

**НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«Чернігівська політехніка»**

**Комп'ютерні числення**

**МОДУЛЬ 3. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ**

**ЛЕКЦІЯ 8-9. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНОЇ  
ЗМІННОЇ**

**Трунова Олена Василівна**  
доцент, к.пед.н.

**2020**

# ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

- 1. Похідна функції
- 2. Правила диференціювання ✓
- 3. Диференціал функції ✓
- 4. Похідні та диференціали вищих порядків ✓
- 5. Застосування похідної
-

## 1. Похідна функції

Нехай функція  $y = f(x)$  визначена на деякому проміжку  $X$  і точка  $x_0 \in X$ . Надамо аргументу функції приросту  $\Delta x$  ( $\Delta x > 0$  або  $\Delta x < 0$ ) такого, щоб точка  $x_0 + \Delta x \in X$ . Функція дістане при цьому приріст

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Складемо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

**Означення** Відношення приросту функції до приросту аргументу називається **середньою швидкістю зміни функції** (rate of change of function).

Це відношення показує, скільки одиниць приросту функції припадає на одиницю приросту аргументу.

✓ **Означення** Границя відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля, називається швидкістю зміни функції в даній точці або її **похідною** (derivative) і позначається одним із символів:

$$f'(x_0), \quad y'(x_0), \quad \frac{df(x_0)}{dx} \quad d$$

Отже, за означенням

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \neq \quad (1)$$

Якщо похідна функції  $y = f(x)$  в точці  $x_0$  існує, то функція називається **диференційовною** (differentiable function) в точці  $x_0$ .

Якщо функція **диференційовна** в кожній точці деякого проміжку  $X$ , то вона називається **диференційовною** на проміжку  $X$ .

Операція відшукування похідної називається **диференціюванням**.

## Геометричний зміст похідної (geometric sense of derivative)

Похідна функції  $y = f(x)$  в точці  $x_0$  дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної (tangent line) до графіка даної функції у точці  $M_0(x_0, f(x_0))$ , тобто

$$\underline{f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha}, \quad (2)$$

де  $\alpha$  - кут, який утворює дотична  $P$  з додатним напрямком осі  $Ox$  (рис. 1).

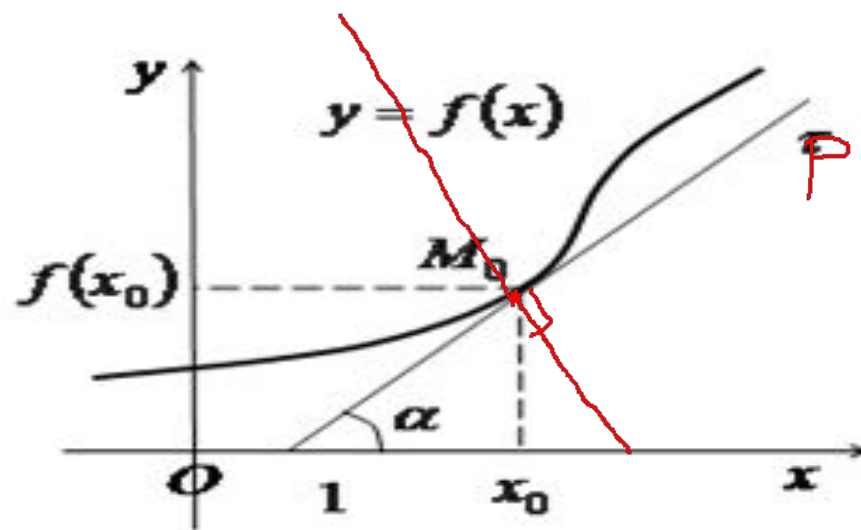


Рис. 1

## Зв'язок між диференційовністю функції та її неперервністю

Теорема Якщо функція  $y = f(x)$  диференційовна в точці  $x = x_0$ , то вона неперервна в цій точці.



На основі геометричного змісту похідної рівняння дотичної до графіка функції  $y = f(x)$  записується таким чином:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

✓ Якщо неперервна функція в точці  $x_0$  має нескінченну похідну, тоді дотичною до графіка функції в точці  $M_0(x_0; y_0)$  буде пряма  $x = x_0$ .

Для нормалі, тобто прямої, що проходить через точку дотику  $M_0(x_0; y_0)$ , перпендикулярно до дотичної

(пряма  $M_0N$ ), рівняння має вигляд

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad f'(x_0) \neq 0.$$

У випадку  $f'(x_0) = 0$  нормаллю буде пряма  $x = x_0$ ; якщо функція в точці  $x_0$  має нескінченну похідну, тоді нормаллю до кривої буде пряма  $y = f(x_0)$ .

## *Фізичний зміст похідної*

Під фізичним змістом похідної розуміють швидкість зміни функції в даній точці. Наприклад:

1) при русі тіла швидкість  $v$  в даний момент часу  $t$  є похідною від шляху  $s(t)$ :  $v = \frac{ds}{dt}$ ;

2) при обертovому русі твердого тіла навколо осі  $Ox$  кутова швидкість  $\omega$  в даний момент часу  $t$  є похідною від кута повороту  $\phi(t)$ :  $\omega = \frac{d\phi}{dt}$ ;

3) при охолодженні тіла швидкість охолодження в момент часу  $t$  є похідною від температури  $\frac{dT}{dt}$ ;

4) теплоємність  $C$  для даної температури  $t$  є похідною від кількості тепла  $Q$ :  $C = \frac{dQ}{dt}$ ;

5) при нагріванні стержня коефіцієнт лінійного розширення  $\alpha$  при даному значенні температури  $t$  є похідною від довжини  $l$ :  $\alpha = \frac{dl}{dt}$ .



## 2. Правила диференціювання (Table of Derivative Rule)

**Теорема** Якщо функції  $u(x)$  і  $v(x)$  мають похідні в точці  $x$ , то справедливі формули для похідних суми, добутку та частки цих функцій:

$$1) (u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x) \text{ - (Sum Rule);}$$

$$2) (u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x) \text{ - (Product Rule);}$$

$$3) \left( \frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{(v(x))^2}$$

, при  $v(x) \neq 0$  - (Quotient Rule).

**Зауваження.** Сталий множник при диференціюванні виноситься за знак похідної (Constant Multiple Rule), тобто:

$$\underline{(c \cdot u(x))' = c \cdot u'(x)}, \text{ де } c = \text{const}$$

$$\frac{u'v + uv' - u'v - uv'}{\sqrt{2}}$$



## Похідна складної функції (Chain Rule)

Нехай функція  $y = f(u)$  визначена в деякому околі точки  $u$  і функція  $u = \varphi(x)$  визначена в деякому околі точки  $x$ , таким чином визначена складна функція  $y = f[\varphi(x)]$ ,

**Теорема** Якщо функція  $y = f(u)$  має похідну в точці  $u$  і функція  $u = \varphi(x)$  має похідну в точці  $x$ , то складна функція  $y = f[\varphi(x)]$  також має похідну в точці  $x$ , причому

$$y'_x = (f[\varphi(x)])' = f'(u) \cdot \varphi'(x), \quad (3)$$

або скорочено

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \quad (3^*)$$

**Приклад.** Знайти похідну функції  $y = \cos^5 3x$ .

**Розв'язання.** Приймаючи  $y = u^5$ ,  $u = \cos 3x$ , маємо:

$$y' = (u^5)' (\cos 3x)' = 5u^4 ((-\sin 3x) \cdot 3) = 5 \cos^4 3x \cdot (-3 \sin 3x) = -15 \cos^4 3x \cdot \sin 3x.$$

Тут враховано, що  $u = \cos 3x$  також складена функція і тому за формулою (3) вона має похідну  $u' = -3 \sin 3x$ .

$$(x^5)' = 5x^4$$

### Похідна оберненої функції (derivative of inverse function)

**Теорема** Якщо функція  $y = f(x)$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$  має обернену  $x = f^{-1}(y)$  і для всіх  $x \in X$  існує похідна  $f'(x) \neq 0$ , то для всіх  $y \in Y$  існує похідна  $(f^{-1}(y))'$ , причому справедлива рівність:

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)} \text{ або } x'_y = \frac{1}{y'_x}, (y'_x \neq 0). \quad (4)$$

**Приклад.** Знайти похідну функції, оберненої до функції  $y = \sin x$ .

**Розв'язання.** Функція  $y = \sin x$  неперервна і монотонна на проміжку  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ . Отже, на цьому проміжку існує обернена функція, яку позначають  $x = \arcsin y$ ,  $y \in [-1, 1]$ ,  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ . Нагадаємо, що графіки обернених функцій симетричні відносно прямої  $y = x$  (рис. 3).

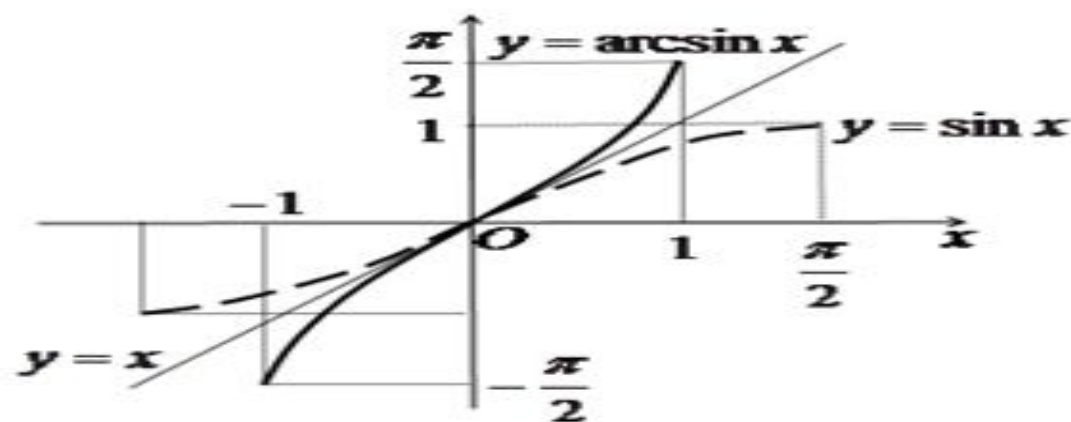


Рис. 3

Знаходимо похідну  $x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{\cos x}$ . Оскільки аргументом оберненої функції є  $y$ , то виконаємо такі перетворення:

$$\cos x = +\sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - y^2},$$

знак «+» взято, оскільки при  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$   $\cos x \geq 0$ . Отже  $x'_y = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$  або

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Якщо аргументом є змінна  $x$ , то маємо формулу

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad (|x| < 1) \quad (5)$$

Продовжуючи знаходити похідні базисних елементарних функцій з урахуванням означення похідної, її властивостей та правил диференціювання можна скласти наведену нижче таблицю.



## Таблиця похідних основних елементарних функцій

(Table of Derivative Formulas)



- 1)  $(const)' = 0;$
- 2)  $(x^n)' = n \cdot x^{n-1},$   $(\forall n \in \mathbb{N}, \text{ або } \forall n \in \mathbb{R} \text{ при } x > 0);$
- 3)  $(a^x)' = a^x \ln a,$   $(\forall a > 0, a \neq 1);$
- 4)  $(e^x)' = e^x;$
- 5)  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a},$   $(\forall a > 0, a \neq 1) \cap \forall x > 0);$
- 6)  $(\ln x)' = \frac{1}{x},$   $(\forall x > 0);$
- 7)  $(\sin x)' = \cos x;$
- 8)  $(\cos x)' = -\sin x;$
- 9)  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$   $(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z});$

$$10) (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad (x \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z});$$

$$11) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (|x| < 1);$$

$$12) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (|x| < 1);$$

$$13) (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$14) (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$15) (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$$

$$16) (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$$

$$17) (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$18) (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad (x \neq 0).$$

**Логарифмічне диференціювання.** Іноді відшукання похідної спрощується, якщо її попередньо прологарифмувати. В зв'язку з цим такий метод називається **логарифмічним диференціюванням**.

**Приклад** Знайти похідну складної функції виду

$$y = u(x)^{v(x)}$$

$$\ln y = \ln u(x)^{v(x)}$$

**Розв'язання.** Логарифмуючи рівність дістанемо

$$\ln y = v(x) \cdot \ln u(x)$$

Диференціюючи обидві частини останньої рівності, матимемо:

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

$$y = x^x$$

$$(\ln y)' = v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot (\ln u(x))', \text{ або } \frac{1}{y} y' = v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} u'(x)$$

Виразивши з останньої рівності  $y'$  та підставивши  $y = u(x)^{v(x)}$ , отримаємо

$$y' = u(x)^{v(x)} \left[ v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} u'(x) \right],$$

цю рівність можна переписати так

$$\left( u(x)^{v(x)} \right)' = u(x)^{v(x)} \cdot \ln u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u(x)^{v(x)-1} \cdot u'(x), \quad (6)$$

де  $u(x)^{v(x)} \cdot \ln u(x) \cdot v'(x)$  - похідна від показникової функції,

$v(x) \cdot u(x)^{v(x)-1} \cdot u'$  - похідна від степеневих функції.



**Приклад.** Знайти похідну  $y = x^{\sin x}$ .

$$\ln y = \ln x^{\sin x}$$

**Розв'язання.** Логарифмуючи рівність дістанемо:

$$\ln y = \underbrace{\sin x}_u \cdot \underbrace{\ln x}_v, \quad u'v + uv'$$

Диференціюючи обидві частини отриманої рівності за змінною  $x$ , матимемо

$$(\ln y)' = (\sin x \cdot \ln x)' \quad \text{або} \quad \frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \sin x,$$

звідки

$$\underline{y'} = \underline{y} \left( \cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \sin x \right) = x^{\sin x} \left( \cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \sin x \right).$$

Крім диференціювання степеневих-показникових функцій метод логарифмічного диференціювання доцільно застосовувати також у випадку, коли функція подана у вигляді добутку (частки) досить великої кількості функцій.

**Приклад.** Знайти похідну функції  $y = e^{x^3} \cdot \text{ctg}^5 x \cdot \arcsin x$ .

**Розв'язання.** Логарифмуючи обидві частини рівності дістанемо  
 $\ln y = \ln(e^{x^3} \cdot \text{ctg}^5 x \cdot \arcsin x)$ ,  $\ln y = \ln e^{x^3} + \ln(\text{ctg}^5 x) + \ln(\arcsin x)$   
 $\ln y = x^3 \ln e + 5 \ln(\text{ctg} x) + \ln(\arcsin x)$

Диференціюючи обидві частини отриманої рівності, матимемо:

$$(\ln y)' = (x^3)' + 5(\ln(\text{ctg} x))' + (\ln(\arcsin x))'$$

або

$$\frac{1}{y} y' = 3x^2 + 5 \frac{1}{\text{ctg} x} \cdot \left( \frac{-1}{\sin^2 x} \right) + \frac{1}{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Звідки

$$y' = \underbrace{e^{x^3} \cdot \text{ctg}^5 x \cdot \arcsin x}_y \left( 3x^2 - \frac{5}{\sin x \cdot \cos x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x} \right)$$

**Приклад.** Знайти похідну функції

$$y = \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{(2x - 1)^6 (3x + 5)^2}$$

**Розв'язання.** Логарифмуючи обидві частини рівності дістанемо

$$\ln y = \ln \left( \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{(2x - 1)^6 (3x + 5)^2} \right) \quad \ln y = \ln \sqrt{x^2 + 3} - \ln(2x - 1)^6 - \ln(3x + 5)^2;$$

$\sqrt{\ln(x^2 + 3)^{1/2}}$

$$\ln y = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 3) - 6 \ln(2x - 1) - 2 \ln(3x + 5)$$

Диференціюючи обидві частини отриманої рівності, матимемо:

$$(\ln y)' = \frac{1}{2} (\ln(x^2 + 3))' - 6 (\ln(2x - 1))' - 2 (\ln(3x + 5))'$$

або

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + 3} \cdot 2x - 6 \frac{1}{2x - 1} \cdot 2 - 2 \frac{1}{3x + 5} \cdot 3 = \frac{x}{x^2 + 3} - \frac{12}{2x - 1} - \frac{6}{3x + 5}$$

звідки

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{(2x - 1)^6 (3x + 5)^2} \left( \frac{x}{x^2 + 3} - \frac{12}{2x - 1} - \frac{6}{3x + 5} \right)$$



## Похідна функції, заданої неявно (implicit function derivative)

Якщо на деякому проміжку  $X$  диференційовна функція  $y = y(x)$  задана неявно рівнянням  $F(x, y) = 0$ , то її похідну  $y'(x)$  можна знайти з рівняння

$$(y)' = y' \quad \uparrow$$
$$[F(x, y)]'_x = 0,$$

де  $F(x, y)$  розглядається як складена функція змінної  $x$ .

**Приклад.** Знайти похідну функції, заданої неявно

$$3y^2 + 2xy + \cos y = 0$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

**Розв'язання.** Знаходимо похідну за змінною  $x$ , пам'ятаючи, що  $y(x)$  є

функцією від  $x$ , тому  $(y(x))' = y'$

$$3 \cdot 2y \cdot \underline{y'} + 2(1 \cdot y + x \cdot \underline{y'}) + (-\sin y) \cdot \underline{y'} = 0$$

Розв'яжемо це рівняння відносно  $y'$ , отримаємо:

$$\underline{y'}(6y + 2x - \sin y) = -2y,$$

звідки

$$y' = \frac{-2y}{6y + 2x - \sin y}$$

$$y' = \frac{2y}{\sin y - 6y - 2x}$$

~~$y = 2x + 5$~~   
 $4xy - 3x - 5 = 0$

## Похідна функції

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \end{cases}$$

яка задана параметрично, обчислюється за формулою:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \quad \text{або} \quad \left. \underline{\underline{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}}} \right| \quad \downarrow$$

за умови, що  $f(t), g(t)$  диференційовні в точці  $t$  функції, причому  $\frac{df}{dt} \neq 0$ .

**Приклад** . Знайти в точці  $t = \frac{\pi}{6}$  похідну  $y'_x$  функції, яка задана параметрично:

$$\begin{cases} x = 2 \cos t - \cos 2t, \\ y = 2 \sin t - \sin 2t. \end{cases}$$

**Розв'язання.** Застосовуючи формулу обчислення похідної функції, яка задана параметрично, маємо:

$$x'_t = -2 \sin t + 2 \sin 2t = 4 \cos \frac{3t}{2} \sin \frac{t}{2};$$

$$2(\sin 2t - \sin t) = 2 \cdot 2 \sin \frac{2t-t}{2} \cos \frac{2t+t}{2}$$

$$y'_t = 2 \cos t - 2 \cos 2t = 4 \sin \frac{3t}{2} \sin \frac{t}{2}.$$

Таким чином,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{4 \sin \frac{3t}{2} \sin \frac{t}{2}}{4 \cos \frac{3t}{2} \sin \frac{t}{2}}; \quad y'_x = \operatorname{tg} \frac{3t}{2}; \quad y'_x|_{t=\frac{\pi}{6}} = \operatorname{tg} \frac{3 \cdot \pi}{2 \cdot 6} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1.$$

$y'(\frac{\pi}{6})$



### 3. Диференціал функції

**Диференціалом функції**  $y = f(x)$  в точці  $x$  називається головна (лінійна відносно  $\Delta x$ ) частина приросту  $\Delta y$  диференційовної в точці  $x$  функції.

Диференціал дорівнює добутку похідної функції в точці  $x$  на приріст незалежної змінної, тобто

$$dy = f'(x) \Delta x.$$

Зокрема, диференціалом незалежної змінної є її приріст:

$$dx = 1 \cdot \Delta x, \quad dx = \Delta x, \quad \text{дельта}$$

Тоді формула диференціала має вигляд

$$dy = f'(x) dx,$$

відкіля

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

## Основні властивості диференціала

Для довільних диференційованих функцій  $u(x)$  та  $v(x)$  мають місце такі рівності:

1.  $d\alpha = 0, (\alpha = \text{const})$ ;

2.  $d(\alpha_1 u + \alpha_2 v) = \alpha_1 du + \alpha_2 dv, (\alpha_1, \alpha_2 \text{ — довільні сталі})$ ;

3.  $d(uv) = u dv + v du$ ;

4.  $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}, v \neq 0$ ;

5.  $df(u) = f'(u) du, u = u(x)$ .

**Приклад** Знайти диференціал функції  $y = \sin x$ .

**Розв'язання.** За формулою

$$\underline{dy} = d(\sin x) = (\sin x)' \underline{dx} = \cos x \underline{dx}, \quad \underline{dy} = \underline{\cos x \underline{dx}}.$$

**Приклад.** Знайти диференціал функції  $y = x^2 + 4x + 8$ .

**Розв'язання.** За формулою

$$dy = (x^2 + 4x + 8)' dx = (2x + 4) dx = 2(x + 2) dx.$$



## Застосування диференціала до наближених обчислень

$$\Delta x \rightarrow 0$$

При малих  $\Delta x$  справедлива формула  $\Delta y \approx \underline{dy}$ , тобто

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x}$$

**Приклад.** Обчислити наближено за допомогою диференціала значення функції  $y = \sqrt{x^2 + 5}$  в точці  $x = 1,97$ .

**Розв'язання.** Найближча до 1,97 точка, в якій легко обчислити значення  $f(x_0)$  и  $f'(x_0)$ , — це точка  $x_0 = 2$ . ✎

$$\Delta x = x - x_0 = 1,97 - 2 = -0,03;$$

$$f(x_0) = f(2) = \sqrt{2^2 + 5} = 3;$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}, \quad f'(x_0) = y'(2) = \frac{2}{3}.$$

За наведеною формулою маємо

$$f(1,97) \approx 3 + \frac{2}{3}(-0,03) = 2,98.$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$



# 4. Похідні та диференціали вищих порядків

**Похідною другого порядку** (другою похідною функції)  $y = f(x)$  у точці  $x$  називається похідна від її першої похідної  $y' = f'(x)$  при умові, що  $f'(x)$  диференційовна в точці  $x$ . Вона позначається такими символами:

$$f''(x), f^{(2)}(x), \frac{d^2 f(x)}{dx^2}, f''_{xx}, f''_{x^2}.$$

Аналогічно визначається **похідна  $n$ -го порядку** функції  $y = f(x)$ , яка має  $(n-1)$  похідну в точці  $x$ :

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = (f^{(n-1)}(x))', \quad n \in \mathbb{N}.$$

Похідну, для якої існує  $n$ -а похідна в точці  $x$ , називають  $n$  разів диференційовною в цій точці.

## Основні формули обчислення похідних вищих порядків

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a > 0, a \neq 1);$$

$$(e^x)^{(n)} = e^x;$$

$$(\sin \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \sin\left(\alpha x + \frac{n\pi}{2}\right);$$

$$(\cos \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \cos\left(\alpha x + \frac{n\pi}{2}\right);$$

$$((ax + b)^\alpha)^{(n)} = a^n \alpha(\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - n + 1)(ax + b)^{\alpha - n};$$

зокрема,

$$\left(\frac{1}{x \pm a}\right)^{(n)} = (-1)^{(n)} \frac{n!}{(x \pm a)^{n+1}};$$

$$(\log_a |x|)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n \ln a};$$

$$(\ln |x|)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}.$$

## Основні правила обчислення похідних

Якщо функції  $u(x)$  та  $v(x)$   $n$  разів диференційовні, тоді мають місце такі рівності:

$$1) (a_1u + a_2v)^{(n)} = a_1u^{(n)} + a_2v^{(n)} \quad (a_1, a_2 - \text{сталі});$$

$$2) (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)},$$

**(формула Лейбніца)**

де  $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}, 0! = 1.$



## Обчислення похідних вищих порядків функцій, заданих параметрично

Якщо функція задана параметрично рівняннями  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , тоді

похідні  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ,  $\frac{d^3 y}{dx^3}$ , ... обчислюються за формулами:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t}{x'_t}, \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)'_t}{x'_t} \quad \text{і т.д.}$$

Для похідної другого порядку має місце формула:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t))^{\frac{3}{2}}} = \frac{\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}}{(x'(t))^{\frac{3}{2}}}.$$



## Диференціали вищих порядків

**Диференціалом другого порядку** двічі диференційовної функції  $y = f(x)$  називають диференціал від диференціала першого порядку функції  $f(x)$ , тобто  $d^2 y = d(dy)$ . У випадку, коли  $x$  — незалежна змінна, диференціали обчислюються за формулами:

$$d^2 y = y''(dx)^2,$$

$$d^3 y = y'''(dx)^3,$$

$$d^n y = y^{(n)}(dx)^n.$$

Якщо ж  $x$  — деяка функція від  $t$ ,  $x = x(t)$ , тоді

$$d^2 y = y''(dx)^2 + y'_x d^2 x,$$

$$d^3 y = y'''(dx)^3 + 3y''_{xx} dx d^2 x + y' d^3 x \text{ і т.д.}$$

Якщо для функцій  $u(x)$  та  $v(x)$ ,  $x$  — незалежна змінна, існують диференціали  $d^n u$  та  $d^n v$ , тоді

$$d^n (a_1 u + a_2 v) = a_1 d^n u + a_2 d^n v \quad (a_1, a_2 \text{ — сталі}),$$

$$d^n (uv) = \sum_{k=0}^n C_n^{k} d^{n-k} u d^k v.$$

**Приклад.** Знайти диференціал другого порядку функції  $y = x\sqrt{x-3}$  в точці  $x_0 = 12$ .

**Розв'язання.** Згідно з формулою для обчислення диференціалу другого порядку  $d^2y = y''(dx)^2$  обчислюється  $y''$ :

$$y' = x' \sqrt{x-3} + x(\sqrt{x-3})' = \sqrt{x-3} + \frac{x}{2\sqrt{x-3}} = \frac{3(x-2)}{2\sqrt{x-3}};$$

$$y'' = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{x-3}} - \frac{x-2}{2\sqrt{(x-3)^3}} \right) = \frac{3(2(x-3) - x + 2)}{4\sqrt{(x-3)^3}} = \frac{3(x-4)}{4\sqrt{(x-3)^3}}.$$

Тоді  $y''(x_0) = y''(12) = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 27} = \frac{2}{9}.$

Отже,  $d^2y(x_0) = \frac{2}{9}(dx)^2.$

**Приклад.** Знайти  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  функції, яка задана параметрично рівняннями:  $x = \ln t$ ,  $y = \operatorname{arctg} t$ .

**Розв'язання.** За правилами диференціювання функції, заданої параметрично, маємо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{\frac{1}{t}} = \frac{t}{1+t^2},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1+t^2 - 2t^2}{(1+t^2)^2}}{\frac{1}{t}} = \frac{t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}.$$



# 5. Застосування похідної

**Правила Лопіталя розкриття невизначеностей** (L'Hospital rule)

✗ **Теорема** (I правило Лопіталя). Якщо:

1) функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  диференційовні на інтервалі  $(a; b)$ ,  $\varphi'(x) \neq 0$  для всіх  $x \in (a; b)$ ;

2)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$  ;  $\left[ \frac{0}{0} \right]$

3) існує скінченна або нескінченна границя  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ ,

то існує границя  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ , причому має місце рівність:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$



**Приклад.** Обчислити границю

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\ln(x-1)} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^3 - 8)}{\ln(x-1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2}{\dots}$$

$$\begin{aligned} x-1 > 0 \\ x > 1 \end{aligned}$$

$$\left[ \frac{0}{0} \right]$$

Функції  $f(x) = x^3 - 8$

і  $\varphi(x) = \ln(x-1)$  задовольняють умови теореми в деякому околі точки  $a = 2$ .

Застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\ln(x-1)} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^3 - 8)'}{(\ln(x-1))'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2}{1/(x-1)} = 12$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 \cdot (x-1)}{1}$$



**Наслідок 2.** Якщо похідні  $f'(x)$  і  $\varphi'(x)$  задовольняють ті самі вимоги, що і функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$ , то правило Лопіталя можна застосувати повторно. При цьому отримуємо

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}.$$

І взагалі, правило Лопіталя при виконанні умов теореми можна застосовувати багаторазово.

**Приклад.** Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ .

**Розв'язання.** Дана границя дозволяє використовувати правило Лопіталя багаторазово, дійсно:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \left[ \frac{0}{0} \right]^{(3.21)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \left[ \frac{0}{0} \right]^{(3.21)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.$$

✓ **Наслідок 3.** Якщо в теоремі замінити умову 2) на наведену нижче

$$2) \underline{\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty}, \quad \text{або} \quad \underline{\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty}, \quad \text{то правило}$$

Лопіталя також має місце.

В цьому випадку правило Лопіталя застосовується для розкриття

невизначеності типу  $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$  ( II правило Лопіталя ).

**Приклад.** Якщо  $\alpha > 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ ,

тобто довільний додатний степінь  $x$  зростає швидше, ніж  $\ln x$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

**Розв'язування.** Дійсно, застосувавши II правило Лопіталя, отримаємо

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{\alpha \cdot x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha \cdot x^\alpha} = 0.$$



*Приклад.* Якщо  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a > 1$  то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0,$$

тобто, при  $x \rightarrow +\infty$  степенева функція  $x^n$  зростає повільніше, ніж показникова функція  $a^x$ ,  $a > 1$ .

*Розв'язування.* Дійсно, застосувавши правило Лопіталя розкриття

невизначеності  $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right]$   $n$  раз, отримаємо:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n x^{n-1}}{a^x \ln a} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^x \ln^2 a} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{a^x \cdot \ln^n a} = 0.$$

# ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ТА ПОБУДОВИ ГРАФІКІВ

- Дослідити функцію, задану аналітичним виразом  $y=f(x)$ , означає визначити такі її характеристики: область визначення; парність чи непарність; періодичність; монотонність; екстремуми; найбільше і найменше значення в заданому відрізку. Якщо є точки розриву функції, то необхідно дослідити її поведінку поблизу цих точок.
- Для графічного зображення функції необхідно додатково визначити: точки перетину графіка з осями координат; опуклість його; точки перегину; асимптоти.

**Означення 1.** Якщо кожному значенню  $x$  з деякої числової множини  $X$  за певним правилом поставлене у відповідність єдине число  $y$ , то кажуть, що  $y$  є **функція** від  $x$  і записують  $y = f(x)$ .

**Означення 2.** Сукупність значень  $x$ , при яких функція  $y$  існує, називається **областю визначення функції**.

**Означення 3.** Нехай функція  $y = f(x)$  визначена в області, симетричній відносно початку координат. Тоді, якщо

$$f(x) = -f(-x),$$

то функція називається **непарною**, а при

$$f(x) = f(-x)$$

– **парною**.

**Означення 4.** Функція називається **періодичною**, якщо існує таке дійсне число  $l \neq 0$ , що, при будь-яких значеннях аргументу  $x$  із області визначення

$$f(x) = f(x + kl),$$

де  $k$  – ціле число,  $l$  – період.



**Означення 5.** Якщо для двох будь-яких різних значень аргументу  $x_1$  і  $x_2$  з області визначення із нерівності  $x_1 < x_2$  виконуються нерівності:

$f(x_1) < f(x_2)$ , то функція називається *зростаючою*,

$f(x_1) \leq f(x_2)$ , то – *не спадною*,

$f(x_1) > f(x_2)$ , то – *спадною*,

$f(x_1) \geq f(x_2)$ , то – *не зростаючою*.

Зростаючі, спадні, не зростаючі, не спадні функції називаються *монотонними*.

**Означення 6.** Функція  $y = f(x)$  має *локальний внутрішній максимум* (мінімум) в точці  $x = x_0$ , якщо

1)  $f(x)$  визначена в точці  $x_0$  і її достатньо малому « $\delta$ -околі», тобто  $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ ;

2) всі значення функції з « $\delta$ -околу» менші (більші) ніж її значення в точці  $x_0$ , тобто  $f(x) < f(x_0)$  [ $f(x) > f(x_0)$ ].

Геометричний зміст цього зрозумілий із рис. 7.



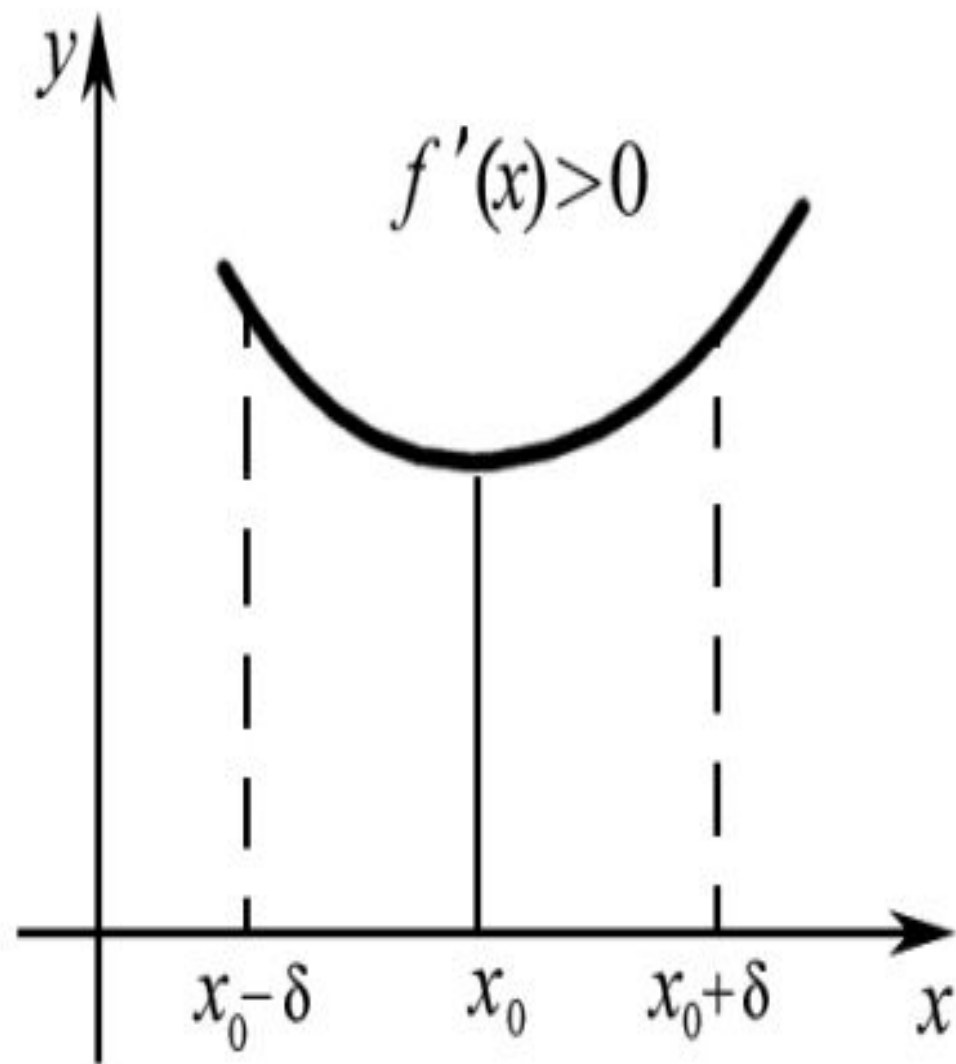
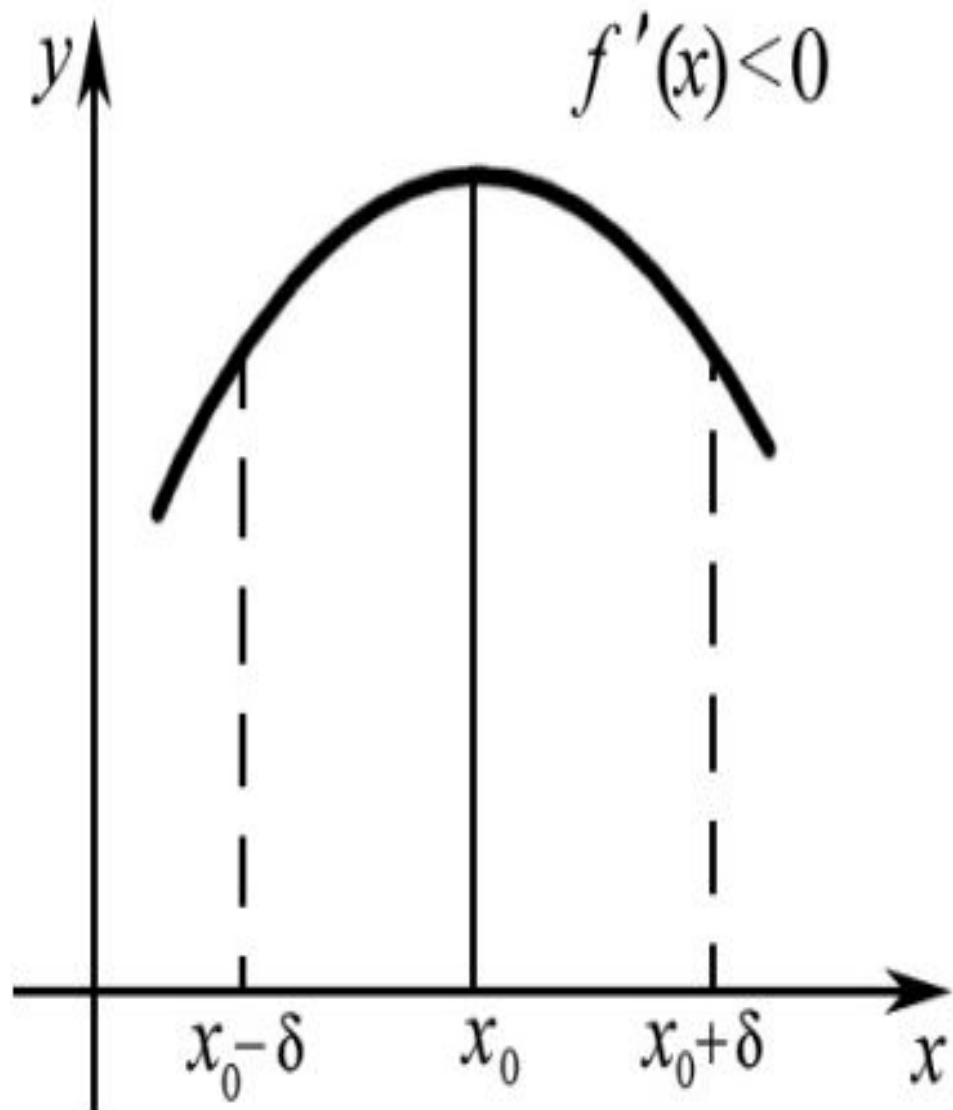


Рис. 1

**Означення 7.** Найбільший з максимумів і найменший з мінімумів називають *найбільшим і найменшим значенням функції на відрізку*.

Застосуємо диференціювання до визначення монотонності функцій.

**Теорема (необхідні умови).** Якщо диференційована на інтервалі  $(a;b)$  функція  $f(x)$  зростає (спадає), то  $f'(x) \geq 0$  [ $f'(x) \leq 0$ ] для  $\forall x \in (a;b)$ .

**Теорема (достатні умови).** Якщо функція диференційована на інтервалі  $(a;b)$  і  $f'(x) > 0$  [ $f'(x) < 0$ ] для  $\forall x \in (a;b)$ , то ця функція зростає (спадає) на інтервалі  $(a;b)$ .

Отже, щоб знайти інтервали монотонності функції  $f(x)$ , необхідно:

- знайти похідну даної функції;
- знайти критичні точки з рівняння  $f'(x) = 0$  і з умови  $f'(x) = \infty$ ;
- розбити критичними точками область існування функції на інтервали;
- визначити знак похідної на кожному інтервалі; якщо похідна додатна – функція зростає, якщо від’ємна – функція спадає в цьому інтервалі.



**Теорема (необхідна умова екстремуму).** Якщо диференційована функція  $y = f(x)$  має екстремум в точці  $x_0$ , то її похідна в цій точці дорівнює нулю, тобто  $f'(x_0) = 0$ .

**Теорема (достатня умова екстремуму).** Якщо неперервна функція  $y = f(x)$  диференційована в деякому « $\delta$ -околі» критичної точки  $x_0$  і при переході через неї (зліва направо) похідна  $f'(x)$  міняє знак з «+» на «-», то  $x_0$  є точкою максимуму; якщо знак похідної змінюється з «-» на «+», то  $x_0$  – точка мінімуму (див. рис. 3).

Отже, щоб дослідити функцію на екстремум, необхідно:

- знайти критичні точки функції із рівняння  $f'(x) = 0$ ;
- вибрати серед них внутрішні точки області визначення;
- дослідити знак похідної  $f'(x)$  зліва і справа від кожної критичної точки;
- виписати ті точки, де є екстремум;
- знайти значення функції в точках екстремуму.

Для дослідження на екстремум можна скористатись поняттям другої похідної  $f''(x)$ .

**Теорема.** Якщо в точці  $x_0$   $f'(x_0) = 0$ , а  $f''(x_0) \neq 0$ , то при  $f''(x_0) < 0$  функція має в цій точці максимум, а при  $f''(x_0) > 0$  – мінімум.

Щоб знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку, треба:

- знайти критичні точки функції на відрізку  $[a; b]$ ;
- обчислити значення функції в цих точках;
- обчислити значення функції  $f(a)$  і  $f(b)$ ;
- серед обчислених значень вказати найбільше  $f_{\max}(x)$  і найменше  $f_{\min}(x)$ .



**Приклад.** Дослідити функцію  $f(x) = x^3 - 3x - 4$  на монотонність.

**Розв'язок.**

Функція визначена при  $(-\infty < x < +\infty)$ .

Похідна функції  $f'(x) = (x^3 - 3x - 4)' = 3x^2 - 3$ .

Критичні точки:  $f'(x) = 0$ ,  $3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$ .

Розіб'ємо область існування на інтервали монотонності:  
 $(-\infty < x < -1) \cup (-1 < x < 1) \cup (1 < x < +\infty)$ .

Визначаємо знак похідної і поведінку функції:

1)  $-\infty < x < -1$ :  $f'(x) > 0$  – функція зростає;

2)  $-1 < x < 1$ :  $f'(x) < 0$  – функція спадає;

3)  $1 < x < +\infty$ :  $f'(x) > 0$  – функція зростає.

Графічно:

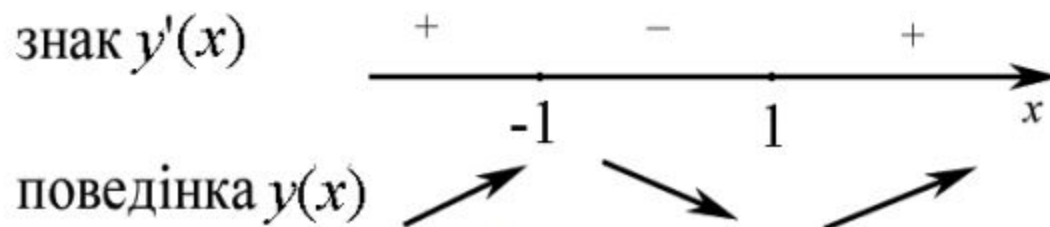


Рис.

**Приклад.** Знайти екстремуми функції  $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 3$ .

**Розв'язок.**

Область визначення  $-\infty < x < +\infty$ .

Критичні точки:  $f'(x) = 0$ ,  $f'(x) = \left( \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 3 \right)' = x^2 - 3x + 2$ ,

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 1; 2.$$

Точок, де похідна не існує, немає.

За першою похідною:

знак  $y'(x)$

поведінка  $y(x)$

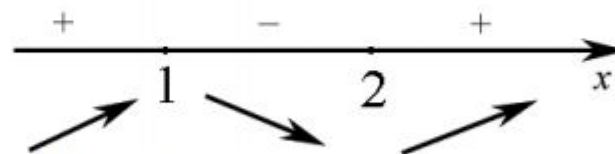


Рис. 1

Отже, точка  $x = 1$  є точкою максимуму, а точка  $x = 2$  є точкою мінімуму.

Значення функції в цих точках:  $f_{\max} = f(1) = -\frac{13}{6}$ ,  $f_{\min}(x) = f(2) = -\frac{7}{3}$ . За

другою похідною:  $f''(x) = 2x - 3$ ;  $f''(1) = -1 < 0$ ;  $f''(2) = 1 > 0$ . Отже, в точці  $x = 1$  функція дістає максимуму, а в точці  $x = 2$  – мінімуму.

**Задача.** Визначити розміри циліндричного бака об'єму  $V$ , при яких на його виготовлення піде найменше матеріалу.

**Розв'язок.** Нехай радіус основи бака  $r$ , а висота його  $h$ . Тоді повна поверхня бака  $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ . Це функція двох змінних  $r$  і  $h$ . Виразимо  $h = \frac{V}{\pi r^2}$ , оскільки об'єм  $V$  заданий. Отже,  $S = S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2}$  або

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Знайдемо критичні точки:

$$S'(r) = 0, \quad S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}, \quad 2\left(2\pi r - \frac{V}{r^2}\right) = 0, \quad 2\pi r - \frac{V}{r^2} = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Знайдемо знак другої похідної  $S''(r) = 2\left(2\pi + \frac{2V}{r^3}\right) > 0$  на проміжку  $(0; +\infty)$ .

Отже в точці  $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$  функція  $S(r)$  має мінімум.

$$\text{Тоді висота } h = \frac{V}{\pi \sqrt[3]{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2}} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r.$$

**Відповідь:** Висота бака повинна бути вдвічі більшою радіуса основи, щоб на виготовлення бака об'єму  $V$  пішло найменше матеріалу.



**Приклад.** Знайти найбільше і найменше значення функції  $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$  на відрізку  $[-2; 1]$ .

**Розв'язок.** Знайдемо критичні точки із рівняння  $f'(x) = 0$ ,  
 $f'(x) = (3x^4 + 4x^3 + 1)' = 12x^3 + 12x^2$ ,  $12x^3 + 12x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$ ,  $x_3 = -1$ .

Точки  $x = -1$  і  $x = 0$  належать проміжку  $[-2; 1]$ , тому знаходимо значення функції в цих точках  $f(-1) = 3 - 4 + 1 = 0$ , а  $f(0) = 1$ . Знайдемо значення функції на кінцях відрізка  $f(-2) = 48 - 32 + 1 = 17$ ,  $f(1) = 8$ . Отже, серед цих значень найбільше  $f_{\text{найб}} = f(-2) = 17$ , а найменше  $f_{\text{найм}} = f(-1) = 0$ .



## Опуклість кривих. Точки перегину

**Означення 1.** Крива  $y = f(x)$  називається *опуклою на інтервалі*, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче її дотичної на цьому інтервалі.

**Означення 2.** Крива  $y = f(x)$  називається *увігнутою на інтервалі*, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать вище її дотичної на цьому інтервалі.

**Означення 3.** *Точкою перегину* називається точка кривої, яка відділяє опуклість від увігнутості.

Інтервали опуклості і увігнутості знаходять за допомогою теореми.

**Теорема.** Нехай функція  $y = f(x)$  є двічі диференційованою на  $(a; b)$ . Тоді:

- якщо  $f''(x) < 0$ , то крива опукла;
- якщо  $f''(x) > 0$ , то крива увігнута.

В точці перегину  $f''(x) = 0$  або не існує  $f''(x) = \infty$ .

**Теорема.** Нехай  $x_0$  – критична точка другого роду. Якщо при переході через неї  $f''(x)$  змінює знак, то точка  $M_0(x_0; f(x_0))$  є точкою перегину кривої.

Отже, щоб знайти точки перегину, необхідно знайти критичні точки другого роду із рівняння  $f''(x) = 0$  (або  $\infty$ ) і дослідити зміну знака другої похідної при переході через ці точки.

**Приклад.** Знайти інтервали опуклості, увігнутості та точки перегину кривої

$$f(x) = x^5 - x + 2.$$

**Розв'язок.** Область визначення  $-\infty < x < +\infty$ . Так як  $f''(x) = 20x^3$ , то критична точка другого роду одна -  $x = 0$ . Розбиваємо область визначення на два інтервали  $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$  і досліджуємо знак другої похідної при переході через цю точку.

Інтервал  $(-\infty; 0)$  -  $f''(x) < 0$ , крива опукла;  $(0; +\infty)$  -  $f''(x) > 0$ , крива увігнута, отже  $M(0; 2)$  є точкою перегину функції.



## Асимптоти кривої

**Означення.** Пряма  $l$  називається *асимптотою* кривої, якщо відстань  $\delta$  від змінної точки кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли точка  $M$ , рухаючись по прямій, віддаляється в нескінченність.

Розрізняють асимптоти вертикальні і неvertикальні (горизонтальні і похилі).

Рівняння вертикальної асимптоти  $x = x_0$ , якщо  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ , тобто в точках розриву функції завжди є вертикальна асимптота.

Рівняння похилої асимптоти має вигляд

$$y = kx + b,$$

де  $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ ;  $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$ .

Рівняння горизонтальної асимптоти  $y = b$ .

## 2. План дослідження функції та побудова її графіка

1. Визначаємо область допустимих значень (ОДЗ).
2. Виявляємо, чи є функція парною або непарною, періодичною тощо.
3. Знаходимо точки екстремуму та інтервали монотонності.
4. Знаходимо точки перегину та інтервали опуклості.
5. Знаходимо рівняння асимптот графіка функції (якщо вони є).



**Приклад.** Дослідити функцію  $y = \frac{x}{1-x^2}$  та побудувати її графік.

**Розв'язок.** 1. Функція не визначена в точках  $x = -1$ ,  $x = 1$ . Область її визначення складається з трьох інтервалів  $(-\infty; -1) \cup (-1; +1) \cup (+1; +\infty)$ , а графік – з трьох гілок.

2. Функція непарна, тому що  $y(-x) = \frac{-x}{1-(-x)^2} = -\frac{x}{1-x^2} = -y(x)$ . Отже,

графік її симетричний відносно початку координат і для побудови достатньо побудувати його в частині  $x \geq 0$ .

3. Функція неперіодична.

4. Точки перетину графіка з осями координат: при  $x = 0$   $y = 0$  графік перетинає осі координат в точці  $O(0;0)$ .

5. Прямі  $x=1$  і  $x=-1$  є вертикальними асимптотами. Знайдемо похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{1-x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1-x^2} = 0, \quad k=0 \text{ і при } x \rightarrow +\infty \text{ і при } x \rightarrow -\infty;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [y - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{1-x^2} - 0 \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1-x^2} = 0.$$

Отже,  $y=0$  (вісь  $Ox$ ) є горизонтальною асимптотою і при  $x \rightarrow +\infty$ , і при  $x \rightarrow -\infty$ .

6. Дослідимо поведінку функції в точках розриву  $x = -1$  і  $x = 1$  та при  $x \rightarrow +\infty$  і  $x \rightarrow -\infty$ :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{1-x^2} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-1-\varepsilon}{1-(-1-\varepsilon)^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-1-\varepsilon}{1-(1+2\varepsilon+\varepsilon^2)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-1-\varepsilon}{-2\varepsilon-\varepsilon^2} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-1-\varepsilon}{-\varepsilon(2+\varepsilon)} = +\infty;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1-x^2} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-1+\varepsilon}{1-(-1+\varepsilon)^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-1+\varepsilon}{1-(1-2\varepsilon+\varepsilon^2)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-1+\varepsilon}{2\varepsilon-\varepsilon^2} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-1+\varepsilon}{\varepsilon(2-\varepsilon)} = -\infty;\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1-x^2} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1-x^2} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0.$$



7. Знайдемо інтервали монотонності функції:

$$y' = \left( \frac{x}{1-x^2} \right)' = \frac{1(1-x^2) - x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2 + 1}{(1-x^2)^2}.$$

Критичні точки  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = +1$  ( $y' = \infty$ ).

Тоді в інтервалі:

$(-\infty; -1)$	$y' > 0$	і функція зростає;
$(-1; 0)$	$y' > 0$	– функція зростає;
$(0; +1)$	$y' > 0$	– функція зростає;
$(+1; +\infty)$	$y' > 0$	– функція зростає.

8. Дослідимо функцію на екстремум. Для цього  $y' \neq 0$ , тоді  $y' = \infty$  і  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 1$  – критичні точки, але вони не належать області визначення функції. Отже, функція не має екстремумів.

9. Дослідимо функцію на опуклість. Знайдемо спочатку другу похідну

$$y'' = \left[ \frac{x^2 + 1}{(1 - x^2)^2} \right]' = \frac{2x(1 - x^2)^2 - (x^2 + 1)2(1 - x^2)(-2x)}{(1 - x^2)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(1 - x^2)^3}.$$

Точки перегину графіка знайдемо серед тих, де  $y''$  дорівнює нулю або не існує. Це точки  $x = -1$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ . Оскільки точки  $x = \pm 1$  не належать області існування функції, то при  $x = 0$   $y = 0$ , тобто точка  $O(0;0)$  є точкою перегину графіка.

За даними дослідження складаємо таблицю і побудуємо графік:

інтервали	$-\infty$	$(-\infty; -1)$	$-1$	$(-1; 0)$	$0$	$(0; 1)$	$1$	$(1; +\infty)$	$+\infty$
$y'$		+	не існує	+	0	+	не існує	+	
$y''$		+		-	0	+		-	
поведінка функції	$\lim y = 0$	$\nearrow$ U	не існує	$\nearrow$ ∩	точка перетину $y = 0$	$\nearrow$ U	не існує	$\nearrow$ ∩	$\lim y = 0$



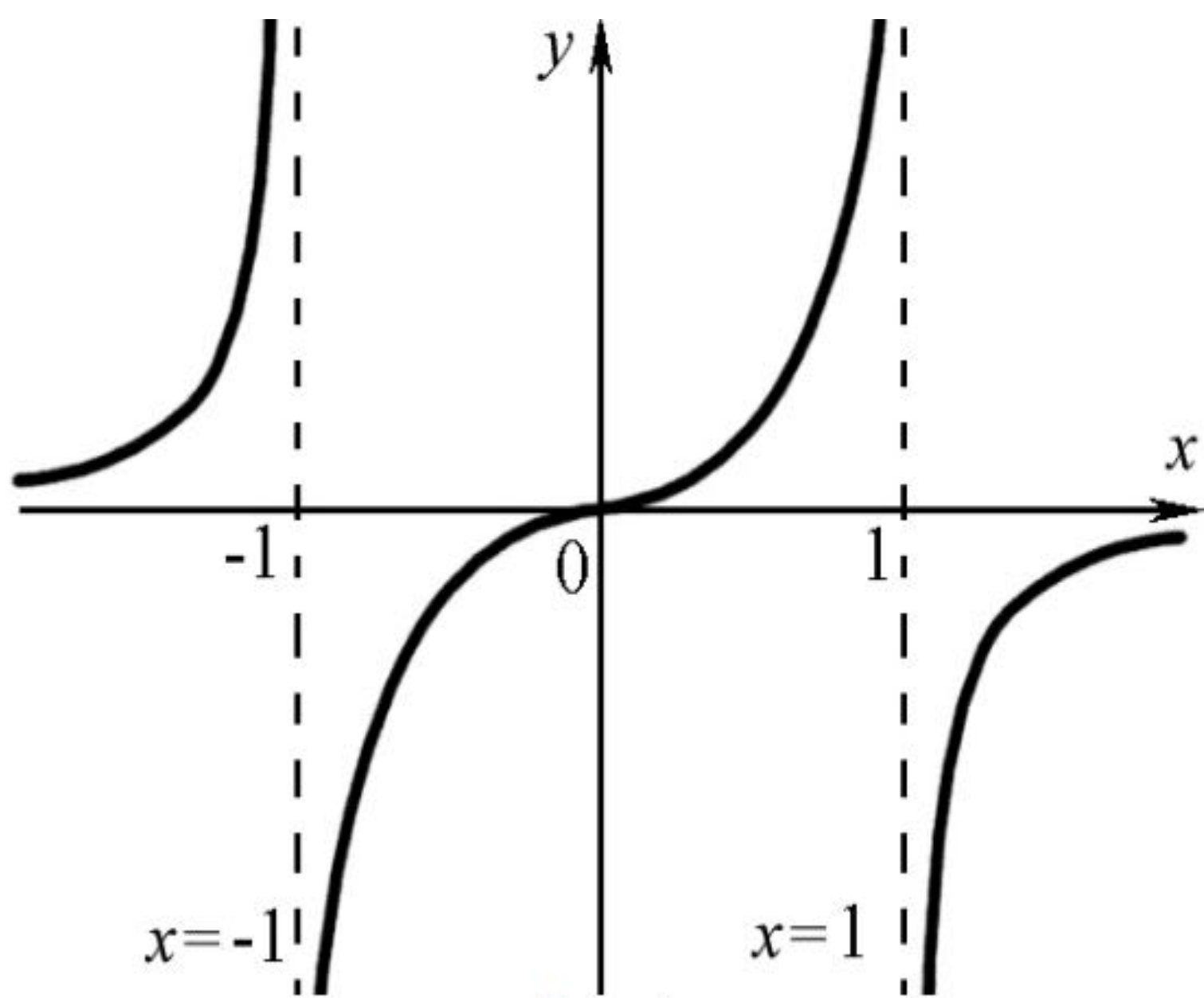


Рис. 6