ПОВЕРХНОСТИ 2 ПОРЯДКА

Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называется геометрическое место точек в пространстве, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x,y,z) = 0$, где $F(x,y,z)$ – многочлен степени 2.

$\Rightarrow$ в общем случае уравнение поверхности 2-го порядка имеет вид:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{10}x+2a_{20}y+2a_{30}z+a_{00}=0 .$$

Поверхности второго порядка делятся на

1) ***вырожденные*** и 2) ***невырожденные***

Вырожденные поверхности второго порядка это плоскости и точки, которые задаются уравнением второй степени. Если уравнению второго порядка не удовлетворяет ни одна точка пространства, то тоже говорят, что уравнение определяет вырожденную поверхность (мнимую поверхность второго порядка).

Невырожденными поверхности второго порядка подразделяются на пять типов.

1. Эллипсоид

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Эллипсоидом*** *называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (1)$$

где a, b, c – положительные константы.

Система координат, в которой эллипсоид имеет уравнение (1) называется его ***канонической системой координат***, а уравнение (1) – ***каноническим уравнением эллипсоида***.

ИССЛЕДОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПСОИДА

1) Эллипсоид имеет центр симметрии $O(0;\,0;\,0)$ и три плоскости симметрии xOy, xOz, yOz.
2) Сечения плоскостями $x = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{a^2}.$$

Это уравнение определяет

а) при $|\,h\,|<a$ – эллипс (причем, чем больше $|\,h\,|$, тем меньше полуоси эллипса);

б) при $|\,h\,|=a$ – точку $A_{2,1}(\pm a;\,0;\,0)$;

в) при $|\,h\,|>a$ – мнимую кривую.

3) Сечения плоскостями $y = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2}.$$

Это уравнение определяет

а) при $|h| < b$ – эллипс (причем, чем больше $|h|$, тем меньше полуоси эллипса);

б) при $|h| = b$ – точку $B_{2,1}(0; \pm b; 0)$;

в) при $|h| > b$ – мнимую кривую.

4) Сечения плоскостями $z = h$:

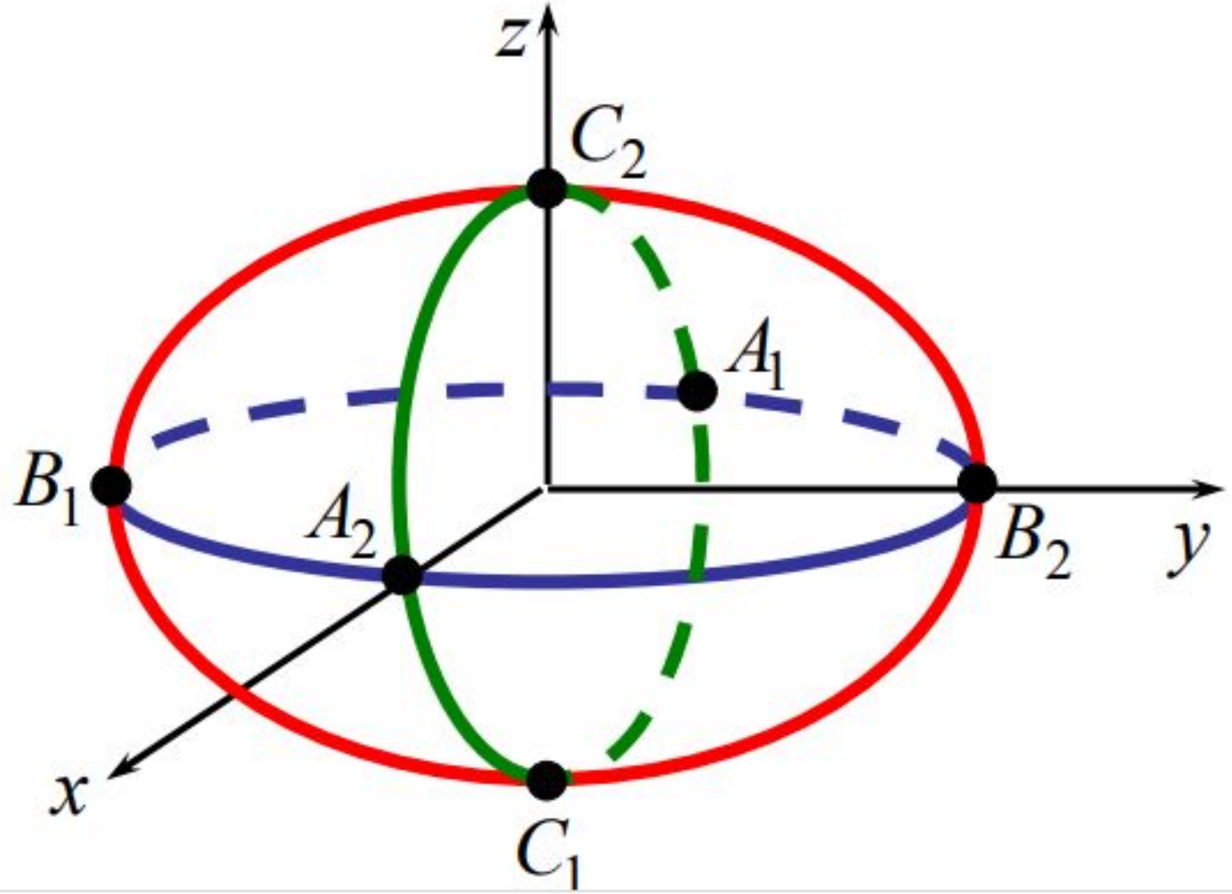
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ z = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}.$$

Это уравнение определяет

а) при $|h| < c$ – эллипс (причем, чем больше $|h|$, тем меньше полуоси эллипса);

б) при $|h| = c$ – точку $C_{2,1}(0; 0; \pm c)$;

в) при $|h| > c$ – мнимую кривую.



Величины a, b и c называются ***полуосями*** эллипсоида.
Если все они различны, то эллипсоид называется ***трехостным***.
Если две из трех полуосей равны, эллипсоид является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения эллипса вокруг одной из своих осей.

Эллипсоид, у которого все три полуоси равны, называют ***сферой***.

Каноническое уравнение сферы принято записывать в виде

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

где r – величина полуосей, которая называется ***радиусом сферы***.

С геометрической точки зрения, *сфера – геометрическое место точек пространства, равноудаленных* (на расстояние r) *от некоторой фиксированной точки (*называемой *центром)*. В канонической системе координат сферы, центр – начало координат.

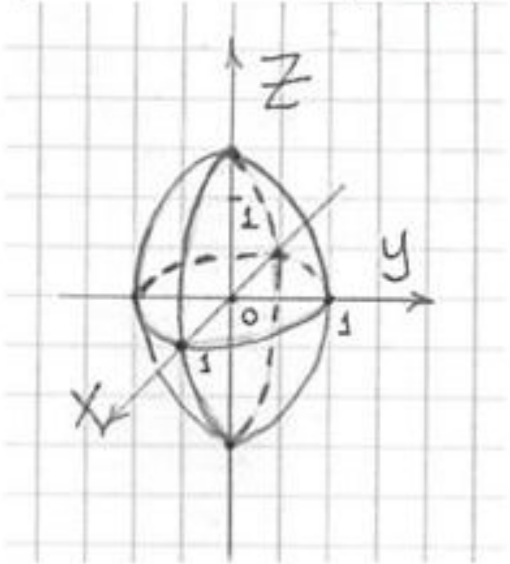
Происхождение термина «эллипсоид» тоже очевидно: если поверхность «разрезать» координатными плоскостями, то в сечениях получатся три различных (в общем случае) **эллипса**. В зависимости от значений a, b, c эллипсоид может быть вытянут вдоль любой оси, причём вытянут достаточно далеко.

Если две полуоси совпадают, то данную поверхность/тело называют *эллипсоидом вращения*. Так, например, эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ получен вращением **эллипса** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вокруг оси OX *(представьте мысленно)*.

Пример 1

Построить эллипсоид $x^2+y^2+\frac{4z^2}{9}=1$. Записать уравнение порождающего эллипса и ось, вокруг которой осуществляется его вращение.

Решение: *данный эллипсоид получен вращением эллипса* $x^2+\frac{z^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1$ *(плоскость* XOZ *) вокруг оси* OZ *:*

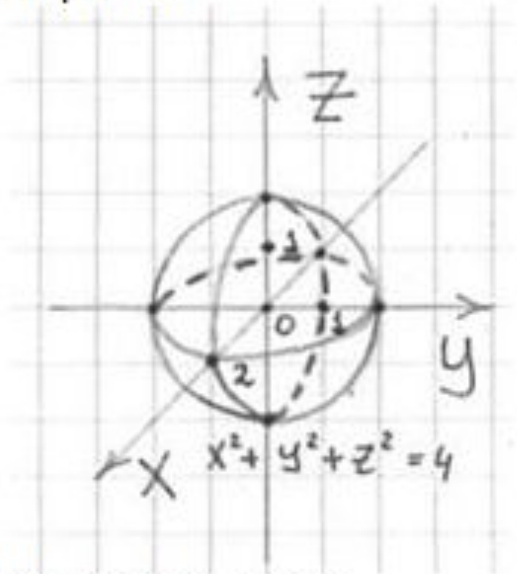


Примечание: *также можно считать, что вращается эллипс* $y^2+\frac{z^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1$, *лежащий в плоскости* YOZ *.*

Пример **2.**

Построить поверхность $x^2+y^2+z^2=4$. Найти функции, задающие верхнюю и нижнюю полусферу, указать их области определения. Записать аналитическое выражение шара, ограниченного данной сферой и проверить, принадлежат ли ему точки $D(1;-1;2)$, $F(1;\sqrt{2};1)$

Решение: уравнение $x^2+y^2+z^2=2^2$ задаёт сферу с центром в начале координат радиуса 2. Здесь, как и в примерах с параболическими цилиндрами, выгодно уменьшить масштаб чертежа:



Выразим «зет»:

$z^2=4-x^2-y^2$

$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ – функция, задающая верхнюю полусферу;

$z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ – функция, задающая нижнюю полусферу.

Областью определения каждой функции является **круг** $x^2 + y^2 \le 4$ с центром в начале координат радиуса 2 (проекция полусфер на плоскость XOY).

Неравенство $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$ определяет шар с центром в начале координат радиуса 2. Подставим координаты точек $D(1;-1;2)$, $F(1;\sqrt{2};1)$ в данное неравенство:

1) $D(1;-1;2)$

$$1^2 + (-1)^2 + 2^2 \le 4$$
$$6 \le 4$$

Получено **неверное неравенство**, следовательно, точка «дэ» лежит вне шара.

2) $F(1;\sqrt{2};1)$

$$1^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2 \le 4$$
$$4 \le 4$$

Получено **верное неравенство**, значит, точка «эф» принадлежит шару, а конкретнее – его границе (сфере).

Материал о сферах и шарах достаточно прост, и я предлагаю вам чисто символическое задание для самостоятельного решения:

2. Гиперболоиды

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Однополостным гиперболоидом*** *называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (2)$$

где a, b, c *– положительные константы.*

Система координат, в которой однополостный гиперболоид имеет уравнение (2) называется его ***канонической системой координат***, а уравнение (2) – ***каноническим уравнением однополостного гиперболоида***.

ИССЛЕДОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ОДНОПОЛОСТНОГО ГИПЕРБОЛОИДА

1) Однополостный гиперболоид имеет центр симметрии $O(0;\,0;\,0)$ и три плоскости симметрии xOy, xOz, yOz.
2) Сечения плоскостями $x = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}.$$

Это уравнение определяет

а) при $|\,h\,| < a$ – гиперболу, с действительной осью $\parallel Oy$;

б) при $|\,h\,| > a$ – гиперболу, с действительной осью $\parallel Oz$;

в) при $|\,h\,| = a$ – пару прямых.

3) Сечения плоскостями $y = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}.$$

Это уравнение определяет

а) при $|h| < b$ – гиперболу, с действительной осью $\parallel Ox$;

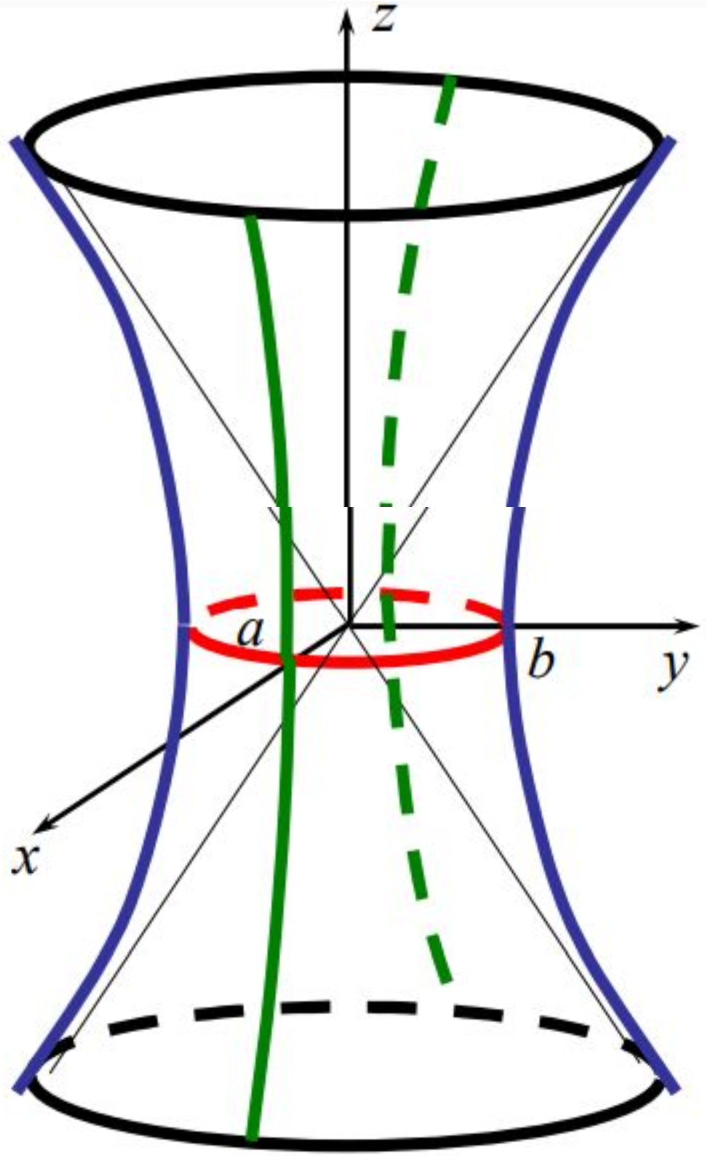
б) при $|h| > b$ – гиперболу, с действительной осью $\parallel Oz$;

в) при $|h| = b$ – пару прямых.

4) Сечения плоскостями $z = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}.$$

Это уравнение определяет эллипс при любом h.
При $h = 0$ полуоси эллипса будут наименьшими. Этот эллипс называют ***горловым эллипсом*** однополостного гиперболоида.



Величины a, b и c называются ***полуосями*** однополостного гиперболоида.

Если $a = b$, то однополостный гиперболоид является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения вокруг своей мнимой оси гиперболы

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Замечание. Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

тоже определяют однополостные гиперболоиды, но они «вытянуты» вдоль оси Oy и Ox соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Двуполостным гиперболоидом*** *называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \qquad (3)$$

где a, b, c *– положительные константы.*

Система координат, в которой двуполостный гиперболоид имеет уравнение (3) называется его ***канонической системой координат***, а уравнение (3) – ***каноническим уравнением двуполостного гиперболоида***.

ИССЛЕДОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДВУПОЛОСТНОГО ГИПЕРБОЛОИДА

1) Двуполостный гиперболоид имеет центр симметрии $O(0;\, 0;\, 0)$ и три плоскости симметрии xOy, xOz, yOz.

2) Сечения плоскостями $x = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1, \\ x=h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1-\frac{h^2}{a^2}.$$

При любом h это уравнение определяет гиперболу, с действительной осью $\parallel Oz$.

3) Сечения плоскостями $y = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1, \\ y = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 - \frac{h^2}{b^2}.$$

При любом h это уравнение определяет гиперболу, с действительной осью $\parallel Oz$.

4) Сечения плоскостями $z = h$:

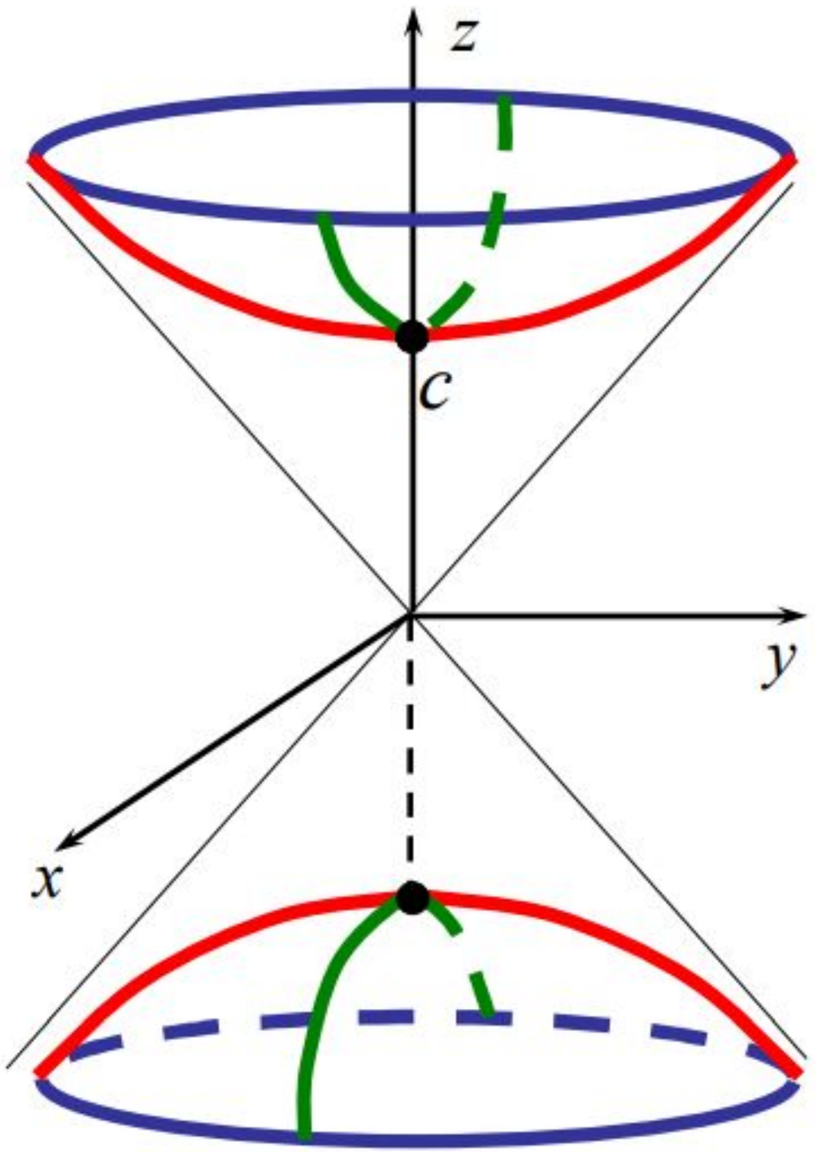
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1, \\ z = h. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 + \frac{h^2}{c^2}.$$

Это уравнение определяет

а) при $|h| > c$ – эллипс (причем, чем больше $|h|$, тем больше полуоси эллипса);

б) при $|h| = c$ – точку $C_{2,1}(0;\ 0;\ \pm c)$;

в) при $|h| < c$ – мнимую кривую.



Величины a, b и c называются ***полуосями*** двуполостного гиперболоида.

Если $a = b$, то двуполостный гиперболоид является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения вокруг своей действительной оси гиперболы

$$-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Замечание. Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad \text{и} \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

тоже определяют двуполостные гиперболоиды, но они «вытянуты» вдоль оси Oy и Ox соответственно.

3. Конус

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Конусом*** *называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \qquad (4)$$

где a, b, c *– положительные константы.*

Система координат, в которой конус имеет уравнение (4) называется его ***канонической системой координат***, а уравнение (4) – ***каноническим уравнением конуса***.

ИССЛЕДОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ КОНУСА

1) Конус имеет центр симметрии $O(0;\ 0;\ 0)$ и три плоскости симметрии xOy, xOz, yOz.

2) Сечения плоскостями $x = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0, \\ x = h. \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{h^2}{a^2}.$$

Это уравнение определяет

а) при $h \neq 0$ – гиперболу, с действительной осью $\parallel Oz$;

б) при $h = 0$ – пару прямых.

3) Сечения плоскостями $y = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0, \\ y = h. \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{h^2}{b^2}.$$

Это уравнение определяет

а) при $h \neq 0$ – гиперболу, с действительной осью $\parallel Oz$;

б) при $h = 0$ – пару прямых.

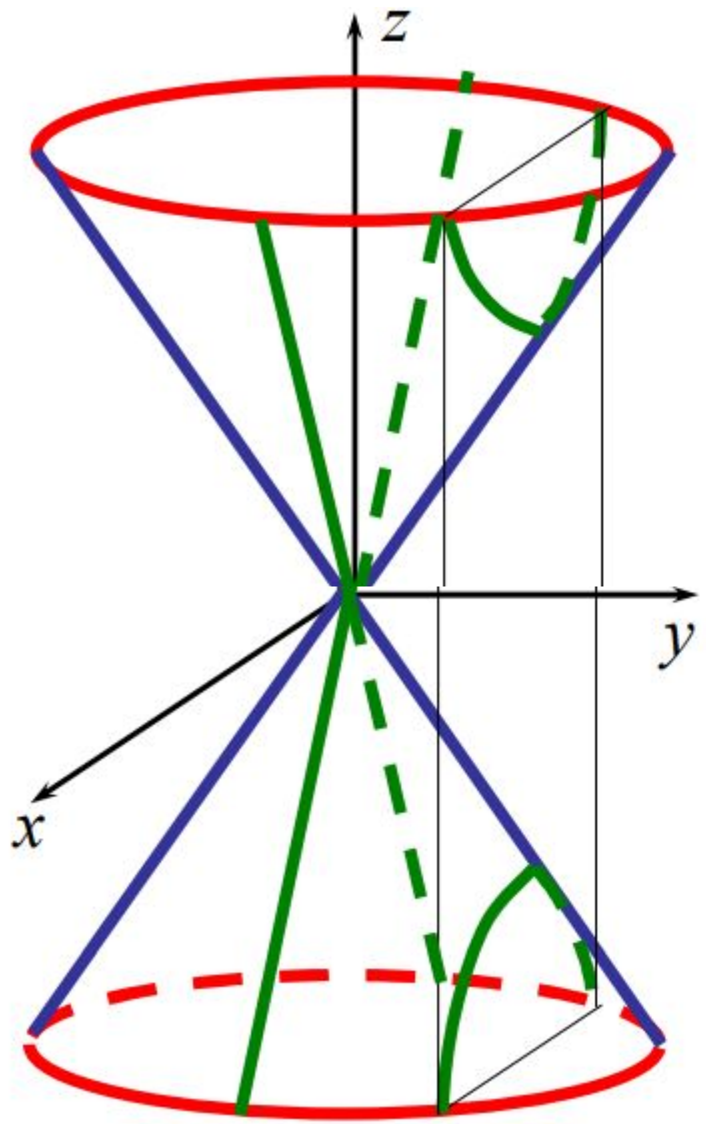
4) Сечения плоскостями $z = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0, \\ z = h. \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}.$$

Это уравнение определяет

а) при $h \neq 0$ – эллипс (причем, чем больше $|h|$, тем больше полуоси эллипса);

б) при $h = 0$ – точку $O(0; 0; 0)$.



Величины a, b и c называются ***полуосями*** конуса.

Центр симметрии O называется ***вершиной конуса***.

Если $a = b$, то конус является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения вокруг оси Oz прямой

$$z = \frac{c}{b} y$$

Замечание. Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \quad \text{и} \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

тоже определяют конусы, но они «вытянуты» вдоль оси Oy и Ox соответственно.

Отметим свойства конуса, вытекающие из определения:

1. Точка O – центр симметрии – *вершина конуса*.

2. Поверхность симметрична относительно координатных плоскостей.

Для того чтобы построить конус второго порядка, применим *метод параллельных сечений*.

В сечениях конуса плоскостью Oyz ($x = 0$) имеем прямые линии

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}, \\ x = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} y = \pm \dfrac{b}{c} z, \\ x = 0, \end{cases}$$

называемые *образующими* конуса.

В сечениях конуса плоскостью Oxz ($y = 0$) имеем прямые линии

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{z^2}{c^2}, \\ y = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x = \pm \dfrac{a}{c} z, \\ y = 0, \end{cases}$$

называемые *образующими* конуса.

Рассечем поверхность плоскостями $z = h$, параллельными плоскости Oxy. В сечениях имеем линии

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2}, \\ z = h, \end{cases}$$

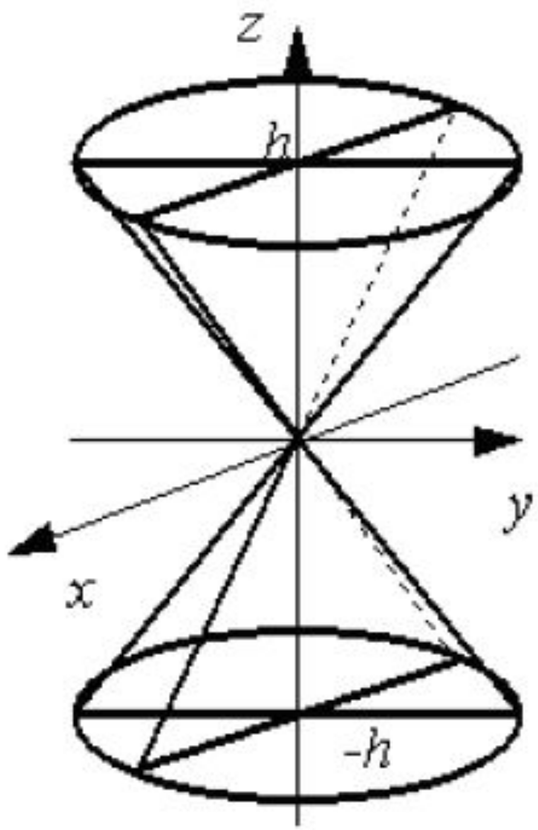
являющиеся эллипсами

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a_1^{\ 2}} + \dfrac{y^2}{b_1^{\ 2}} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

где $a_1 = \dfrac{a}{c}|h|$ и $b_1 = \dfrac{b}{c}|h|$.

При $h = 0$ получим в сечении точку $O\,(0;0;0)$.

При увеличении $|h|$ полуоси эллипса увеличиваются.



***Примечания*:**

1. Коническую поверхность второго порядка можно также определить, как семейство прямых, проходящих через точку O и пересекающих эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

2. Если $a=b$, то $\frac{a^2}{c^2}z=x^2+y^2$ – *круговой конус.*

3. Конусы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ и $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ направлены вдоль осей Oy и Ox.

4. Смещенный конус с вершиной в точке $O'(x_0; y_0; z_0)$ задается уравнением $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=0$.

Пример 3.

Построить поверхность $z = 2 \cdot \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}}$

Решение: уравнение имеет вид $z = \dfrac{c}{a}\sqrt{x^2 + y^2}$ и определяет половину конуса, располагающуюся в верхнем полупространстве. Вершина конической поверхности, понятно, расположена в начале координат, но как построить всё остальное?

Возведём обе части исходного уравнения в квадрат:

$$z^2 = 4 \cdot \frac{x^2 + y^2}{3}$$

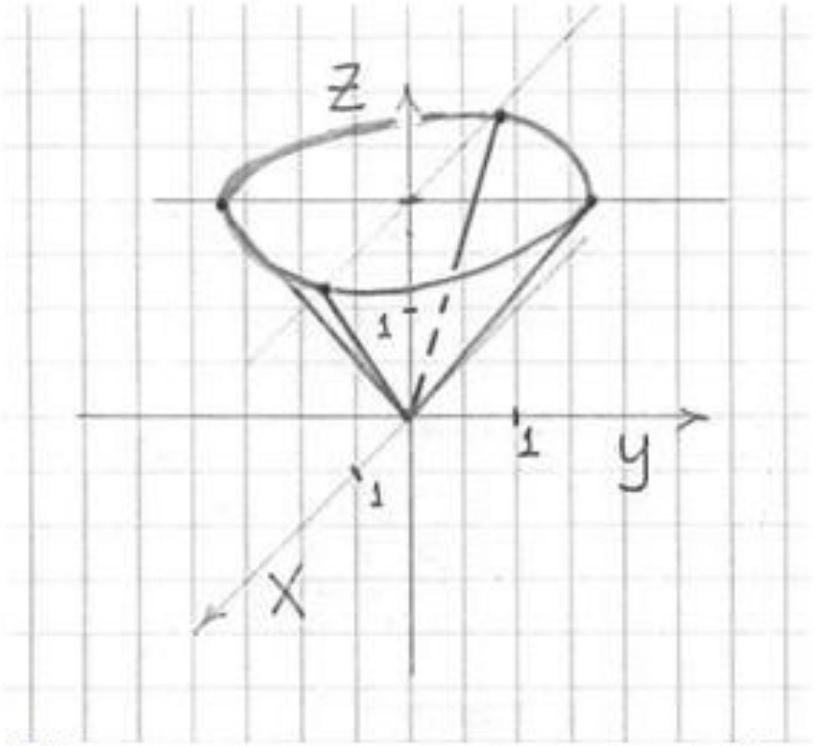
$$\frac{3}{4}z^2 = x^2 + y^2$$

Далее выберем небольшое положительное значение «зет», например $z = 2$, и найдём линию пересечения этой плоскости с нашей поверхностью:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{4}z^2 = x^2 + y^2 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = \frac{3}{4} \cdot 2^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 3$$ – окружность радиуса $\sqrt{3}$.

Пояснение на всякий случай: $z = 2$ *подставили в 1-е уравнение*

Теперь на высоте $z = 2$ изобразим окружность $x^2 + y^2 = 3$ и аккуратно проведём 4 образующие конуса:



Образующие, в принципе, можно было продолжить и выше плоскости $z = 2$.

Не забываем, что уравнение $z = 2 \cdot \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}}$ задаёт только верхнюю часть поверхности и поэтому никаких «хвостиков» в нижнем полупространстве быть не должно.

Пожалуй, простейшая коническая поверхность:

Пример 4.. Найти уравнение поверхности, если прямую $y = x - 1$ вращать вокруг оси Ox.

Решение:

Так как вращение прямой линии происходит вокруг оси Ox, то в силу изложенного выше правила, нам нужно в данном уравнении $y = x - 1$ заменить y на $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$.

В результате получим $\pm\sqrt{y^2 + z^2} = x - 1$. Возведя обе части этого соотношения в квадрат, получим уравнение конуса с вершиной в точке $M_0\ (1; 0; 0)$:

$$y^2 + z^2 = (x - 1)^2 .$$

4. Параболоиды

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Эллиптическим параболоидом*** *называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z, \qquad (5)$$

где a, b – положительные константы.

Система координат, в которой эллиптический параболоид имеет уравнение (5) называется его ***канонической системой координат***, а уравнение (5) – ***каноническим уравнением эллиптического параболоида***.

ИССЛЕДОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПАРАБОЛОИДА

1) Эллиптический параболоид имеет две плоскости симметрии xOz, yOz.

2) Сечения плоскостями $x = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z, \\ x = h. \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{b^2} = 2z - \frac{h^2}{a^2}.$$

При любом h это уравнение определяет параболу. Ее ось $\parallel Oz$, ветви направлены вверх, параметр $p = b^2$. При $h \neq 0$ вершина параболы смещена вверх.

3) Сечения плоскостями $y = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z, \\ y = h. \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x^2}{a^2} = 2z - \frac{h^2}{b^2}.$$

При любом h это уравнение определяет параболу. Ее ось $\parallel Oz$, ветви направлены вверх, параметр $p = a^2$. При $h \neq 0$ вершина параболы смещена вверх.

4) Сечения плоскостями $z = h$:

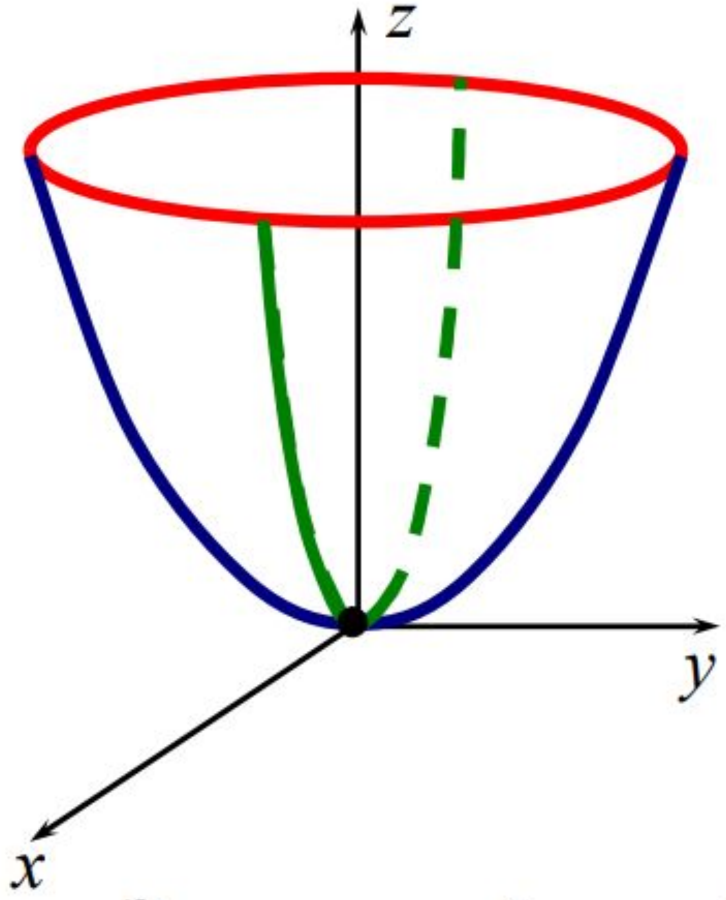
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z, \\ z = h. \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2h.$$

Это уравнение определяет

а) при $h > 0$ – эллипс (причем, чем больше h, тем больше полуоси эллипса);

б) при $h = 0$ – точку $O(0; 0; 0)$;

в) при $h < 0$ – мнимую кривую.



Величины a и b называются *параметрами* параболоида. Точка O называется *вершиной параболоида*.

Если $a = b$, то параболоид является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения вокруг оси Oz параболы

$$y^2 = 2b^2 z$$

Эллиптический параболоид это поверхность, которая получается при движении одной параболы вдоль другой (вершина параболы скользит по параболе, оси подвижной и неподвижной параболы параллельны, ветви направлены в одну сторону).

Замечания:

1) Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-2z$$

тоже определяет эллиптический параболоид, но «развернутый» вниз.

2) Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=\pm 2y, \qquad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\pm 2x$$

определяют эллиптические параболоиды, с осями симметрии Oy и Ox соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Гиперболическим параболоидом*** *называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z\,, \qquad (6)$$

где a, b *– положительные константы.*

Система координат, в которой гиперболический параболоид имеет уравнение (6) называется его ***канонической системой координат***, а уравнение (6) – ***каноническим уравнением гиперболического параболоида***.

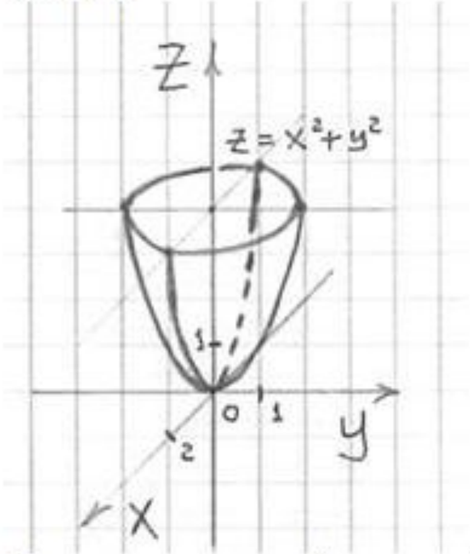
Пример 5.

Построить поверхность $z = x^2 + y^2$. Записать неравенства, определяющие внутреннюю и внешнюю часть эллиптического параболоида.

Решение: используем ту же методику, что и при построении конической поверхности. Рассмотрим какое-нибудь не очень большое значение «зет», здесь удобно выбрать $z = 4$, и найдём сечение эллиптического параболоида этой плоскостью:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 4$$ – окружность радиуса 2.

Теперь на высоте $z = 4$ изобразим данную окружность и аккуратно соединим её с вершиной (началом координат) двумя параболами. В результате получится такая вот симпатичная чашка:



Рассматриваемый частный случай параболоида с горизонтальными сечениями-окружностями также называют *параболоидом вращения*, поскольку его можно получить вращением параболы вокруг оси OZ

ИССЛЕДОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПАРАБОЛОИДА

1) Гиперболический параболоид имеет две плоскости симметрии xOz, yOz.

2) Сечения плоскостями $x = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z, \\ x = h. \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{y^2}{b^2} = 2z - \frac{h^2}{a^2}.$$

При любом h это уравнение определяет параболу. Ее ось $\parallel Oz$, ветви направлены вниз, параметр $p = b^2$. При $h \neq 0$ вершина параболы смещена вверх.

3) Сечения плоскостями $y = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z, \\ y = h. \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} = 2z + \frac{h^2}{b^2}.$$

При любом h это уравнение определяет параболу. Ее ось $\parallel Oz$, ветви направлены вверх, параметр $p = a^2$. При $h \neq 0$ вершина параболы смещена вниз.

4) Сечения плоскостями $z = h$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z, \\ z = h. \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h.$$

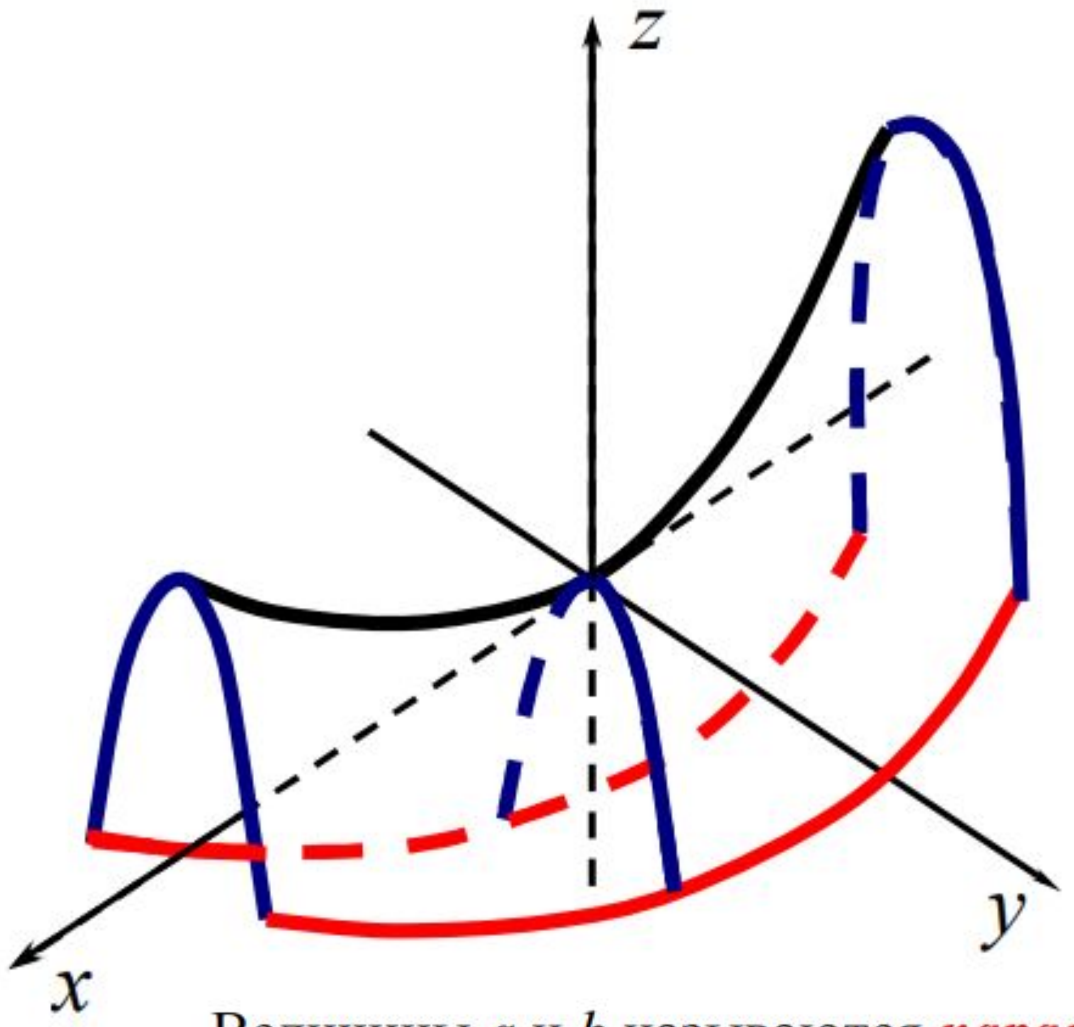
Это уравнение определяет

а) при $h \neq 0$ – гиперболу

при $h > 0$ – действительная ось гиперболы $\parallel Ox$,

при $h < 0$ – действительная ось гиперболы $\parallel Oy$;

б) при $h = 0$ – пару прямых .



Величины a и b называются ***параметрами*** параболоида.

Гиперболический параболоид это поверхность, которая получается при движении одной параболы вдоль другой (вершина параболы скользит по параболе, оси подвижной и неподвижной параболы параллельны, ветви направлены в разные стороны).

Замечания:

1) Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -2z$$

тоже определяет гиперболический параболоид, но «развернутый» вниз.

2) Уравнения

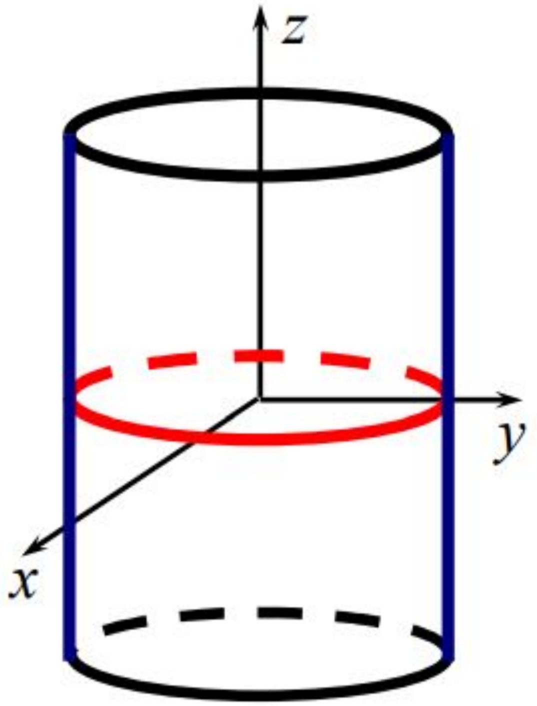
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 2y, \qquad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 2x$$

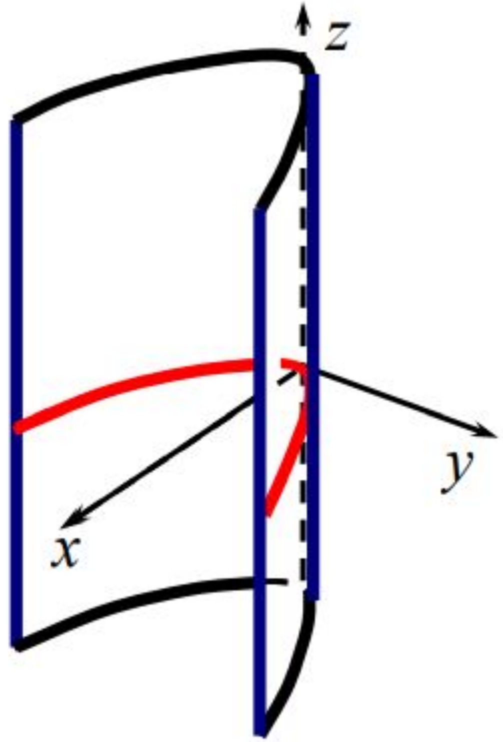
определяют гиперболические параболоиды, у которых «неподвижные параболы» лежат в плоскости xOy и имеют оси Oy и Ox соответственно.

5. Цилиндры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Цилиндрической поверхностью*** (***цилиндром***) *называется поверхность, которую описывает прямая (называемая* ***образующей****), перемещающаяся параллельно самой себе вдоль некоторой кривой (называемой* ***направляющей****)* .

Цилиндры называют по виду направляющей: круговые, эллиптические, параболические, гиперболические.



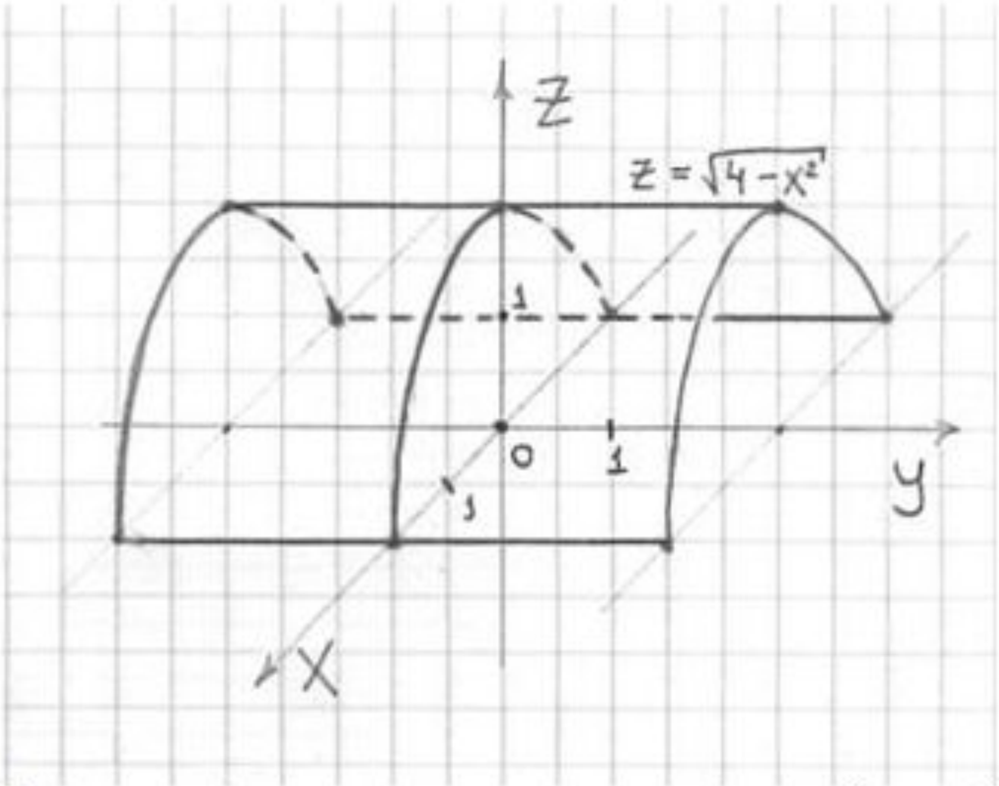


Цилиндр в некоторой декартовой системе координат задается уравнением, в которое не входит одна из координат.

Кривая, которую определяет это уравнение в соответствующей координатной плоскости, является направляющей цилиндра; а образующая – параллельна оси отсутствующей координаты.

Пример 6.: **Решение**: функция $z=\sqrt{4-x^2}$ задаёт верхнюю часть цилиндра $x^2+z^2=4$

:



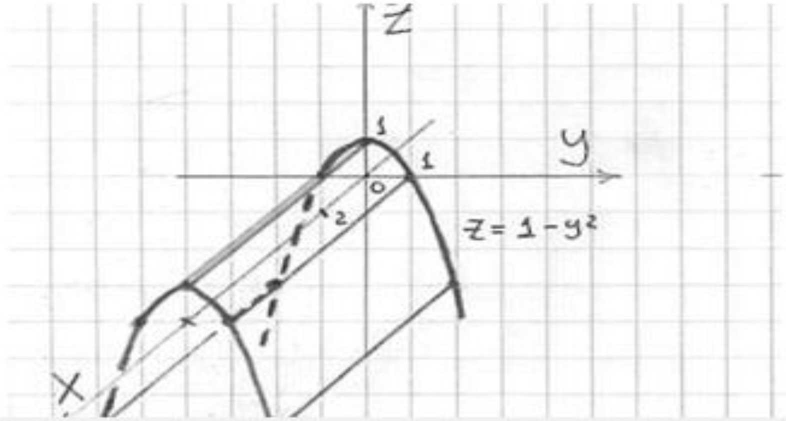
Проекция на плоскость XOY *: часть данной плоскости, ограниченная «плоскими» прямыми* $x=-2, x=2$ *(включая прямые).*

Проекция на плоскость YOZ *: часть данной плоскости, ограниченная прямыми* $z=0, z=2$ *(*$x=0, y$ *– любое), включая сами прямые.*

Проекция на плоскость XOZ *: полуокружность* $z=\sqrt{4-x^2}$ $(y=0)$

Построить параболические цилиндры:

а) $z = 1 - y^2$, ограничиться фрагментом поверхности в ближнем полупространстве;



Пример 7.

б) $z = x^2 + 1$ на промежутке $-2 \le y \le 2$