

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ФГБОУ ВО «Уральский государственный экономический университет»  
Институт Менеджмента и информационных технологий  
Кафедра Шахматного искусства и компьютерной математики



**Лекция № 004 по высшей математике**  
**Тема: «Обратная матрица. Матричные уравнения».**



Миронов Денис Сергеевич  
Старший преподаватель

**Автор:**

Екатеринбург  
2019

**Определение 1.** Квадратная матрица  $A$  называется *невырожденной*, если определитель  $\det A \neq 0$ . В противном случае матрица называется вырожденной.

**Определение 2.** Матрицу, состоящую из алгебраических дополнений элементов матрицы  $A$ , называют *присоединенной* ( $A^*$ ) к матрице  $A$ .

**Определение 3.** Матрицу  $A^{*T}$  называют *союзной* к матрице  $A$ .

**Определение 4.** Матрица  $A^{-1}$  называется обратной матрице  $A$ , если выполняется условие:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E, \text{ где}$$

$E$  – Единичная матрица того же порядка, что и матрица  $A$ ;

$A^{-1}$  имеет те же размеры, что и матрица  $A$ .

**Теорема 1.** Всякая невырожденная матрица имеет обратную.

Формула вычисления обратной матрицы:  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{*T}$  .

Алгоритм вычисления обратной матрицы:

- 1) Проверка вырожденности исходной матрицы (  $\det A \neq 0$  );
- 2) Составляется матрица миноров –  $M$ ;
- 3) Из полученной матрицы миноров составляется матрица алгебраических дополнений (присоединенная матрица) –  $M^*$  ;
- 4) Из матрицы алгебраических дополнений составляется союзная матрица  $M^{*T}$  ;
- 5) Вычисляем по формуле:  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} M^{*T}$  ;
- 6) Проверка (по желанию):  $A \cdot A^{-1} = E$  .

**Пример 1.** Найти обратную матрицу к матрице:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1) Проверим критерий невырожденности:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}. \text{ Раскроем определитель}$$

$$\text{по второму столбцу: } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 15 = -7 \neq 0 \Rightarrow$$

Матрица  $A$  – невырожденная, значит существует обратная.

2) Составляем матрицу миноров:

$$m_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 5 \cdot 0 = 4. \quad m_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 5 \cdot 5 = -17.$$

$$m_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 5 \cdot 1 = -5. \quad m_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot 4 - 0 \cdot 3 = 0.$$

$$m_{22} = -7. \quad m_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 = 0.$$

$$m_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = -3. \quad m_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 4.$$

$$m_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 2.$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -17 & -5 \\ 0 & -7 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

3) Составляем матрицу алгебраических дополнений (присоединенную):

$$M^* = \begin{pmatrix} 4 & 17 & -5 \\ 0 & -7 & 0 \\ -3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

4) Составляем союзную матрицу:

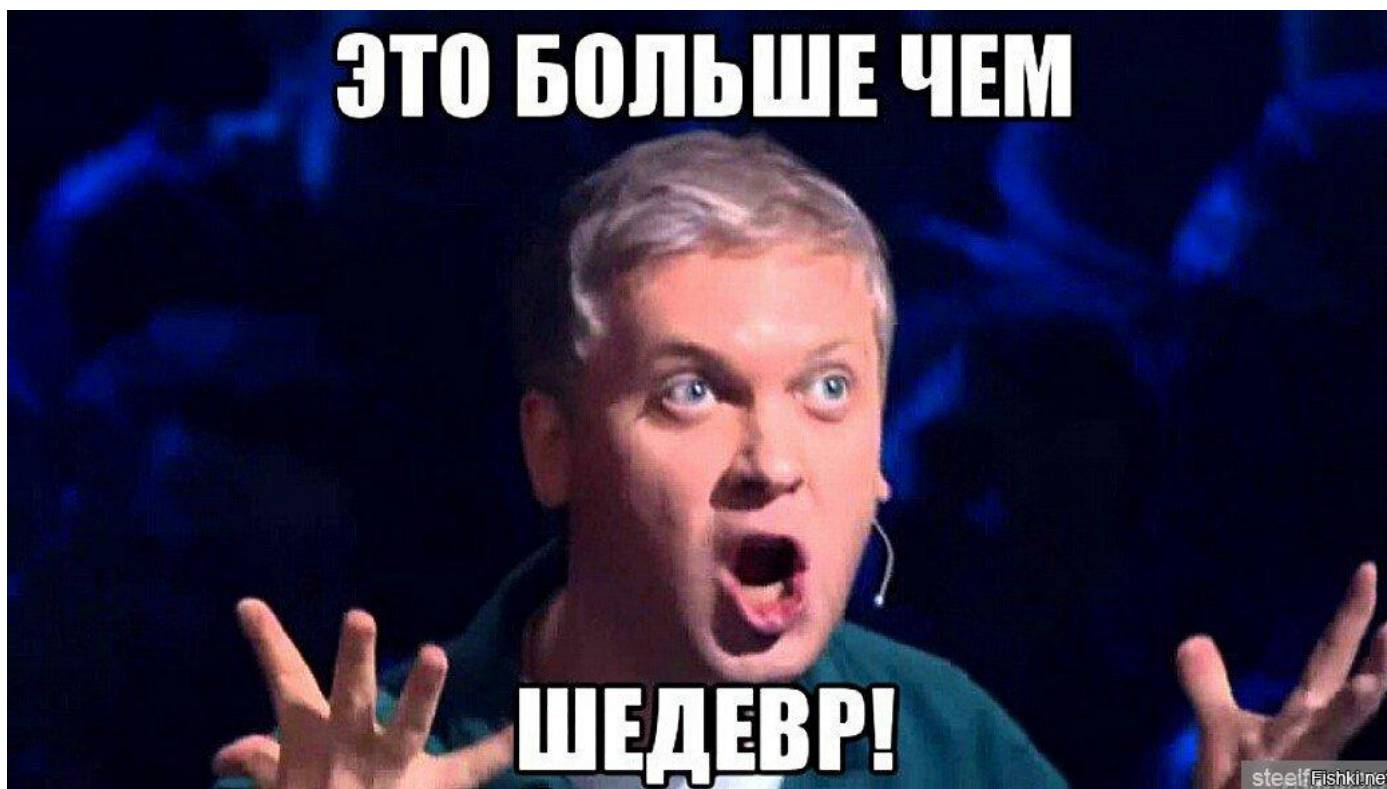
$$M^{*T} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 17 & -7 & -4 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5) 
$$A^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 17 & -7 & -4 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$



6) Проверка:

$$-\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 17 & -7 & -4 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Свойства обратной матрицы:

$$1. \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}; \quad 2. (A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1};$$

$$3. (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

Матричные уравнения:

$$I. A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

$$II. X \cdot A = B \Rightarrow X = BA^{-1}.$$

$$III. A \cdot X \cdot B = C \Rightarrow X = A^{-1}BC^{-1}.$$

$A, B, C$  – известные матрицы.  $X$  – неизвестная матрица.





Иными словами, решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 13 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

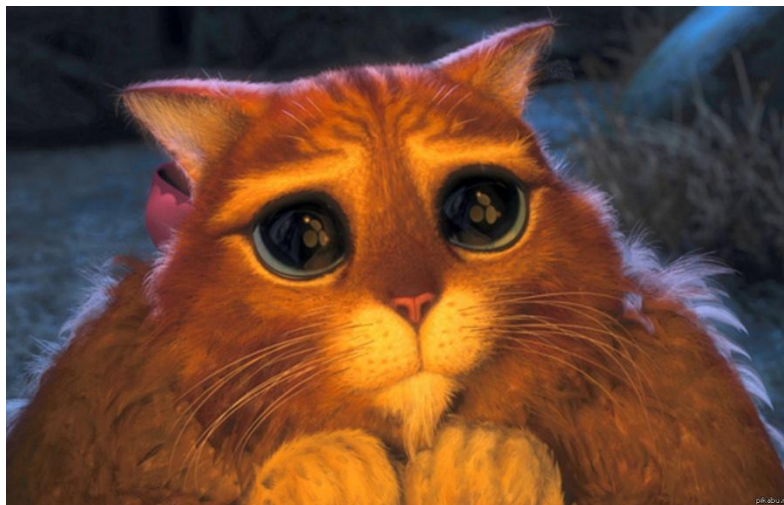
сводится к решению матричного уравнения:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Решением системы называется  $n$  значений переменных  $x_1 = c_1, x_2 = c_2, x_n = c_n$ , при подстановке которых все уравнения обращаются в верные равенства.

**Определение 6.** Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение и *несовместной*, если она не имеет ни одного решения.

**Определение 7.** Система уравнений называется *однородной*, если все её свободные члены равны 0. Однородная система всегда совместна.



**На сегодня всё. Спасибо за внимание.**

*Надеюсь Вам понравилось, я старался!*

*«Не бойся, что не знаешь —  
Бойся, что не учишься».*

*Китайская мудрость*

