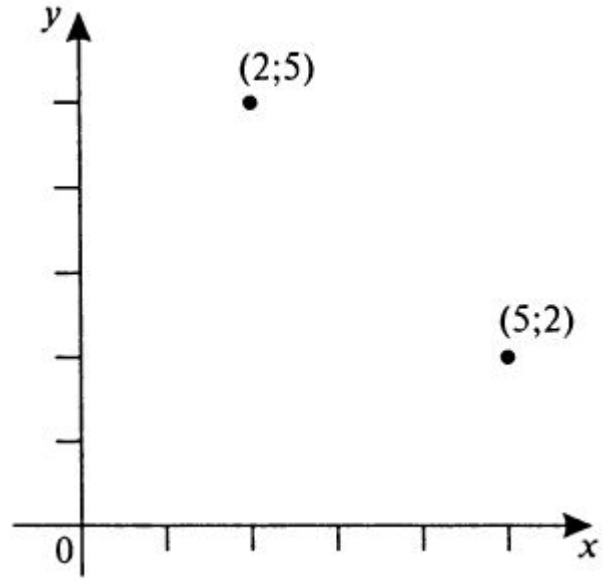


Упорядоченные множества

- Наиболее простым упорядоченным множеством является двухэлементное множество, которое называют двойкой или упорядоченной парой. Элементы упорядоченного множества обычно заключают в круглые или угловые скобки. Например, $(2;5)$ или $\langle 2;5 \rangle$.
- Определение: Если (a, b) — упорядоченная пара, то элемент a называют первым элементом или первой компонентой этой пары, а элемент b — вторым элементом или второй компонентой этой же пары.
- Каждое упорядоченное множество можно определить с помощью неупорядоченных множеств. Например, двойку определяют так:
 - $(a,b) = \{\{a\}, \{a,b\}\}$



- Тройку определяют через двойку:

$$(a, b, c) = ((a, b), c).$$

- Аналогично. n -кв определяют через двойку:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = ((a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n).$$

- Введенное понятие упорядоченного множества позволяет определить новую операцию на множествах.
- Прямым (декартовым) произведением

Прямое произведение множеств

Прямым (декартовым) произведением множеств A и B называют множество $C = A \times B$, состоящее из всех упорядоченных пар (a, b) таких, что $a \in A$, $b \in B$, то есть

$$C = A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}.$$

Например, пусть $A = \{x, y\}$ и $B = \{1, 2, 3\}$. Тогда

$$A \times B = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}.$$

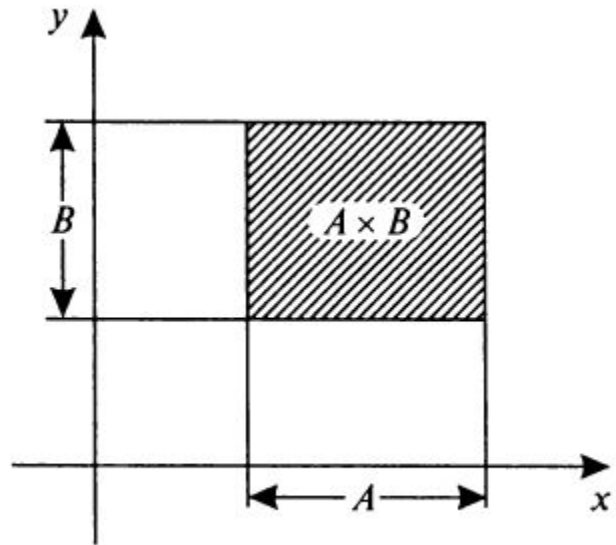
Имеется графическая интерпретация прямого произведения множеств. Пусть множество $A = \{x|a \leq x \leq b\}$ есть интервал значений переменной x и

$$B = \{y|c \leq y \leq d\}$$

есть интервал значений y . Ясно, что множества **A** и **B** имеют бесконечное число элементов. Тогда прямое (декартово) произведение множеств **A** и **B** есть множество точек прямоугольника:

$$A \times B = \{(x, y)|x \in A, y \in B\}.$$

Декартово произведение множеств



На рисунках изображены декартовы произведения множеств A и B :

- 1) $A = \{-3, -2, -1\}$, $B = (-2; +\infty)$; рис. 1.
- 2) $A = \{1, 2\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$; рис. 2.
- 3) $A = [-2; 3]$, $B = \{1, 2, 3\}$; рис. 3.
- 4) $A = (-\infty; 4]$, $B = [-2; 2]$; рис. 4.
- 5) $A = [-1; 3]$, $B = (-2; 3]$; рис. 5.
- 6) $A = [-2; 3]$, $B = [-2, 3]$; рис. 6.

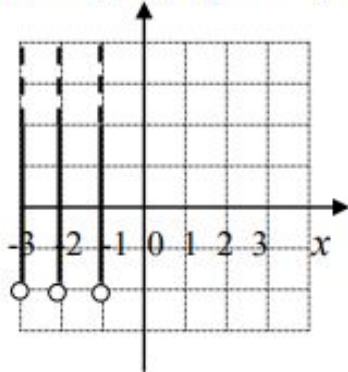


рис.1

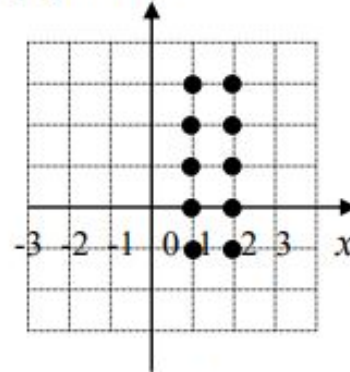


рис.2

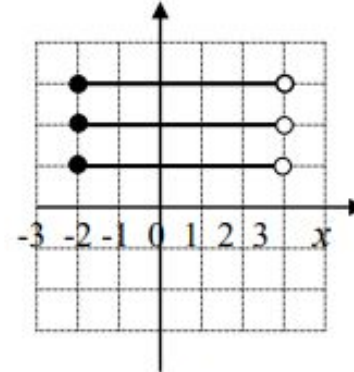


рис.3

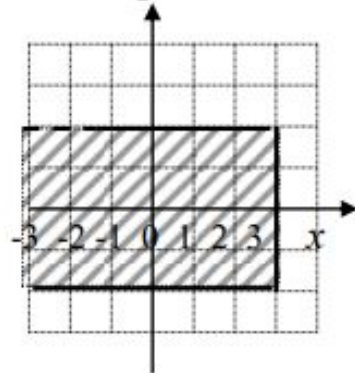


рис.4.

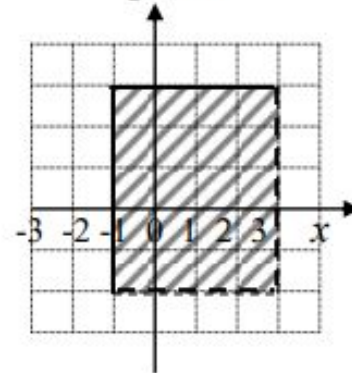


рис.5

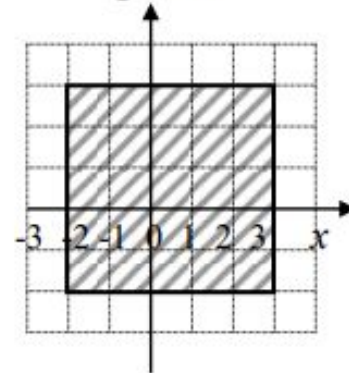


рис.6

Бинарные отношения

- Бинарное отношение — это отношение между двумя объектами.
- Бинарное отношение можно определить как совокупность упорядоченных пар, указывающих объекты, находящиеся в данном отношении.
- Если два элемента **a** и **b** находятся в данном отношении **R**, то $(a,b) \in R$, или aRb .
- Всякое бинарное отношение **R** можно рассматривать как подмножество прямого произведения $A \times B$ некоторых множеств **A** и **B**:
$$R \subseteq A \times B.$$

- **Левой областью бинарного отношения R называют множество всех первых компонент упорядоченных пар, составляющих данное отношение, то есть**

$$R_- = \{a | (a, b) \in R\}.$$

- **Правой областью бинарного отношения R называют множество всех вторых компонент упорядоченных пар, составляющих дѣ**

$$R_+ = \{b | (a, b) \in R\}. \quad \text{Гь}$$

Например, пусть $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (3,3)\}$. Тогда $R_- = \{1,3\}$, $R_+ = \{1,2,3\}$.

Поле бинарного отношения R называют объединение его левой и правой областей:

$$F(R) = R_- \cup R_+.$$

Бинарное отношение R^{-1} называют *обратным* к отношению R , если $(a, b) \in R^{-1}$ тогда и только тогда, когда $(b, a) \in R$, то есть

$$R^{-1} = \{(a, b) | (b, a) \in R\}.$$

Например, если $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (3,4)\}$, то

$$R^{-1} = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,3)\}.$$

Пересечением бинарного отношения R по элементу $a \in F(R)$ называют совокупность всех вторых (различных) компонентов упорядоченных пар, составляющих данное отношение, и таких, у которых первой компонентой есть элемент a . Обозначение: R_a .

Например, для предыдущего бинарного отношения R имеем:
 $R_1 = \{1,2,3\}$, $R_2 = \{\emptyset\}$, $R_3 = \{4\}$, $R_4 = \{\emptyset\}$.

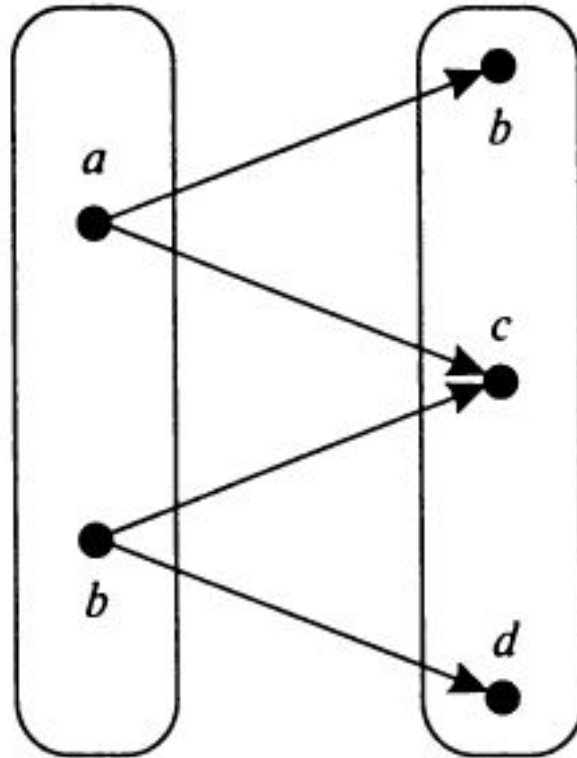
Способы задания бинарных отношений

- 1. Бинарное отношение R можно задать перечислением всех упорядоченных пар, находящихся в отношении R .
- 2. Можно задать формулой.

$$S = \{(a, b) \mid (a - b) \equiv 0 \pmod{3}; a, b \in \{0, 1, \dots, 10\}\}.$$

- 3. Графическое задание бинарного отношения предполагает графическое представление элементов левой и правой областей отношения в виде точек в этих областях, соединенных дугами.

Пример. $S = \{(a,b), (a,c), (b,c), (b,d)\}$



- 4. Бинарное отношение R может быть задано в табличной форме.

| a | b | c | d |
|------------------|------------------|-----------------------|-----------------------|
| $S_a = \{b, c\}$ | $S_b = \{c, d\}$ | $S_c = \{\emptyset\}$ | $S_d = \{\emptyset\}$ |

- 5. Бинарное отношение можно задать матрицей $\|a_{ij}\|$, в которой строки и столбцы соответствуют полю отношения. В этой матрице i -я строка соотносится с некоторым элементом левой области отношения, j -й столбец — с некоторым элементом правой области отношения. Тогда $a_{ij} = 1$, если соответствующие элементы находятся в данном отношении, и $a_{ij} = 0$ в противном случае.

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | 0 | 1 | 1 | 0 |
| b | 0 | 0 | 1 | 1 |
| c | 0 | 0 | 0 | 0 |
| d | 0 | 0 | 0 | 0 |

Операции над бинарными отношениями

- Так как всякое бинарное отношение — это множество упорядоченных пар, то над бинарными отношениями можно выполнять все теоретико-множественные операции: объединение, пересечение, разность, дополнение.

Композицией бинарных отношений R и S называют бинарное отношение T , состоящее из всех упорядоченных пар (a, b) , для каждой из которых существует элемент $c \in R_+ \cap S_-$ такой, что $(a, c) \in R$, $(c, b) \in S$ (то есть aRc, cSb). Операцию композиции записывают так: $T = R \circ S$.

Например, пусть

$$R = \{(1,1), (1,2), (2,3), (3,3)\},$$

$$S = \{(2,4), (2,5), (3,2), (5,5)\}.$$

Тогда

$$R \circ S = \{(1,4), (1,5), (2,2), (3,2)\}$$

$$S \circ R = \{(3,3)\}.$$

Свойства бинарных отношений. Отношение эквивалентности

Бинарное отношение R называют *рефлексивным*, если для любого элемента поля $a \in F(R)$ имеет место aRa .

Примерами рефлексивных отношений могут служить отношение подобия (\sim), отношение параллельности (\parallel), диагональное отношение на множестве $A = \{a, b, c\}$:

$$\Delta_A = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}.$$

Бинарное отношение R называют *антирефлексивным*, если для любого элемента поля $a \in F(R)$ имеет место $a \bar{R} a$.

Примерами антирефлексивных отношений являются отношения порядка ($<$), ($>$), отношение перпендикулярности (\perp).

Если задано бинарное отношение

$$R_1 = \{(a, a), (a, b), (b, b), (a, c), (c, c)\},$$

то это отношение рефлексивно, а бинарное отношение

$$R = \{(a, b), (b, c), (b, b), (a, c)\}$$

— нет.

Бинарное отношение

$$R_3 = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$$

антирефлексивно.

Бинарное отношение R симметричное, если из aRb следует bRa .

Примерами таких отношений являются отношение равенства ($=$), подобия (\sim), диагональное отношение (Δ_A), отношение перпендикулярности (\perp), отношение параллельности (\parallel).

Бинарное отношение R асимметрично, если из aRb следует $b\bar{R}a$.
Асимметричными являются отношения порядка ($<$), ($>$).

- Бинарное отношение R называют антисимметричным, если из aRb и bRa следует, что $a = b$.
- Бинарное отношение R называют транзитивным, если из aRb и bRc следует, что aRc .
- Примерами транзитивных отношений являются отношение равенства ($=$), отношение подобия (\sim), отношения порядка ($<$), ($<$), ($>$), ($>$), (\subset), отношение параллельности (\parallel).
- В противном случае отношение R называют нетранзитивным.
- Бинарное отношение называют отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.
- Примеры отношения эквивалентности: отношение равенства ($=$),
отношение параллельности (\parallel).

Классом эквивалентности R_a называют множество всех вторых компонентов упорядоченных пар отношения эквивалентности R , у которых первой компонентой является элемент a :

$$R_a = \{b | (a, b) \in R\}.$$

Бинарное отношение S_1 является отношением эквивалентности. В нем каждый класс эквивалентности состоит также из одного элемента: $S_1(a) = \{a\}$, $S_1(b) = \{b\}$ и $S_1(c) = \{c\}$.

$$S = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (d, d), (d, e), (e, d), (e, e)\}.$$

Отношение порядка

- Бинарное отношение R называют отношением порядка, если оно антисимметрично и транзитивно. Если к тому же это отношение антирефлексивно, то такое отношение называется отношением строгого порядка. В противном случае мы имеем отношение нестрогого порядка.

Классификация отображений и функций

Пусть имеется отображение (функция) $R: A \rightarrow B$.

Отображение (функцию) R называют *сюръективным*, если $R_+ = B$.

Отображение (функцию) R называют *инъективным*, если в нем разным прообразам соответствуют разные образы, то есть из $a \neq b$ следует $R(a) \neq R(b)$.

Отображение (функция) R называют *биективным* или *взаимно однозначным*, если оно сюръективное и инъективное.