Системы булевых функций

Операция отрицания $'$ является одной из четырех булевых функций от одной переменной, которые перечисляются в следующей таблице:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Операции дизъюнкция + и конъюнкция · являются примерами двух из шестнадцати булевых функций от двух переменных, которые перечисляются в следующей таблице:

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
		0	$\cdot$	$\to'$	x	$\leftarrow'$	y	$\oplus$	$+$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	y'	$\leftarrow$	x'	$\to$	$\vert$	1

Функция $f_{15}(x,y) = f_2(x,y)'$ - *штрих Шеффера*, обозначается $x \mid y$.

Функция $f_9(x,y) = f_8(x,y)'$ - *стрелка Пирса*, обозначается $x \downarrow y$.

Так $f_{10}(x,y)$ является функцией истинностных значений формулы $X \Leftrightarrow Y$, то она называется *эквивалентностью* и обозначается $x \leftrightarrow y$. Функция $f_7(x,y) = f_{10}(x,y)'$ – отрицание эквивалентности, она называется *суммой Жегалкина* и обозначается $x \oplus y$.

Так как функция $f_{14}(x,y)$ является функцией истинностных значений формулы $X \Rightarrow Y$, то она называется *импликацией* и обозначается $x \to y$.

Так как функция $f_{12}(x,y)$ является функцией истинностных значений формулы $Y \Rightarrow X$, то она называется *обратной импликацией* и обозначается $x \leftarrow y$.

Определение. *Суперпозицией* булевых функций $g(y_1,\ldots,y_m)$ и $h_1(x_1,\ldots,x_n)$, …, $h_m(x_1,\ldots,x_n)$ называется булева функция $f(x_1,\ldots,x_n)$, значения которой определяются по формуле:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = g\big(h_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,h_m(x_1,\ldots,x_n)\big).$$

Для упрощения записи суперпозиции булевых функций скобки по возможности опускаются с учетом следующего приоритета выполнения булевых операций: $'$, $\cdot$ и затем все остальные операции.

Лемма. Булевы функции от двух переменных взаимосвязаны следующими свойствами:

1) $(x+y)'=x'y'$, $(xy)'=x'+y'$ – законы де Моргана;

2) $x+xy=x$, $x(x+y)=x$ – законы поглощения;

3) $x+x'=1$, $xx'=0$ – характеристическое свойство отрицания;

4) $x+1=1$, $x\cdot 1=x$ – характеристическое свойство элемента 1;

5) $x+0=x$, $x\cdot 0=0$ – характеристическое свойство элемента 0;

6) $x+y=(x'y')'$, $xy=(x'+y')'$ – взаимосвязь конъюнкции и дизъюнкции;

7) $x\to y=x'+y$, $x\to y=(xy')'$ – взаимосвязь импликации с дизъюнкцией, конъюнкцией и отрицанием;

8) $x \leftrightarrow y = (x \to y)(y \to x)$, $x \leftrightarrow y = (x' + y)(x + y')$;

9) $x \mid y = (xy)'$, $x' = x \mid x$, $xy = (x \mid y)' = (x \mid y) \mid (x \mid y)$, $x + y = x' \mid y' = (x \mid x) \mid (y \mid y)$ – взаимосвязь штриха Шеффера с дизъюнкцией, конъюнкцией и отрицанием;

10) $x \downarrow y = (x + y)'$, $x' = x \downarrow x$, $x + y = (x \downarrow y)' = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$, $xy = x' \downarrow y' = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$ – взаимосвязь стрелки Пирса с дизъюнкцией, конъюнкцией и отрицанием;

11) $x \oplus y = y \oplus x$, $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$, $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$, $x \oplus x = 0$, $x \oplus 0 = x$, $x \oplus 1 = x'$, $x \oplus x' = 1$ – характеристическое свойство суммы Жегалкина;

12) $x \oplus y = xy' + x'y$, $x \to y = xy \oplus x \oplus 1$, $x \leftrightarrow y = x \oplus y \oplus 1$, $x + y = (x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus 1 = x \oplus y \oplus xy$ – взаимосвязь суммы Жегалкина с дизъюнкцией, конъюнкцией, отрицанием, импликацией и эквивалентностью.

Определение. *Суперпозицией* булевых функций $g(y_1,\ldots,y_m)$ и $h_1(x_1,\ldots,x_n)$, …, $h_m(x_1,\ldots,x_n)$ называется булева функция $f(x_1,\ldots,x_n)$, значения которой определяются по формуле:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = g\big(h_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,h_m(x_1,\ldots,x_n)\big).$$

Для упрощения записи суперпозиции булевых функций скобки по возможности опускаются с учетом следующего приоритета выполнения булевых операций: $'$, $\cdot$ и затем все остальные операции.

Определение. Система булевых функций $F = \{f_1, \dots, f_k\}$ называется *полной*, если любая булева функция может быть представлена в виде суперпозиции функций из этой системы F.

Теорема Жегалкина. Любая булева функция f от n переменных представима в виде следующего полинома Жегалкина

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigoplus_{(i_1, \dots, i_k)} x_{i_1} \dots x_{i_k} \oplus c$$

для некоторых значений $c \in \{0,1\}$ и $1 < i_1 < \dots < i_k \leq n$. Причем такое представление булевой функции f единственно с точностью до порядка слагаемых.

Лемма. Булевы функции от двух переменных взаимосвязаны следующими свойствами:

1) $(x+y)'=x'y'$, $(xy)'=x'+y'$ – законы де Моргана;

2) $x+xy=x$, $x(x+y)=x$ – законы поглощения;

3) $x+x'=1$, $xx'=0$ – характеристическое свойство отрицания;

4) $x+1=1$, $x\cdot 1=x$ – характеристическое свойство элемента 1;

5) $x+0=x$, $x\cdot 0=0$ – характеристическое свойство элемента 0;

6) $x+y=(x'y')'$, $xy=(x'+y')'$ – взаимосвязь конъюнкции и дизъюнкции;

7) $x\to y=x'+y$, $x\to y=(xy')'$ – взаимосвязь импликации с дизъюнкцией, конъюнкцией и отрицанием;

8) $x \leftrightarrow y = (x \to y)(y \to x)$, $x \leftrightarrow y = (x' + y)(x + y')$;

9) $x \mid y = (xy)'$, $x' = x \mid x$, $xy = (x \mid y)' = (x \mid y) \mid (x \mid y)$, $x + y = x' \mid y' = (x \mid x) \mid (y \mid y)$ – взаимосвязь штриха Шеффера с дизъюнкцией, конъюнкцией и отрицанием;

10) $x \downarrow y = (x + y)'$, $x' = x \downarrow x$, $x + y = (x \downarrow y)' = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$, $xy = x' \downarrow y' = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$ – взаимосвязь стрелки Пирса с дизъюнкцией, конъюнкцией и отрицанием;

11) $x \oplus y = y \oplus x$, $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$, $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$, $x \oplus x = 0$, $x \oplus 0 = x$, $x \oplus 1 = x'$, $x \oplus x' = 1$ – характеристическое свойство суммы Жегалкина;

12) $x \oplus y = xy' + x'y$, $x \to y = xy \oplus x \oplus 1$, $x \leftrightarrow y = x \oplus y \oplus 1$, $x + y = (x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus 1 = x \oplus y \oplus xy$ – взаимосвязь суммы Жегалкина с дизъюнкцией, конъюнкцией, отрицанием, импликацией и эквивалентностью.

Определение. Система булевых функций $F = \{f_1, \dots, f_k\}$ называется *полной*, если любая булева функция может быть представлена в виде суперпозиции функций из этой системы F.

Теорема Жегалкина. Любая булева функция f от n переменных представима в виде следующего полинома Жегалкина

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigoplus_{(i_1, \dots, i_k)} x_{i_1} \dots x_{i_k} \oplus c$$

для некоторых значений $c \in \{0,1\}$ и $1 < i_1 < \dots < i_k \le n$. Причем такое представление булевой функции f единственно с точностью до порядка слагаемых.

<u>Определение</u>. Булева функция f называется *линейной*, если ее представление полиномом Жегалкина не содержит произведения переменных.

Множество всех линейных булевых функций обозначим символом ***L***.

<u>Определение</u>. Булева функция $f(x_1,\dots,x_n)$ называется *самодвойственной*, если $f(x_1,\dots,x_n)=\left(f(x_1',\dots,x_n')\right)'$.

Множество всех самодвойственных булевых функций обозначим символом ***S***.

<u>Определение</u>. Булева функция $f(x_1,\dots,x_n)$ называется *монотонной*, если для любых $x_1,\dots,x_n,\ y_1,\dots,y_n\in\{0,1\}$ из $x_1\le y_1,\dots,x_n\le y_n$ следует $f(x_1,\dots,x_n)\le f(y_1,\dots,y_n)$.

Множество всех монотонных булевых функций обозначим символом ***M***.

Пусть $\boldsymbol{P}_0$ - класс всех булевых функций $f(x_1,\dots,x_n)$, удовлетворяющих условию $f(0,\dots,0)=0$.

Пусть $\boldsymbol{P}_1$ - класс всех булевых функций $f(x_1,\dots,x_n)$, удовлетворяющих условию $f(1,\dots,1)=1$.

Определение. Классы булевых функций $\boldsymbol{L},\boldsymbol{S},\boldsymbol{M},\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{P}_1$ называются *классами Поста.*

Теорема Поста. Система булевых функций в том и только том случае является полной, если она не содержится ни в одном из классов Поста.

Алгоритм доказательства полноты системы булевых функций $F=\{f_1,\dots,f_k\}$:

1. Составить таблицу, столбцы которой помечены классами Поста $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_1$ и строки – функциями системы $f_1,\dots,f_n$.

2. Для каждой из функций $f_1,\dots,f_n$ проверить принадлежность ее к классам Поста и результаты проверки зафиксировать словами «Да» или «Нет» в соответствующей клетке таблицы.

3. По теореме Поста данная система является полной в том и только том случае, если в каждом столбце таблицы имеется слово «Нет».

Пример.

Рассмотрим систему $F = \{\,|\,\}$, состоящую из одной булевой функции | – штрих Шеффера. Составляем таблицу, столбцы которой помечены классами Поста $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_1$ и одна строка – функцией |.

Функция	Классы Поста				
	$\boldsymbol{L}$	$\boldsymbol{S}$	$\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{P}_0$	$\boldsymbol{P}_1$
|	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет

Так как $0|0=1$ и $1|1=0$, то функция $|$ не принадлежит классам $\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_1$.

В силу свойств $1|0 \neq (0|1)'$, $0|0 > 1|1$ функция $|$ не принадлежит классам $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{M}$.

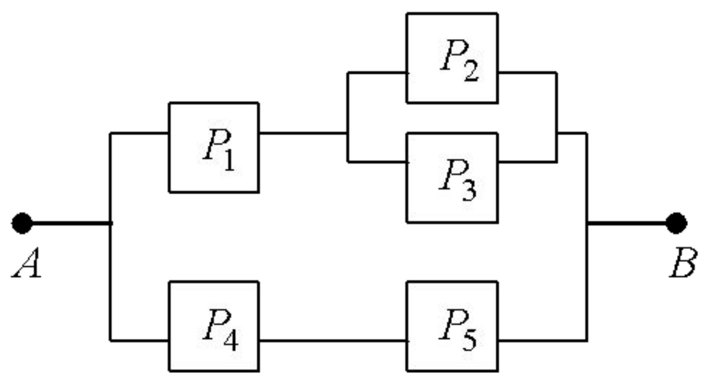
Из равенств $x|y=(xy)'=1 \oplus xy$ следует, что функция $|$ не принадлежит классу $\boldsymbol{L}$.

Таким образом, по теореме Поста система функций $F=\{|\}$ является полной.

Переключательные схемы

Рассматриваются электрические ПС, представляющие собой соединенные проводниками переключатели и источники тока.

Условимся обозначать символом 1 протекание тока в проводниках и символом 0 – отсутствие тока в проводниках.



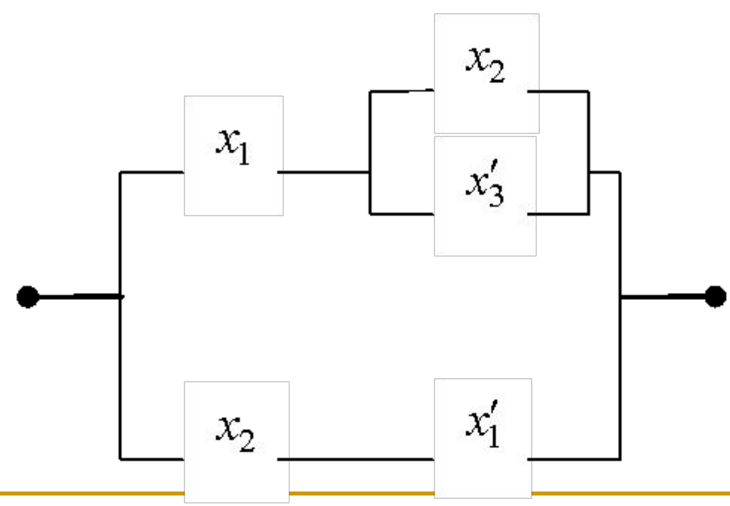
Переключатель - электромагнитное реле с контактами и индукционной катушкой, состояние которой моделируется булевой переменной x: $x=1$ - в катушке идет ток, и $x=0$ - в катушке тока нет.

Контакты реле – замыкающие или размыкающие.

Через *замыкающий контакт* реле ток проходит в том и только том случае, если $x=1$ - такой контакт моделируется булевой переменной x.

Через *размыкающий контакт* реле ток проходит в том и только том случае, если $x=0$ - такой контакт моделируется отрицанием булевой переменной x'.

<u>Пример</u>. Пусть в ПС на рис.1 переключатели P_1, P_5 имеют общую катушку реле с током x_1 и переключатели P_2, P_4 имеют общую катушку реле с током x_2, причем контакты P_1, P_2, P_4 – замыкающие и контакты P_3, P_5 – размыкающие. Тогда такая ПС с помощью булевых переменных x_1, x_2, x_3 изображается следующей диаграммой:



Переключатели p,q могут быть соединены последовательно или параллельно.

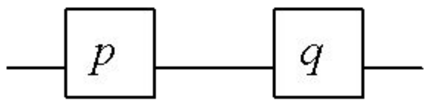


Рис.3

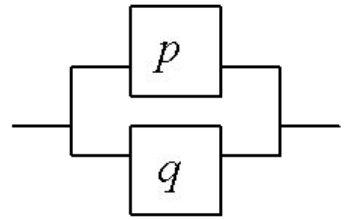


Рис.4

Через последовательно соединенные переключатели p,q ток проходит в том и только том случае, если $p=q=1$ - такое соединение моделируется булевым многочленом pq.

Через параллельно соединенные переключатели p,q ток не проходит в том и только том случае, если $p=q=0$ - такое соединение моделируется булевым многочленом $p+q$.

В результате любая электрическая ПС моделируется некоторым булевым многочленом *p*, который принимает значение 1 в том и только том случае, если в ПС идет ток.

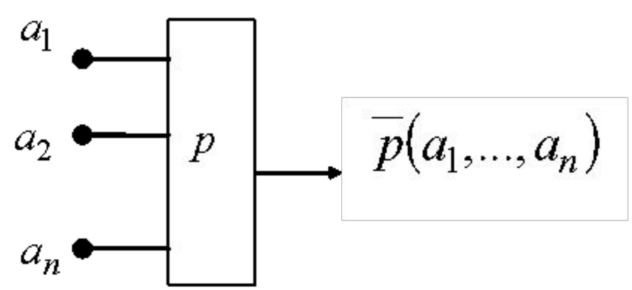
Соответствующая такому многочлену *p* булева функция $\overline{p}$ называется *функцией проводимости ПС*, так как она показывает, при каких значениях булевых переменных (т.е. переключателей данной схемы) в ПС идет электрический ток.

С другой стороны, каждый булев многочлен $p = p(x_1, \ldots, x_n)$ моделирует ПС с функцией проводимости $\overline{p}$: эта схема так конструируется из переключателей $x_1, x_1', \ldots, x_n, x_n'$, что в ней при значениях $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$ проходит ток в том и только том случае, если $\overline{p}(a_1, \ldots, a_n) = 1$.

Переключательные схемы и логические элементы

Переключательную схему с функцией проводимости, $p = p(x_1, \ldots, x_n)$, можно представлять в виде устройства с n входами и одним выходом, которое преобразует входные булевы значения $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$ в выходное булево значение $\overline{p}(a_1, \ldots, a_n)$.

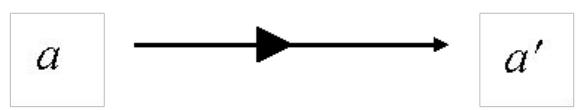
Графически такое устройство изображается диаграммой:



Простейшие булевы многочлены моделируют ПС, которые называются *логическими элементами* (или *вентилями*) и обозначаются специальными диаграммами.

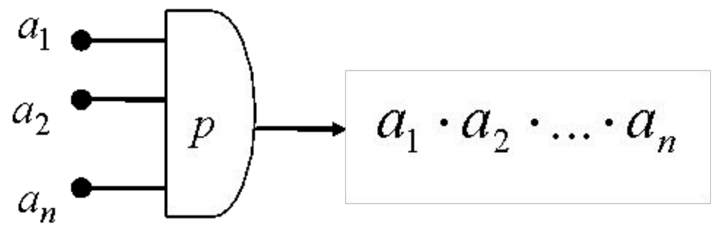
<u>Примеры</u>.

Булев многочлен $p(x) = x'$ моделирует устройство с одним входом и одним выходом, которое изображается диаграммой



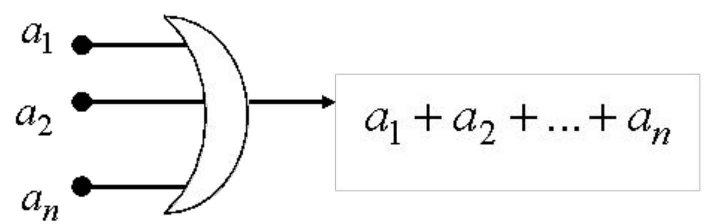
и называется *NOT-элементом*.

Булев многочлен $p(x_1,\ldots,x_n)=x_1\cdot\ldots\cdot x_n$ моделирует устройство с *n* входами и одним выходом, которое изображается диаграммой



и называется *AND-элементом.*

Булев многочлен $p(x_1,\ldots,x_n) = x_1 + \ldots + x_n$ моделирует устройство с n входами и одним выходом, которое изображается диаграммой



и называется *OR-элементом.*