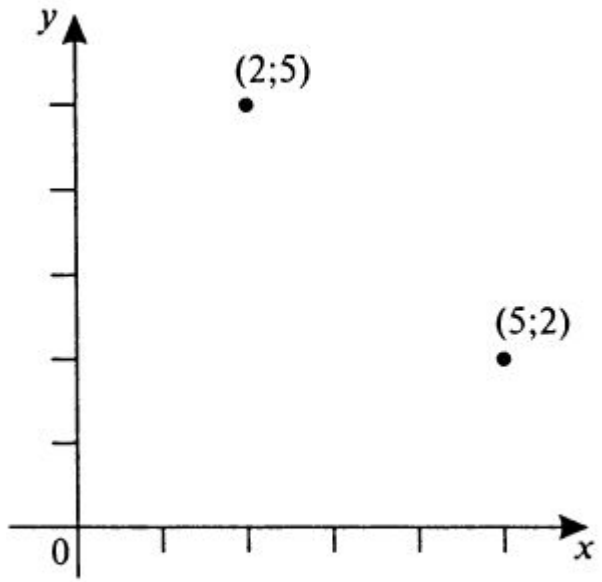
Упорядоченные множества

- Наиболее простым упорядоченным множеством является двухэлементное множество, которое называют двойкой или упорядоченной парой. Элементы упорядоченного множества обычно заключают в круглые или угловые скобки. Например, (2;5) или < 2;5 >.

- Определение: Если (a, b) — упорядоченная пара, то элемент a называют первым элементом или первой компонентой этой пары, а элемент b — вторым элементом или второй компонентой этой же пары.

- Каждое упорядоченное множество можно определить с помощью неупорядоченных множеств. Например, двойку определяют так:

  - $(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$


y
(2;5)
(5;2)
0
x

- Тройку определяют через двойку:

$$(a, b, c) = ((a, b), c).$$

- Аналогично, n-ку определяют через двойку:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = ((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n).$$

- Введенное понятие упорядоченного множества позволяет определить новую операцию на множествах.
- Прямым (декартовым) произведением

Прямое произведение множеств

Прямым (*декартовым*) *произведением* множеств A и B называют множество $C = A \times B$, состоящее из всех упорядоченных пар (a, b) таких, что $a \in A$, $b \in B$, то есть

$$C = A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}.$$

Например, пусть $A = \{x, y\}$ и $B = \{1,2,3\}$. Тогда

$$A \times B = \{(x,1), (x,2), (x,3), (y,1), (y,2), (y,3)\}.$$

Имеется графическая интерпретация прямого произведения множеств. Пусть множество $A = \{x | a \leq x \leq b\}$

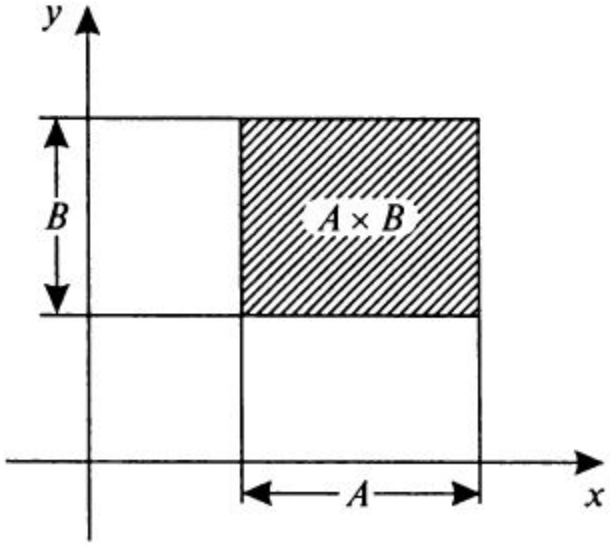
есть интервал значений переменной ***x*** и

$$B = \{y | c \leq y \leq d\}$$

есть интервал значений ***y***. Ясно, что множества **А** и **В** имеют бесконечное число элементов. Тогда прямое (декартово) произведение множеств **А** и **В** есть множество точек прямоугольника:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}.$$

Декартово произведение множеств



На рисунках изображены декартовы произведения множеств A и B:

1) A = {–3 –2, –1}, B= (–2; +∞); рис. 1.
2) A = {1, 2}, B = {–1, 0, 1, 2, 3}; рис. 2.
3) A = [–2; 3), B = {1, 2, 3}; рис. 3.
4) A = (-∞; 4], B = [-2; 2]; рис. 4.
5) A = [-1; 3), B = (-2; 3] рис. 5.
6) A = [–2; 3], B = [–2, 3]. рис. 6.

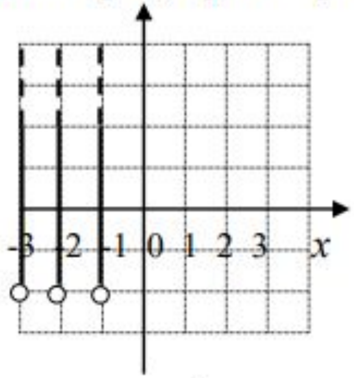


рис.1

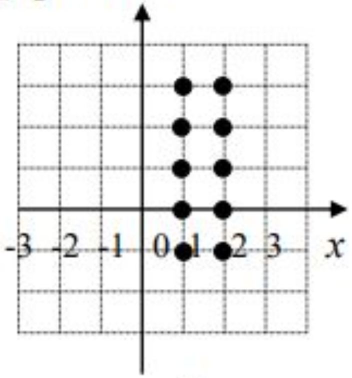


рис.2

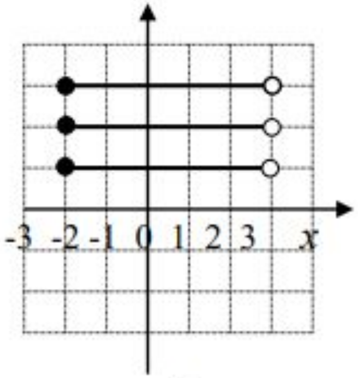


рис.3

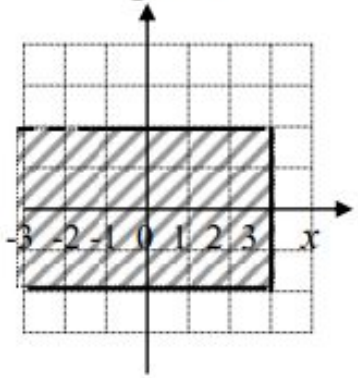


рис.4.

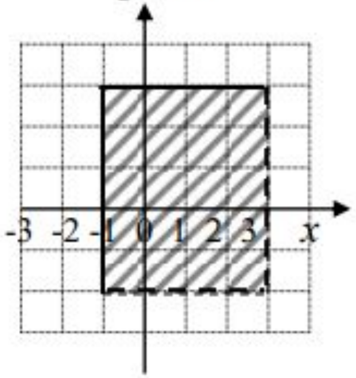


рис.5

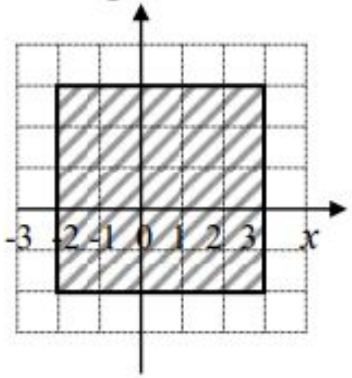


рис.6

Бинарные отношения

- Бинарное отношение — это отношение между двумя объектами.
- Бинарное отношение можно определить как совокупность упорядоченных пар, указывающих объекты, находящиеся в данном отношении.
- Если два элемента **a** и **b** находятся в данном отношении **R**, то **(a,b)∈R**, или **aRb**.
- Всякое бинарное отношение **R** можно рассматривать как подмножество прямого $R \subseteq A \times B.$ я некоторых множеств А и В:

- Левой областью бинарного отношения R называют множество всех первых компонент упорядоченных пар, составляющих данное отношение, то есть

$$R_{-} = \{a | (a, b) \in R\}.$$

- Правой областью бинарного отношения R называют множество всех вторых компонент упорядоченных пар, составляющих да ть

$$R_{+} = \{b | (a, b) \in R\}.$$

Например, пусть $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (3,3)\}$. Тогда $R_- = \{1,3\}$, $R_+ = \{1,2,3\}$.

Полем бинарного отношения R называют объединение его левой и правой областей:

$$F(R) = R_- \cup R_+.$$

Бинарное отношение R^{-1} называют *обратным* к отношению R, если $(a, b) \in R^{-1}$ тогда и только тогда, когда $(b, a) \in R$, то есть

$$R^{-1} = \{(a, b) | (b, a) \in R\}.$$

Например, если $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (3,4)\}$, то

$$R^{-1} = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,3)\}.$$

Пересечением бинарного отношения R по элементу $a \in F(R)$ называют совокупность всех вторых (различных) компонентов упорядоченных пар, составляющих данное отношение, и таких, у которых первой компонентой есть элемент a. Обозначение: R_a.

Например, для предыдущего бинарного отношения R имеем: $R_1 = \{1,2,3\}$, $R_2 = \{\varnothing\}$, $R_3 = \{4\}$, $R_4 = \{\varnothing\}$.

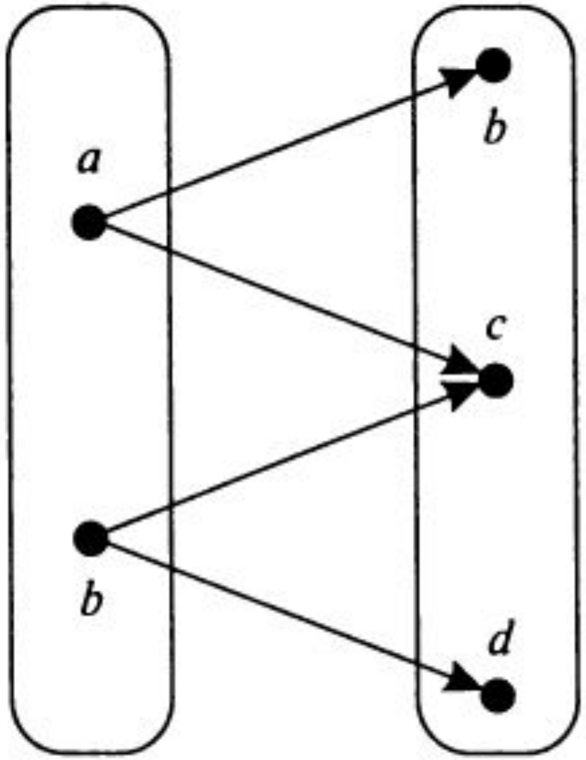
Способы задания бинарных отношений

- 1. Бинарное отношение R можно задать перечислением всех упорядоченных пар, находящихся в отношении R.
- 2. Можно задать формулой.

$$S = \{(a, b) | (a - b) \equiv 0 \ mod 3; \ a, b \in \{0, 1, \ldots, 10\}\}.$$

- 3. Графическое задание бинарного отношения предполагает графическое представление элементов левой и правой областей отношения в виде точек в этих областях, соединенных дугами.

Пример. S={(a,b),(a,c),(b,c),(b,d)}



- 4. Бинарное отношение R может быть задано в табличной форме.

a	b	c	d
$S_a = \{b, c\}$	$S_b = \{c, d\}$	$S_c = \{\varnothing\}$	$S_d = \{\varnothing\}$

- 5. Бинарное отношение можно задать матрицей $||a_{ij}||$, в которой строки и столбцы соответствуют полю отношения. В этой матрице i-я строка соотносится с некоторым элементом левой области отношения, j-й столбец — с некоторым элементом правой области отношения. Тогда $a_{ij} = 1$, если соответствующие элементы находятся в данном отношении, и $a_{ij} = 0$ в противном случае.

	a	b	c	d
a	0	1	1	0
b	0	0	1	1
c	0	0	0	0
d	0	0	0	0

Операции над бинарными отношениями

- Так как всякое бинарное отношение — это множество упорядоченных пар, то над бинарными отношениями можно выполнять все теоретико-множественные операции: объединение, пересечение, разность, дополнение.

Композицией бинарных отношений R и S называют бинарное отношение T, состоящее из всех упорядоченных пар (a, b), для каждой из которых существует элемент $c \in R_+ \cap S_-$ такой, что $(a, c) \in R$, $(c, b) \in S$ (то есть aRc, cSb). Операцию композиции записывают так: $T = R \circ S$.

Например, пусть

$$R = \{(1,1),\ (1,2),\ (2,3),\ (3,3)\},$$

$$S = \{(2,4),\ (2,5),\ (3,2),\ (5,5)\}.$$

Тогда

$$R \circ S = \{(1,4),\ (1,5),\ (2,2),\ (3,2)\}$$

$$S \circ R = \{(3,3)\}.$$

Свойства бинарных отношений. Отношение эквивалентности

Бинарное отношение R называют *рефлексивным*, если для любого элемента поля $a \in F(R)$ имеет место aRa.

Примерами рефлексивных отношений могут служить отношение подобия ($\sim$), отношение параллельности ($\|$), диагональное отношение на множестве $A = \{a, b, c\}$:

$$\Delta_A = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}.$$

Бинарное отношение R называют ***антирефлексивным***, если для любого элемента поля $a \in F(R)$ имеет место $a\overline{R}a$.

Примерами антирефлексивных отношений являются отношения порядка ($<$), ($>$), отношение перпендикулярности ($\perp$).

Если задано бинарное отношение

$$R_1=\{(a, a), (a, b), (b, b), (a, c), (c, c)\},$$

то это отношение рефлексивно, а бинарное отношение

$$R = \{(a, b), (b, c), (b, b), (a, c)\}$$

— нет.

Бинарное отношение

$$R_3 = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$$

антирефлексивно.

Бинарное отношение R *симметричное*, если из aRb следует bRa.

Примерами таких отношений являются отношение равенства (=), подобия (~), диагональное отношение (Δ_A), отношение перпендикулярности ($\perp$), отношение параллельности ($\|$).

Бинарное отношение R *асимметрично*, если из aRb следует $b\overline{R}a$. Асимметричными являются отношения порядка (<), (>).

- Бинарное отношение R называют антисимметричным, если из **aRb** и **bRa** следует, что a = b.
- Бинарное отношение R называют транзитивным, если из **aRb** и **bRc** следует, что **aRc**.
- Примерами транзитивных отношений являются отношение равенства (=), отношение подобия (~), отношения порядка (<), (<), (>), (>), (c), отношение параллельности (||).
- В противном случае отношение R называют нетранзитивным.
- Бинарное отношение называют отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.
- Примеры отношения эквивалентности: отношение равенства (=),

отношение параллельности (||).

Классом эквивалентности R_a называют множество всех вторых компонентов упорядоченных пар отношения эквивалентности R, у которых первой компонентой является элемент a:

$$R_a = \{b | (a, b) \in R\}.$$

Бинарное отношение S_1 является отношением эквивалентности. В нем каждый класс эквивалентности состоит также из одного элемента: $S_1(a) = \{a\}$, $S_1(b) = \{b\}$ и $S_1(c) = \{c\}$.

$$S = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (d, d), (d, e), (e, d), (e, e)\}.$$

Отношение порядка

- Бинарное отношение R называют отношением порядка, если оно антисимметрично и транзитивно. Если к тому же это отношение антирефлексивно, то такое отношение называется отношением строгого порядка. В противном случае мы имеем отношение нестрогого порядка.

Классификация отображений и функций

Пусть имеется отображение (функция) $R: A \to B$.

Отображение (функцию) R называют *сюръективным*, если $R_+ = B$.

Отображение (функцию) R называют *инъективным*, если в нем разным прообразам соответствуют разные образы, то есть из $a \neq b$ следует $R(a) \neq R(b)$.

Отображение (функция) R называют *биективным* или *взаимно однозначным*, если оно сюръективное и инъективное.