Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Уральский государственный экономический университет»
Институт Менеджмента и информационных технологий
Кафедра Шахматного искусства и компьютерной математики

Лекция № 004 по высшей математике

Тема: «Обратная матрица. Матричные уравнения».

Автор:

Старший преподаватель
Миронов Денис Сергеевич

Екатеринбург
2019

Определение 1. Квадратная матрица А называется *невырожденной*, если определитель $\det A \neq 0$. В противном случае матрица называется вырожденной.

Определение 2. Матрицу, состоящую из алгебраических дополнений элементов матрицы А, называют *присоединенной* (A^*) к матрице А.

Определение 3. Матрицу A^{*T} называют *союзной* к матрице А.

Определение 4. Матрица A^{-1} называется обратной матрице А, если выполняется условие:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$, где

Е – Единичная матрица того же порядка, что и матрица А;

A^{-1} имеет те же размеры, что и матрица А.

Теорема 1. Всякая невырожденная матрица имеет обратную.

Формула вычисления обратной матрицы: $$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{*T}$$.

Алгоритм вычисления обратной матрицы:

1) Проверка вырожденности исходной матрицы ($\det A \neq 0$);

2) Составляется матрица миноров – M;

3) Из полученной матрицы миноров составляется матрица алгебраических дополнений (присоединенная матрица) – M^* ;

4) Из матрицы алгебраических дополнений составляется союзная матрица M^{*T} ;

5) Вычисляем по формуле: $$A^{-1} = \frac{1}{\det A} M^{*T}$$;

6) Проверка (по желанию): $A \cdot A^{-1} = E$.

Пример 1. Найти обратную матрицу к матрице: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Проверим критерий невырожденности: $A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}$. Раскроем определитель

по второму столбцу: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 15 = -7 \neq 0 \Rightarrow$

Матрица А – невырожденная, значит существует обратная.

2) Составляем матрицу миноров:

$$m_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 5 \cdot 0 = 4. \quad m_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 5 \cdot 5 = -17.$$

$$m_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 5 \cdot 1 = -5. \quad m_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot 4 - 0 \cdot 3 = 0.$$

$$m_{22} = -7. \quad m_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 = 0.$$

$$m_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = -3. \quad m_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 4.$$

$$m_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 2.$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -17 & -5 \\ 0 & -7 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

3) Составляем матрицу алгебраических дополнений (присоединенную):

$$M^{*} = \begin{pmatrix} 4 & 17 & -5 \\ 0 & -7 & 0 \\ -3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

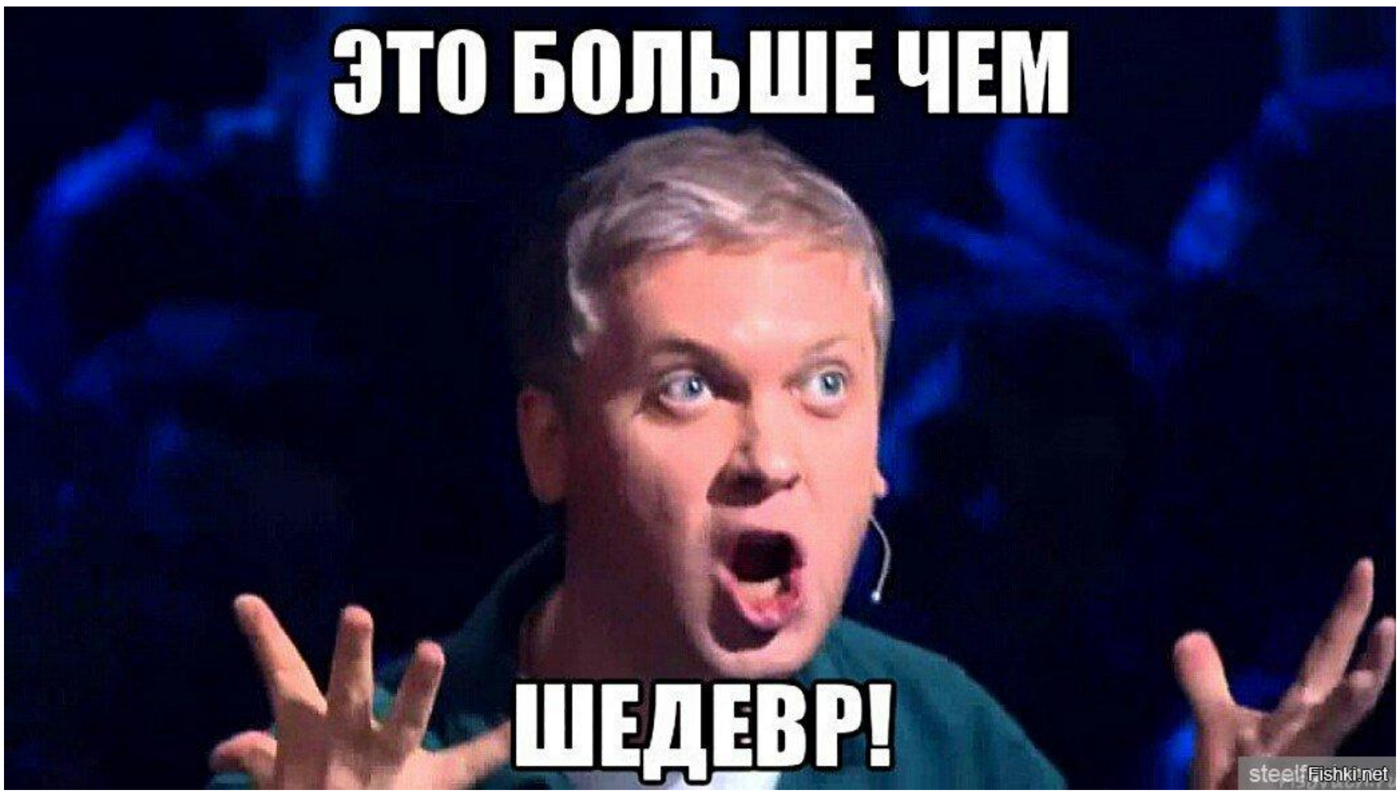
4) Составляем союзную матрицу:

$$M^{*T} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 17 & -7 & -4 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5) $$A^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 17 & -7 & -4 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6) Проверка:

$$-\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 17 & -7 & -4 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Свойства обратной матрицы:

1. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$; 2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

3. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Матричные уравнения:

I. $A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1}B$.

II. $X \cdot A = B \Rightarrow X = BA^{-1}$.

III. $A \cdot X \cdot B = C \Rightarrow X = A^{-1}BC^{-1}$.

A, B, C – известные матрицы. *X* – неизвестная матрица.

Определение 5. Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{m}x_n = b_m \end{cases}, \text{ где}$$

a_{ij} – коэффициенты основной матрицы системы, x_j – неизвестные переменные, b_i – свободные члены.

Любую систему уравнений можно записать можно записать в виде матричного уравнения

$$A \cdot X = B\ ,$$

где A – квадратная матрица коэффициентов основной матрицы системы, X – матрица-столбец неизвестных переменных, B – матрица-столбец свободных членов.

Данное уравнение будет разрешимо только в том случае, когда матрица A является квадратной.

Иными словами, решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 13 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

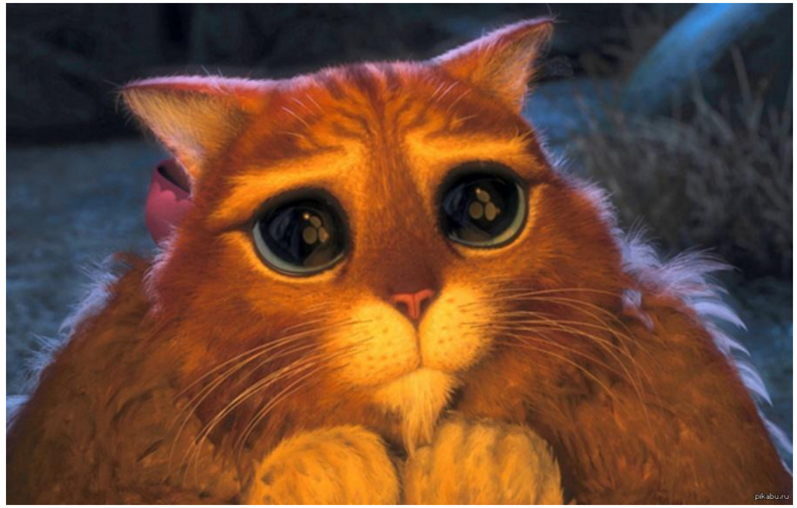
сводится к решению матричного уравнения:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Решением системы называется n значений переменных $x_1 = c_1, x_2 = c_2, x_n = c_n$, при подстановке которых все уравнения обращаются в верные равенства.

Определение 6. Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение и *несовместной*, если она не имеет ни одного решения.

Определение 7. Система уравнений называется *однородной*, если все её свободные члены равны 0. Однородная система всегда совместна.



На сегодня всё. Спасибо за внимание.

Надеюсь Вам понравилось, я старался!

«Не бойся, что не знаешь –
Бойся, что не учишься».

Китайская мудрость