Примеры решение задач на обработку массивов (одно- и двухмерных) на VBA.

Что такое матрица ?

- Матрица — математический объект, записываемый в виде прямоугольной таблицы

Сумма и разность матриц

Определение

- Суммой A + B матриц $A_{m \times n}=(a_{ij})$ и $B_{m \times n}=(b_{ij})$ называется матрица $C_{m \times n}=(c_{ij})$, где $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$
- Разностью A - B матриц $A_{m \times n}=(a_{ij})$ и $B_{m \times n}=(b_{ij})$ называется матрица $C_{m \times n}=(c_{ij})$, где $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$

Пример

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+2 \\ 3+3 & 4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+2 \\ 3+3 & 4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Пример реализации

```
Dim A(1 To 2, 1 To 2) 'Обьевление матрицы A и задаем размерность
Dim B(1 To 2, 1 To 2) 'Обьевление матрицы B и задаем размерность
Dim C(1 To 2, 1 To 2) 'Обьевление матрицы C и задаем размерность

A(1, 1) = 1: A(1, 2) = 2: A(2, 1) = 3: A(2, 2) = 4 'Заполняем массив A
B(1, 1) = 1: B(1, 2) = 2: B(2, 1) = 3: B(2, 2) = 4 'Заполняем массив B

For i = 1 To 2
For j = 1 To 2

Cells(i + 3, j) = A(i, j) 'Вывод в экселе A
Cells(i + 3, j + 3) = B(i, j) 'Вывод в экселе B

C(i, j) = A(i, j) + B(i, j) 'Основной процесс сложения

Cells(i + 3, j + 6) = C(i, j) 'Вывод в экселе C
Next j
Next i
```

Умножение матриц

Определение

- Пусть даны две прямоугольные матрицы A и B размерности m×n и n×q соответственно:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nq} \end{bmatrix}.$$

- Тогда матрица C размерностью m x q называется их произведением:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mq} \end{bmatrix},$$

- где:

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rj} \quad (i = 1, 2, \ldots m; \; j = 1, 2, \ldots q) .$$

Пример

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

Компоненты матрицы C вычисляются следующим образом:

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 1 + 6 = 7$$

$$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 2 + 8 = 10$$

$$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 3 + 12 = 15$$

$$c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 6 + 16 = 22$$

Пример реализации

```
Dim A(1 To 2, 1 To 2) 'Обьевление матрицы A и задаем размерность
Dim B(1 To 2, 1 To 2) 'Обьевление матрицы B и задаем размерность
Dim C(1 To 2, 1 To 2) 'Обьевление матрицы C и задаем размерность

A(1, 1) = 1: A(1, 2) = 2: A(2, 1) = 3: A(2, 2) = 4 'Заполняем массив A
B(1, 1) = 1: B(1, 2) = 2: B(2, 1) = 3: B(2, 2) = 4 'Заполняем массив B

For i = 1 To 2 'Цикл
For j = 1 To 2 'Цикл
Cells(i, j) = A(i, j) 'Вывод A
Cells(i, j + 3) = B(i, j) 'Вывод B
For k = 1 To 2 'Цикл
C(i, j) = C(i, j) + A(i, k) * B(k, j) 'Основной процесс умножения
Next k
Cells(i, j + 6) = C(i, j) 'Вывод C
Next j
Next i
```

Определитель матриц

Определение

- Для матрицы n×n определитель вычисляется по формуле:

$$\Delta = \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} (-1)^{N(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} \cdot a_{\alpha_1 1} \cdots a_{\alpha_n n}$$

- где a1, a2, ..., an — перестановка чисел от 1 до n, N(a1, a2, ..., an) — число инверсий в перестановке, суммирование проводится по всем перестановкам порядка n. Таким образом, в определитель входит n! слагаемых, которые также называют «членами определителя».

Пример

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$$

Пример реализации

```
Dim n As Byte, j As Byte
Dim i_ As Byte, j_ As Byte
Dim minor()

n = UBound(matrix)
If n = 1 Then det = matrix(1, 1): Exit Function

ReDim minor(1 To n - 1, 1 To n - 1)

For j = 1 To n 'По Первой строки
      For i_ = 1 To n - 1
         For j_ = 1 To n - 1
            If j_ < j Then minor(i_, j_) = matrix(i_ + 1, j_)
            If j_ >= j Then minor(i_, j_) = matrix(i_ + 1, j_ + 1)
         Next j_
      Next i_
   det = det + (-1) ^ (1 + j) * matrix(1, j) * det(minor)
Next j
```

Решение систем линейных уравнений

- Система линейных алгебраических уравнений - система уравнений, каждое уравнение в котором является линейным — алгебраическим уравнением первой степени.

Определение

- Общий вид системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- Здесь m — количество уравнений, а n — количество переменных, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — неизвестные, которые надо определить, коэффициенты $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ и свободные члены $b_1, b_2, \ldots, b_m$ предполагаются известными. Индексы коэффициентов в системах линейных уравнений (a_{ij}) формируются по следующему соглашению: первый индекс (i) обозначает номер уравнения, второй (j) — номер переменной, при которой стоит этот коэффициент.

- Система называется однородной, если все её свободные члены равны нулю ($b_1= b_2= \ldots = b_m = 0$), иначе — неоднородной.

- Квадратная система линейных уравнений — система, у которой количество уравнений совпадает с числом неизвестных ($m=n$). Система, у которой число неизвестных больше числа уравнений является недоопределённой, такие системы линейных алгебраических уравнений также называются прямоугольными. Если уравнений больше, чем неизвестных, то система является переопределённой.

- Решение системы линейных алгебраических уравнений — совокупность n чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, таких что их соответствующая подстановка вместо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в систему обращает все её уравнения в тождества.

- Система называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если у неё нет ни одного решения. Решения считаются различными, если хотя бы одно из значений переменных не совпадает. Совместная система с единственным решением называется определённой, при наличии более одного решения — недоопределённой.

Методы решения

- Метод Гаусса
- Метод Гаусса — Жордана
- Метод Крамера
- Матричный метод
- Метод прогонки (для трёхдиагональных матриц)
- Разложение Холецкого или метод квадратных корней (для положительно-определённых симметричных и эрмитовых матриц)
- Метод вращений

Пример решения метода Гаусса

Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 12 & 2 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 3 & 6 & 6 & 5 \\ 4 & 4 & 5 & 5 & 6 \\ 12 & 2 & 2 & 5 & 9 \end{array}\right) \times(-0) \underset{L_2-0\times L_1\to L_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 12 & 2 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 6 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 5 & 6 \\ 12 & 2 & 2 & 5 & 9 \end{array}\right) \times(-0) \underset{L_3-0\times L_1\to L_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 12 & 2 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 6 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 12 & 2 & 2 & 5 & 9 \end{array}\right) \times(-1) \underset{L_4-1\times L_1\to L_4}{\sim}$$

$$\equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 12 & 2 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 6 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \times(-1) \underset{L_3-1\times L_2\to L_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 12 & 2 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 6 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\equiv \begin{cases} 12\times x_1 + 2\times x_2 + 2\times x_3 + 4\times x_4 = 7 \\ 3\times x_2 + 6\times x_3 + 5\times x_4 = 3 \\ -3\times x_3 - 3\times x_4 = -1 \\ x_4 = 2 \end{cases} \quad (1)$$

Пример решения метода Гаусса

Из уравнения 4 системы (1) найдем переменную x_4:

$x_4=2$

Из уравнения 3 системы (1) найдем переменную x_3:

$-3\times x_3=3\times x_4-\frac{2}{3}$, $-3\times x_3=3\times 2-\frac{2}{3}$, $x_3=\frac{-16}{9}$

Из уравнения 2 системы (1) найдем переменную x_2:

$\frac{5}{2}\times x_2=\frac{-11}{2}\times x_3-5\times x_4+\frac{13}{4}$, $\frac{5}{2}\times x_2=\frac{-11}{2}\times\left(\frac{-16}{9}\right)-5\times 2+\frac{13}{4}$, $x_2=\frac{109}{90}$

Из уравнения 1 системы (1) найдем переменную x_1:

$12\times x_1=-2\times x_2-2\times x_3-4\times x_4+7$, $12\times x_1=-2\times\left(\frac{109}{90}\right)+-2\times\left(\frac{-16}{9}\right)-4\times 2+7$, $x_1=\frac{1}{90}$

Ответ:

$x_1=0$,

$x_2=1$,

$x_3=-2$,

$x_4=2$

Общее решение: $X=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\2\end{pmatrix}$

Пример реализации

Спасибо за внимание !