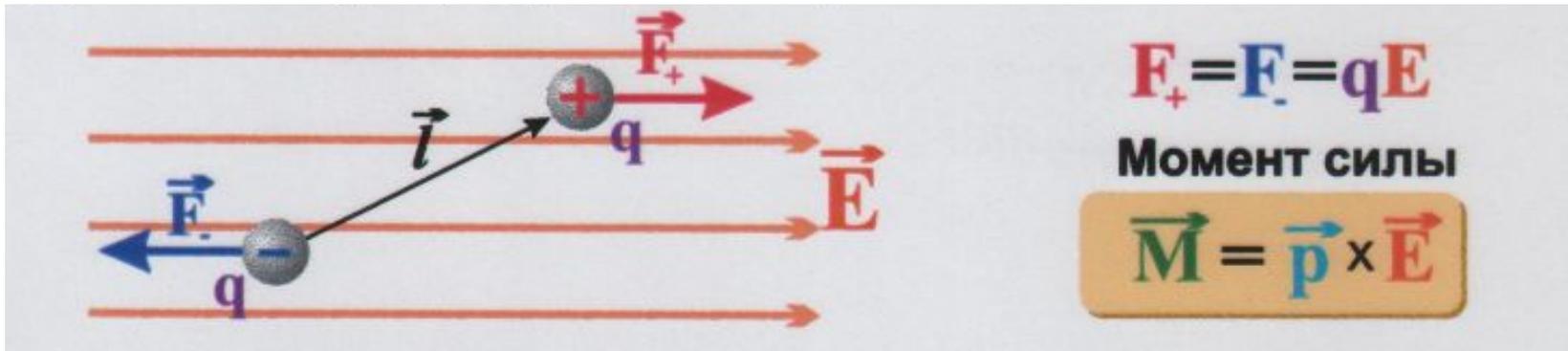


$\alpha$  - угол под которым видна точка A от диполя при этом  $l \ll r$

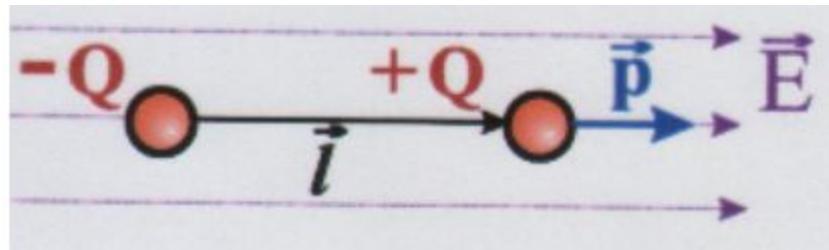
## Диполь во внешнем электростатическом поле

На заряды диполя действуют силы – возникает момент, поворачивающий электрический диполь вдоль направления поля.

Если диполь располагается **параллельно** электрическому полю – положение **устойчивое**, если **антипараллельно** – **неустойчиво**.

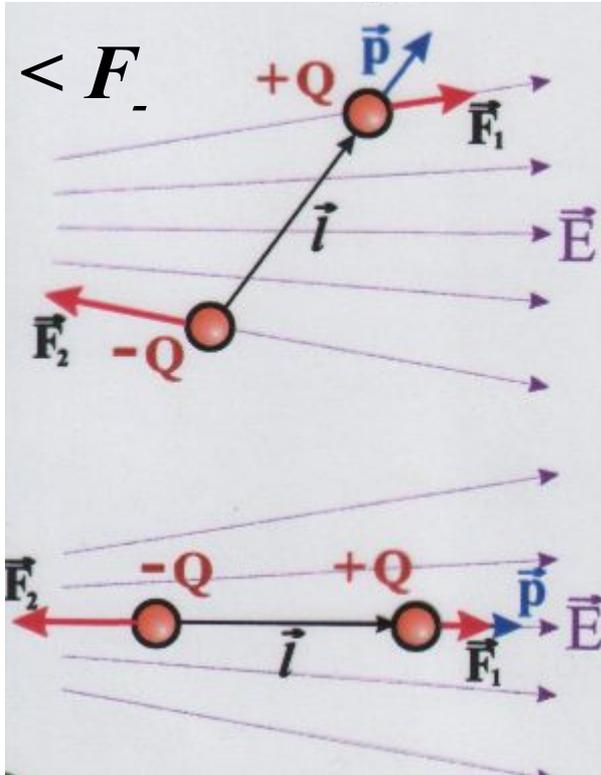


В **однородном поле** результирующая сил равна нулю: силы действующие на **положительный** и **отрицательный** заряды диполя равны по модулю, но противоположны по направлению и диполь покоится



**В неоднородном поле** действующие на диполь силы не равны

$$F_+ < F_-$$



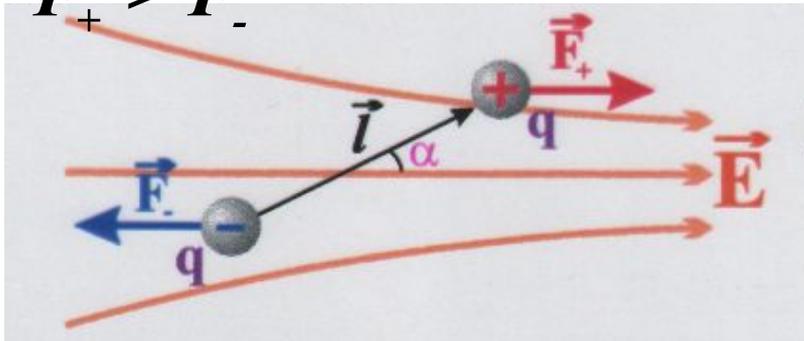
На диполь действуют:

1. Момент не равных по модулю кулоновских сил  $F_1$  и  $F_2$ , вращающий диполь до выполнения условия  $\vec{p} \parallel \vec{E}$ .
2. Равнодействующая двух сил

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1 = \mathbf{p} \frac{d\mathbf{E}}{dx},$$

втягивающая диполь в область более сильного поля

$$F_+ > F_-$$



Во внешнем неоднородном поле диполь :

- поворачивается по полю;
- передвигает в область поля с большей напряженностью, под действие результирующей силы
- (втягивается в область более сильного поля).