Математический анализ

4 семестр

Лектор Дружинин Виктор Владимирович

группа ПМФ – 23 Д

Весенний семестр 2014/2015 учебного года

Лекций 72 часов, семинарских занятий 72 часов

Коллоквиум, проверка домашних заданий, домашняя контрольная работа,

экзаменационная контрольная работа.

Экзамен

Литература

1. Л. Д. Кудрявцев. Курс математического анализа, т.2, параграфы 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58.

2. Н.С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисления. т.1, глава 8; т. 2, глава 15.

3. Сборник задач по математическому анализу под редакцией Б. П. Демидовича.

4. Б. П. Демидович. Сборник задач по математическому анализу.

ПРОГРАММА

1. Элементы теории поля (14 часов).

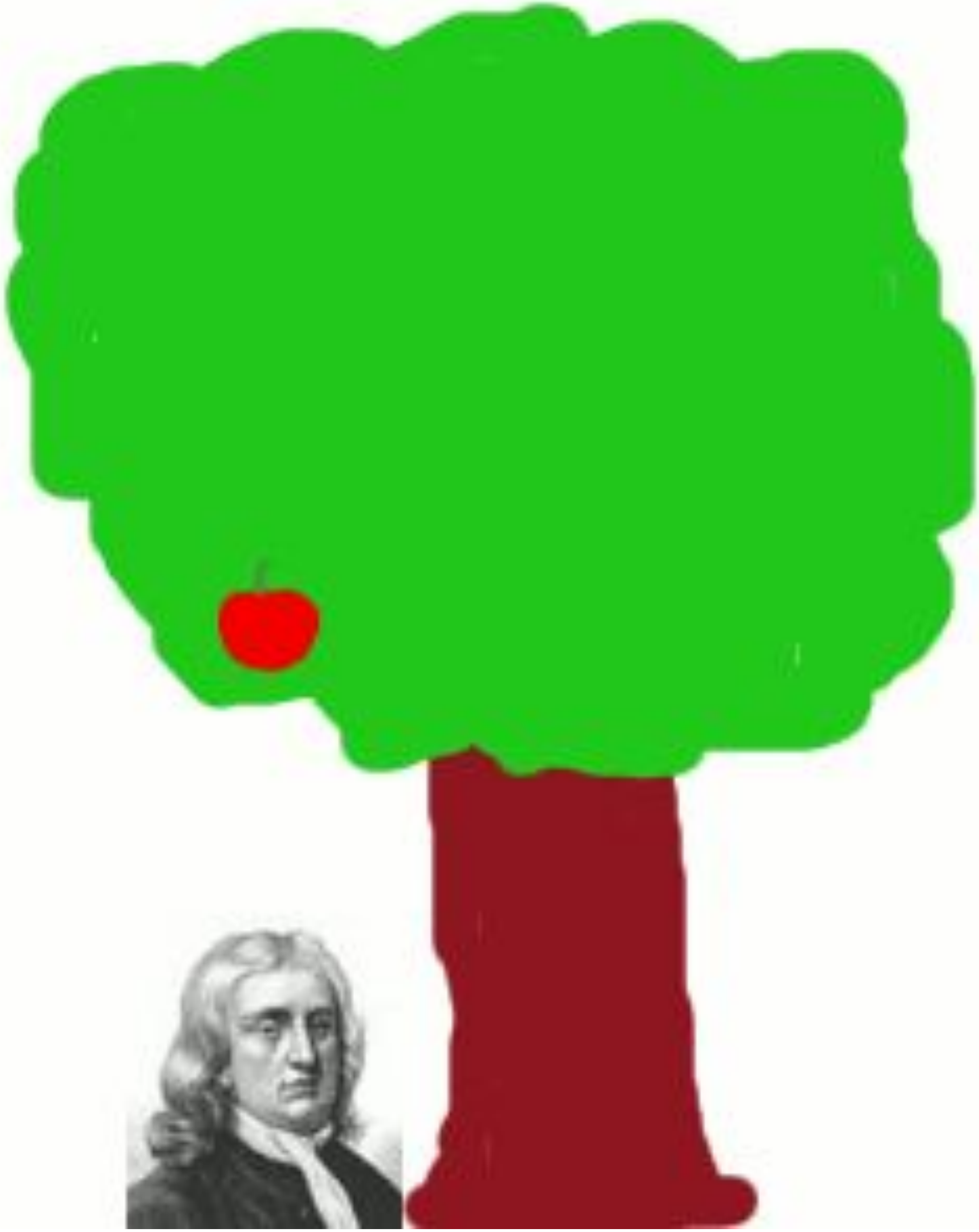
2. Собственные и несобственные интегралы, зависящие от параметра.(12 часов).

3. Тригонометрические ряды Фурье (20 часов).

4. Интеграл Фурье, преобразования Фурье (16 часов).

5. Функциональные пространства (10 часов).

Всего 14 + 12 + 20 + 16 + 10 = 72 часа.



1. Элементы теории поля (14 часов, 7 лекции).

Оператор Гамильтона (набла-оператор)

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

Это новый вид оператора, он является векторным оператором и содержит единичные орты по осям координат: $\vec{i}$ – вдоль оси OX; $\vec{j}$ – вдоль оси OY; $\vec{k}$ – вдоль оси OZ. Кроме того, он содержит частные производные по соответствующим координатам. Этот оператор Гамильтона может действовать на функции трех переменных. Функции

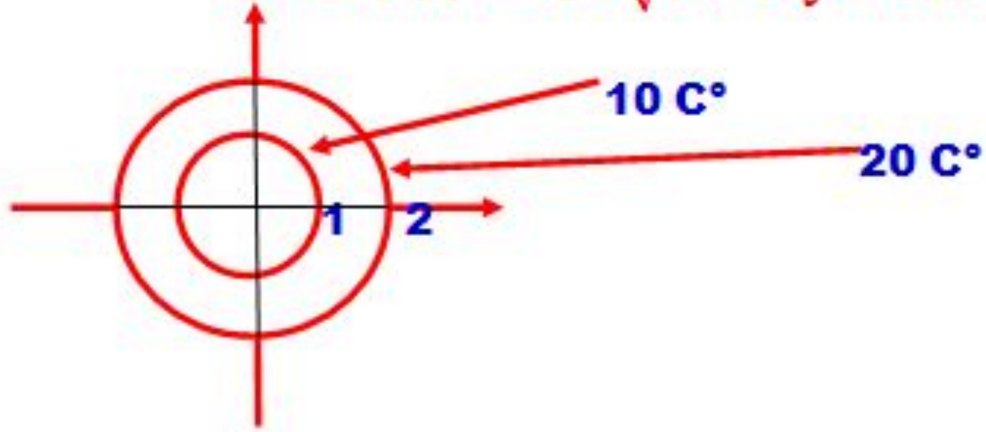
могут быть скалярные F(x,y,z), а могут быть и векторные

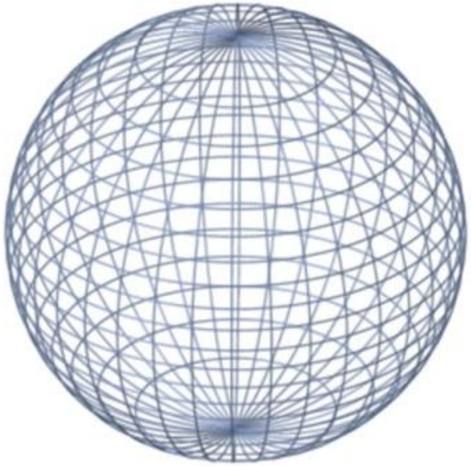
$$\overrightarrow{G(x,y,z)} = \vec{i}\,G_x(x,y,z) + \vec{j}\,G_y(x,y,z) + \vec{k}\,G_z(x,y,z)$$

Примеры скалярных функций или, что то же самое, скалярных полей. Температура, давление, плотность вещества, энергия. Добавить.

Пусть температурное скалярное поле задается скалярной функцией в градусах Цельсия

$$T = 10r = 10\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ C^0$$





торные. Еще в физике бывают функции тензорные и спинорные.

$$\overrightarrow{G(x, y, z)} = \vec{i}\, G_x(x, y, z) + \vec{j}\, G_y(x, y, z) + \vec{k}\, G_z(x, y, z).$$

Примеры скалярных функций или, что то же самое, скалярных полей. Температура, давление, плотность вещества, энергия, количество молекул в единице объёма, сила тока, объем, площадь, длина периметра, поток векторной функции. Пусть температурное скалярное поле

Поверхности уровня центрального поля представляют собой концентрические сферы с центром в точке расположения источника поля и описываются уравнением $r = \mathrm{const}$.

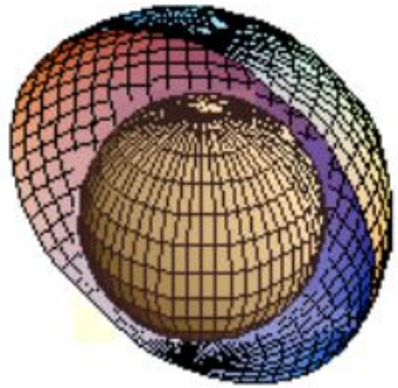


Рис. 1. Поверхности уровня центрального поля.

Поверхностями уровня такого поля являются круговые цилиндры, оси которых совпадают с осью симметрии поля φ.

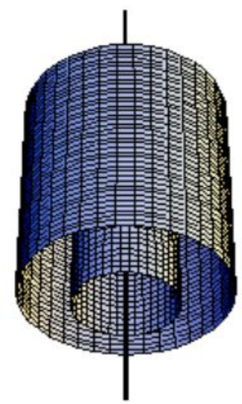
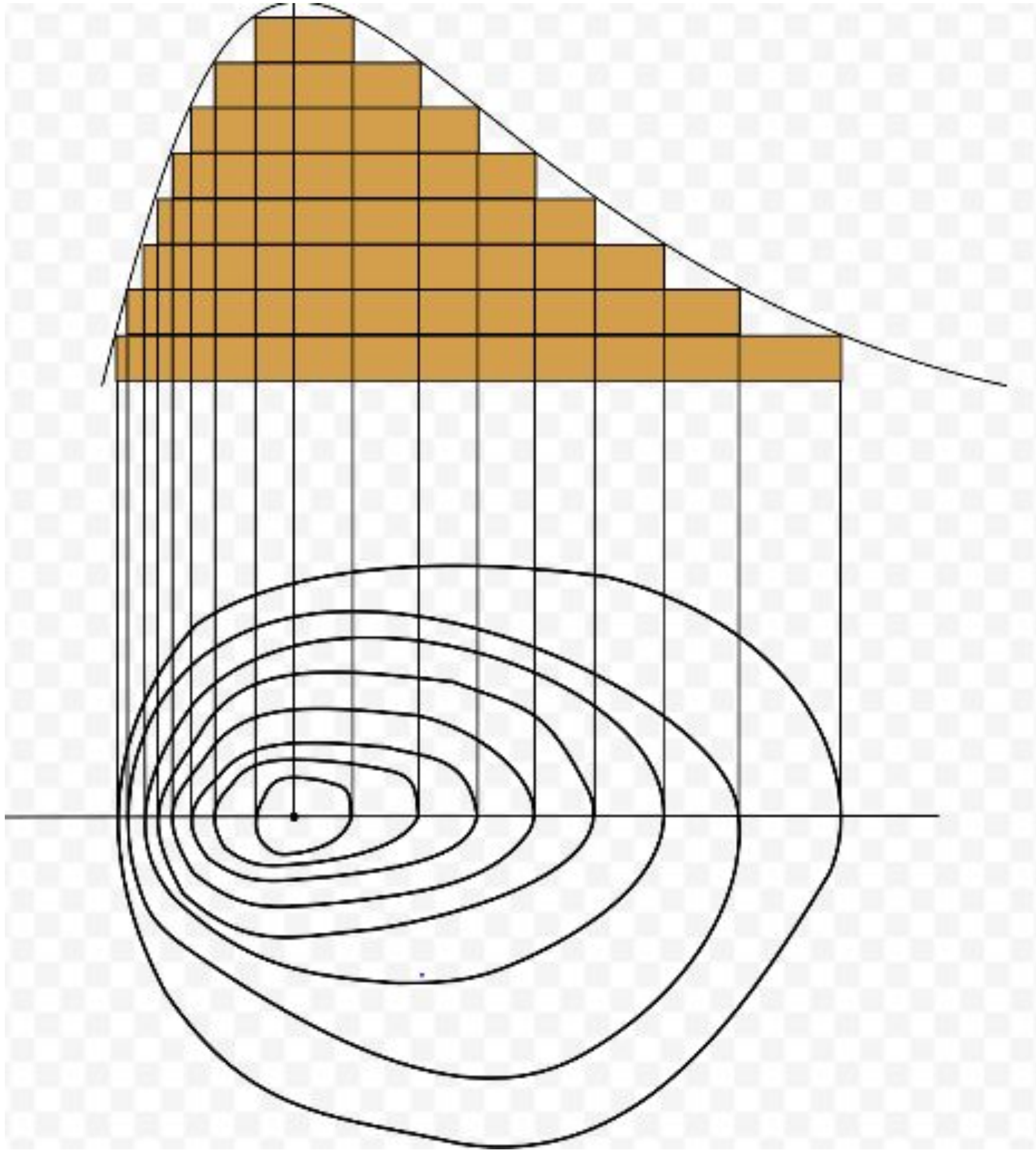


Рис. 2. Поверхности уровня аксиально-симметричного поля.

Аксиально-симметричное поле называют также **цилиндрическим** или **осевым**.



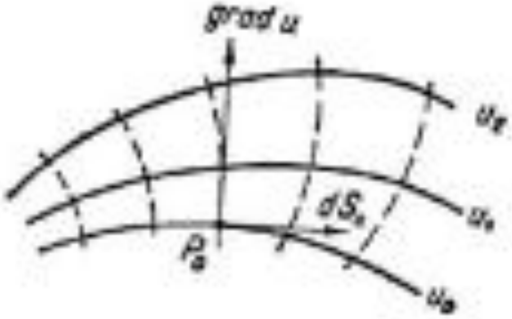


Рис. 13. Поверхности уровня и градиент.

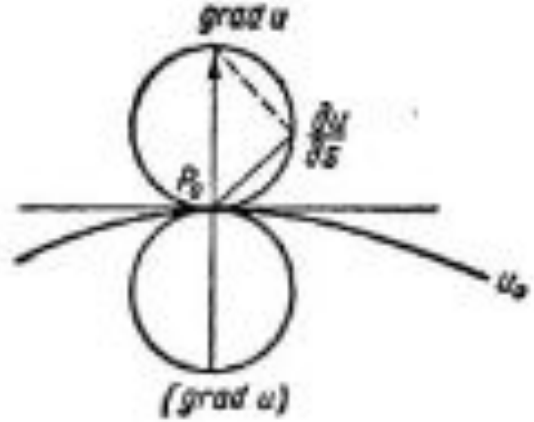
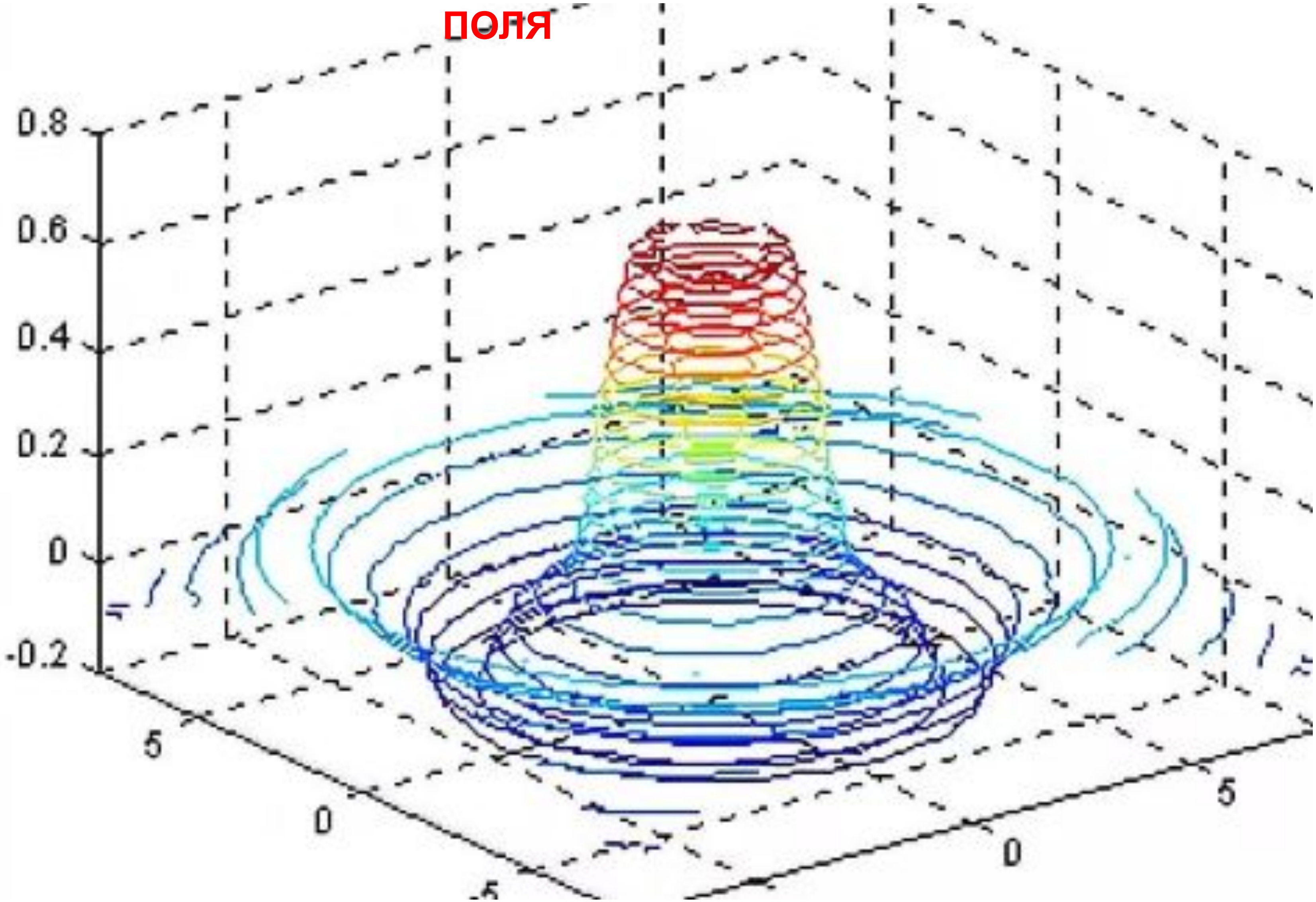
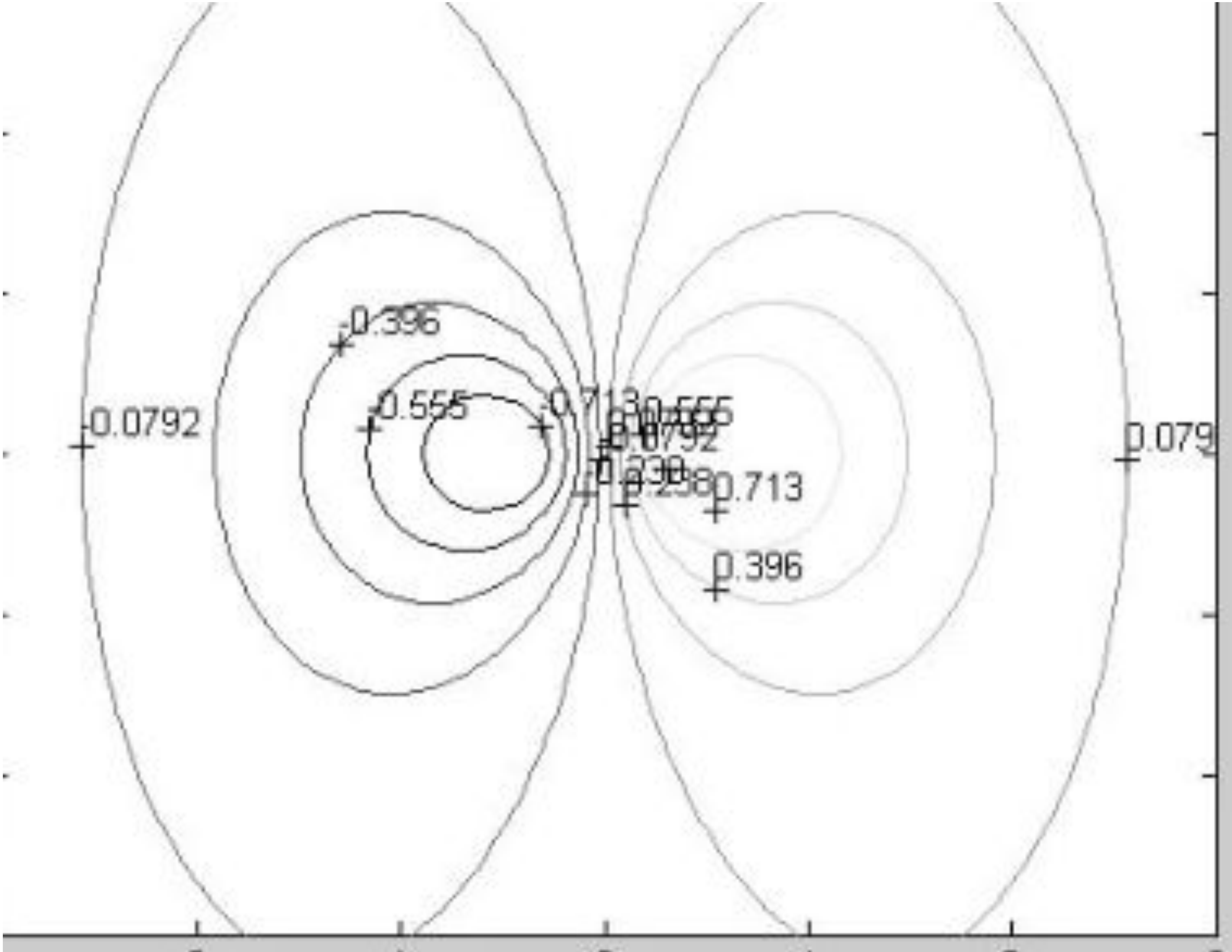


Рис. 14. Построение производной $\frac{\partial u}{\partial s}$ по градиенту.

Таким образом, производная $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{s}}$ скалярного поля u в направлении $\mathbf{s}$ получается проектированием вектора grad u на направление $\mathbf{s}$.

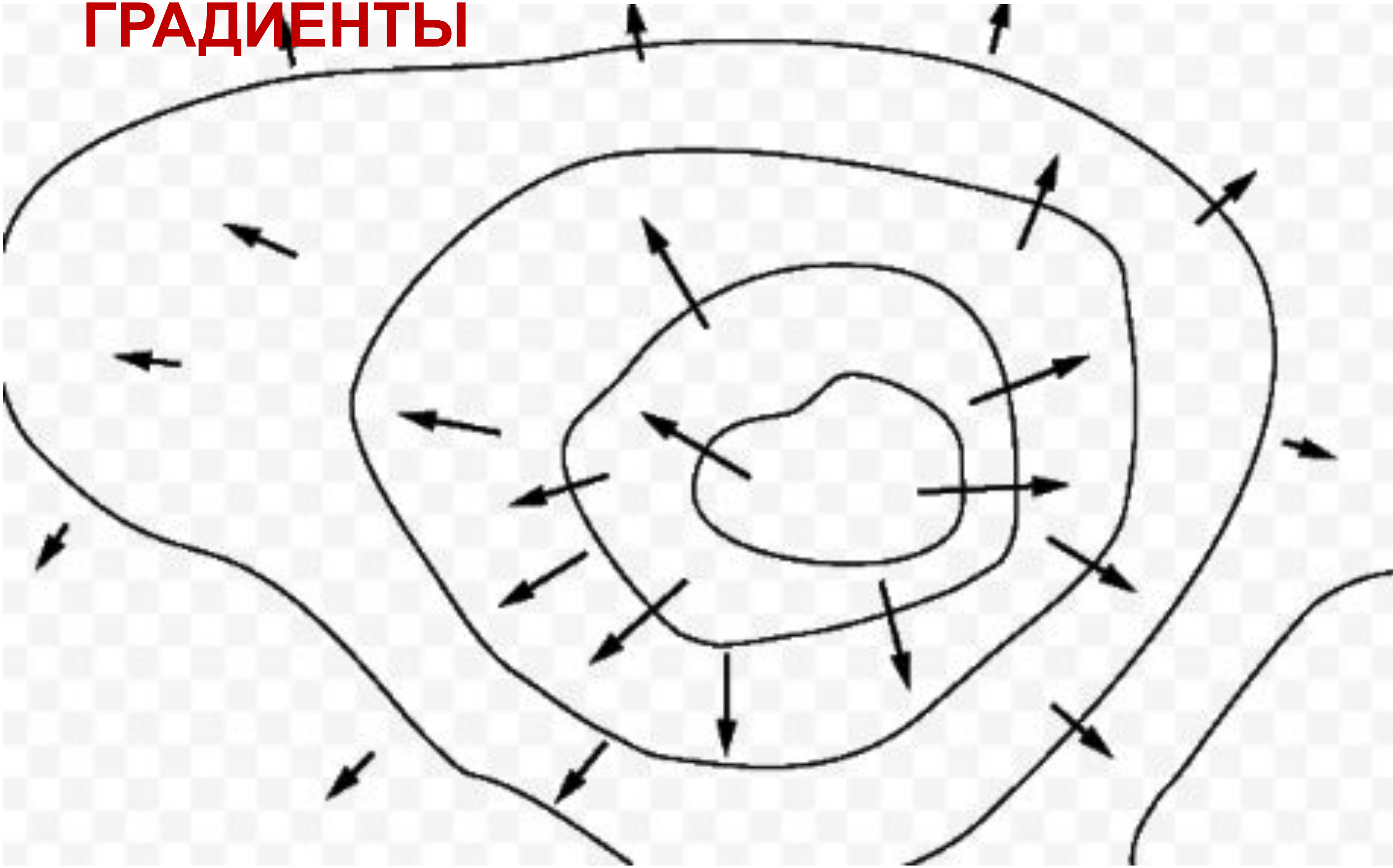
ЛИНИИ УРОВНЕЙ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

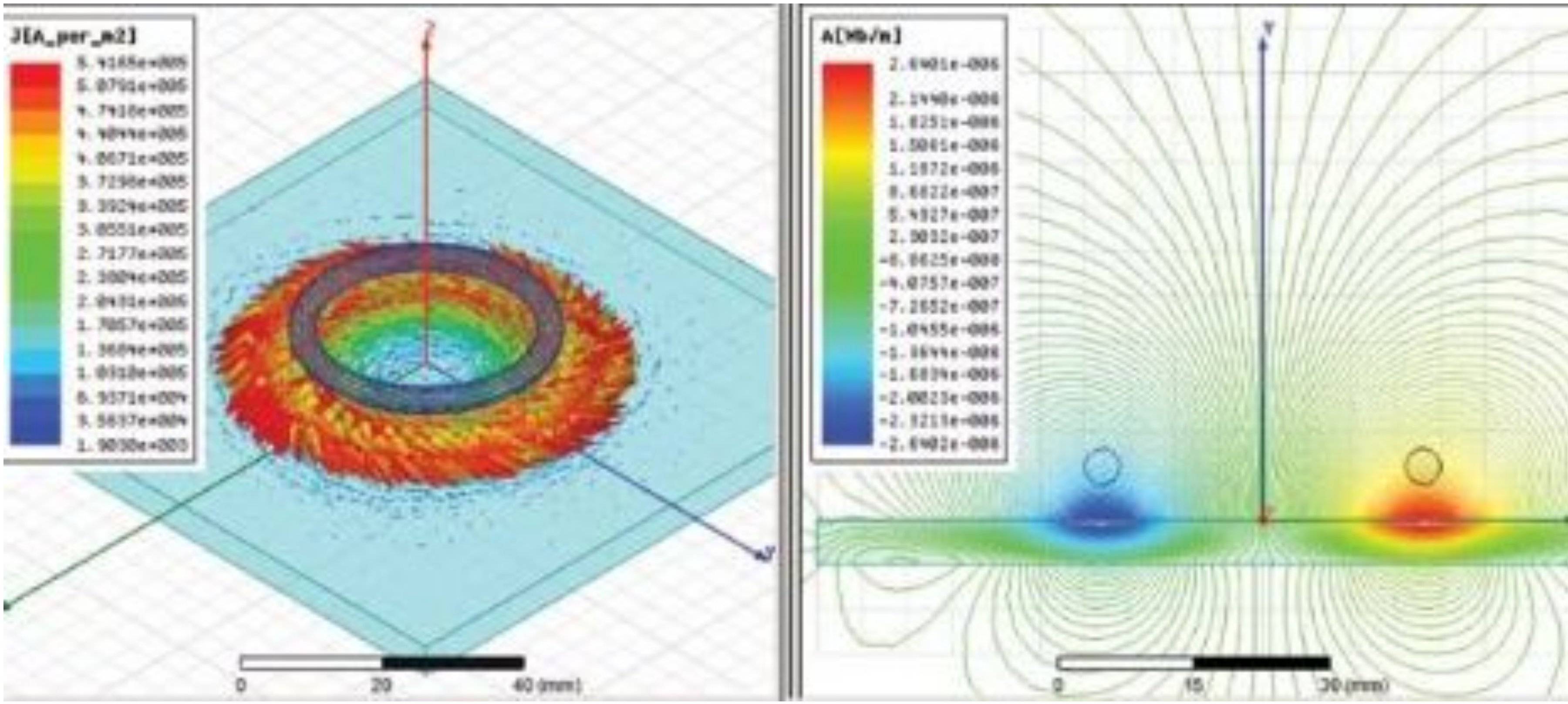




-0.396
-0.555
-0.713
-0.0792
0.555
0.0792
0.238
0.713
0.396
0.079

ЛИНИИ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ И ГРАДИЕНТЫ





J[A_per_m2]
A[Wb/m]
0
20
40 (mm)
0
15
30 (mm)

Скалярное поле

Волченко Ю.М.

Мы видим две изотермические поверхности с температурами 10 С° и 20 С°. На самом деле такими концентрическими окружностями заполнено все пространство и изотермы имеют вид сфер. Зависимость температуры от расстояния от центра имеет вид прямой линии

В общем случае, если скалярное поле задано функцией F(x, y, z), то уравнение a = F(x, y, z) определяет некоторую поверхность в пространстве, которая называется поверхностью уровня. Можно выделить изобарические поверхности, т.е. поверхности одинакового давления воздуха, поверхности одинаковой плотности – это просто реальные поверхности тел и так далее.

На рисунке изображена сложная поверхность, которая является **поверхностью уровня** некоторого скалярного поля. Если зафиксировать координату z, и совершить срез этой поверхности, то мы получим плоские линии. В данном случае они образуют замкнутые линии. Их выделено семь видов, и они расположены в пространстве. Они называются **линиями уровня**. Далее

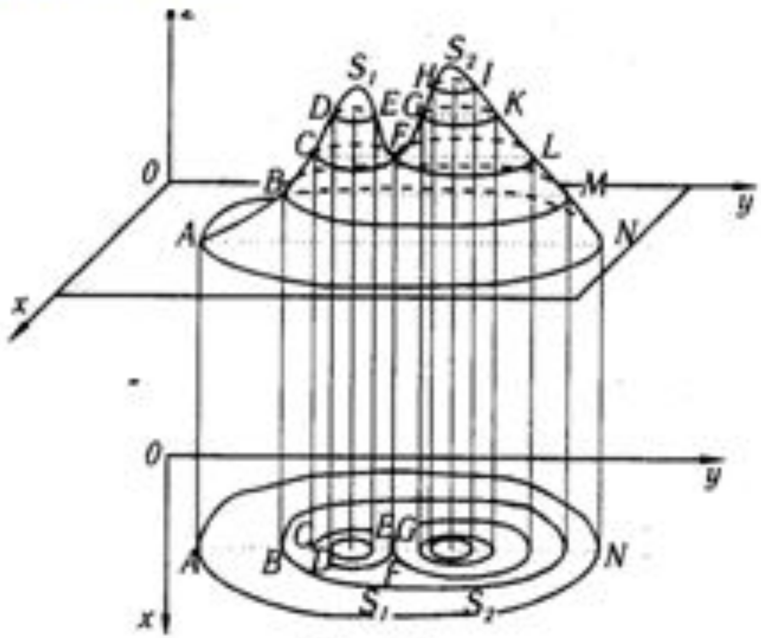
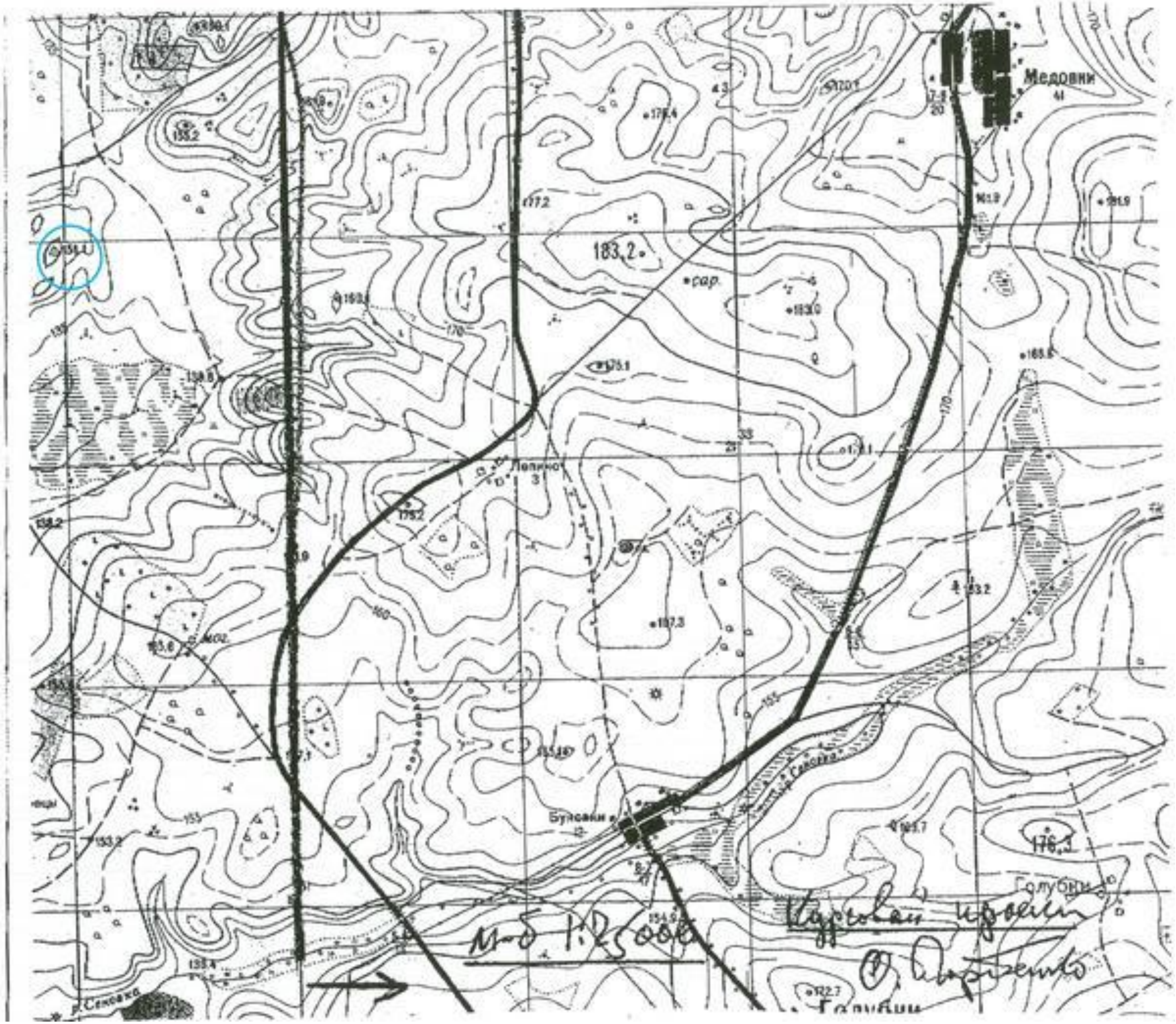
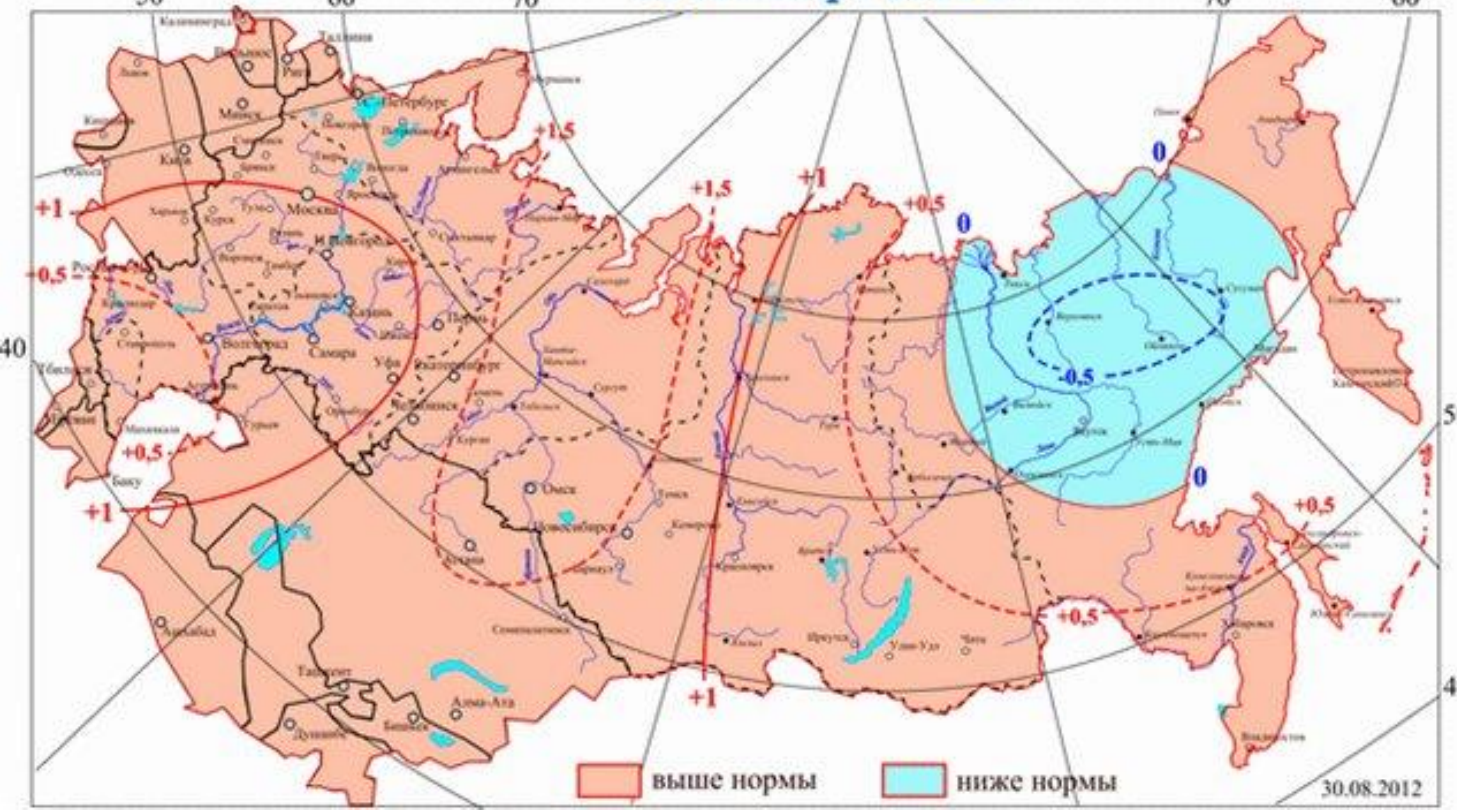
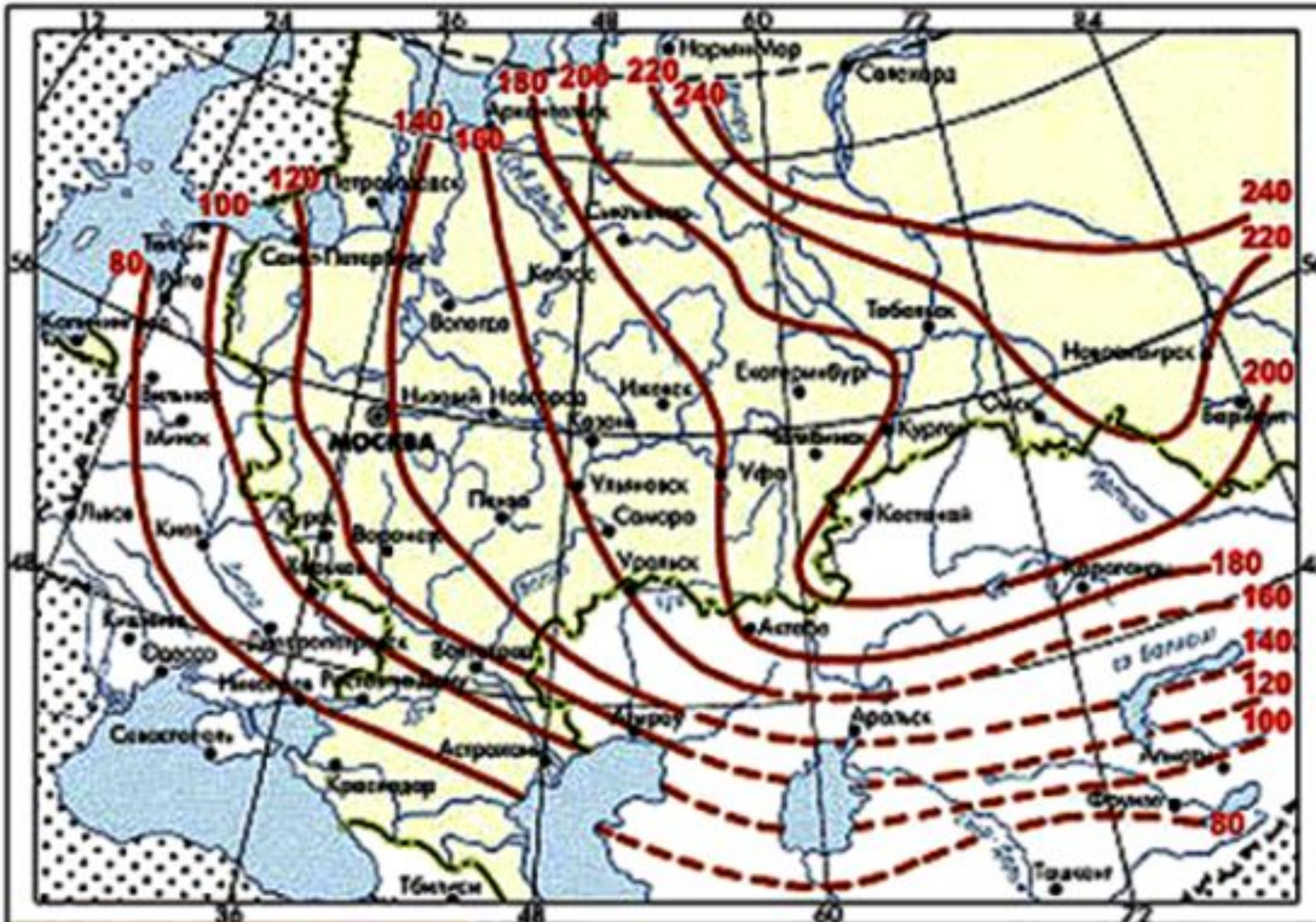


Рис. 176

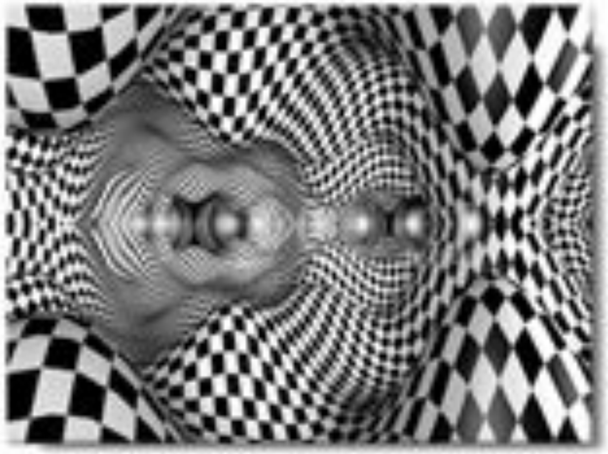

Медовни
183,2
Лепичо
Бусовни
Голубни
М-б 1:25000
Курсовой проект

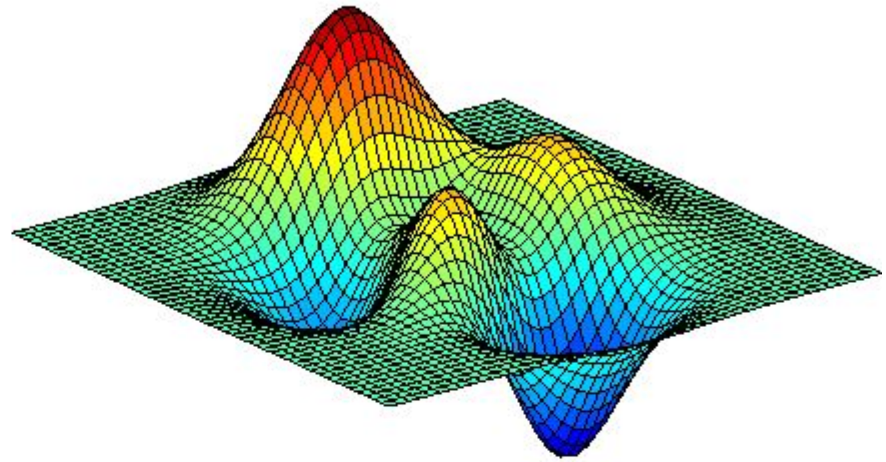
Прогноз аномалии средней месячной температуры воздуха на сентябрь 2012 г.

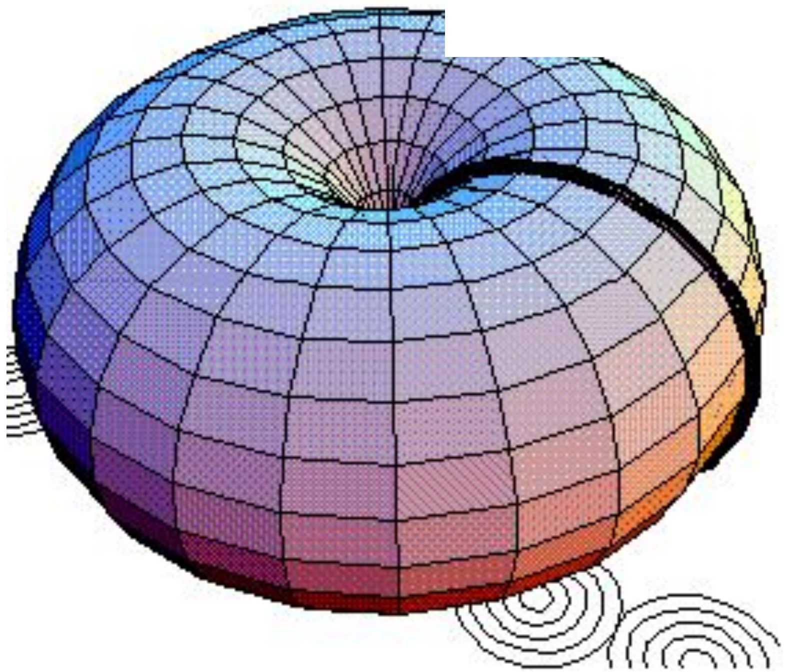


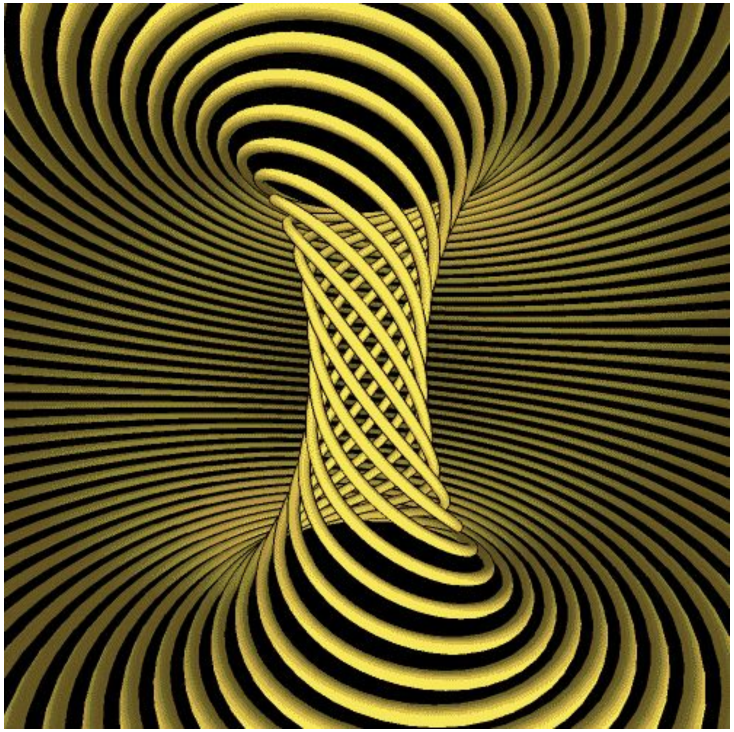


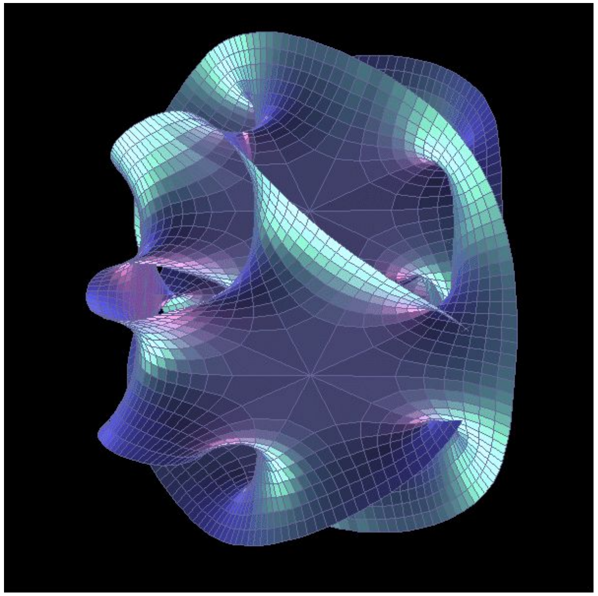
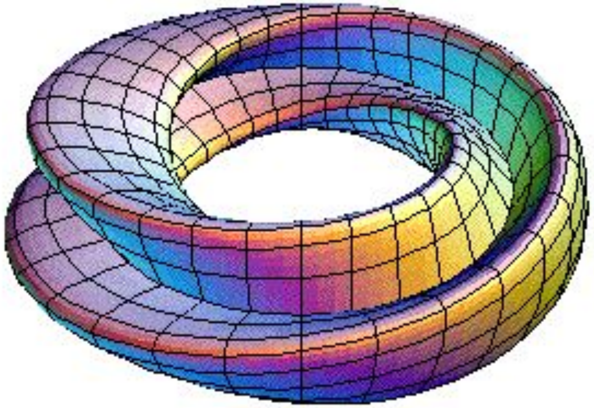
12
24
36
48
60
72
84
56
48
36
48
60
72
80
100
120
140
160
180
200
220
240
240
220
200
180
160
140
120
100
80
Нарьян-Мар
Салехард
Архангельск
Петрозаводск
Сыктывкар
Санкт-Петербург
Котлас
Вологда
Тобольск
Екатеринбург
Ижевск
Нижний Новгород
Казань
Омск
Курган
МОСКВА
Челябинск
Уфа
Ульяновск
Минск
Пенза
Самара
Костанай
Львов
Киев
Курск
Воронеж
Уральск
Караганды
Харьков
Кишинёв
Актобе
Одесса
Волгоград
оз. Балхаш
Николаев
Ростов-на-Дону
Аральск
Севастополь
Астрахань
Краснодар
Тбилиси
Ташкент









спроецируем эти линии на плоскость XOY и получим наслоение этих линий уровня. Нижняя часть рисунка. По этой плоской картинке можно примерно представить объемный характер поверхности уровня данного скалярного поля. В данном случае на плоскости XOY четко просматриваются два максимума и определяются сами точки максимумов.
Таким образом, изучая плоские рисунки линий различных уровней можно качественно представить вид скалярного поля в пространстве.

Теперь посмотрим на векторные функции или, как их называют физики, векторные поля.

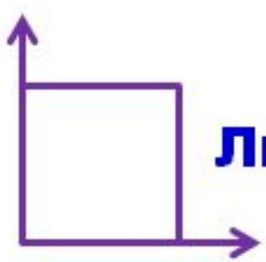
$$\overrightarrow{G(x,y,z)} = \vec{i}\, G_x(x,y,z) + \vec{j}\, G_y(x,y,z) + \vec{k}\, G_z(x,y,z)$$

Векторное поле состоит их трех скалярных полей

Построить линии уровней скалярных полей

$$u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

Поверхности уровней трехосные эллипсоиды, линии уровней на каждой из плоскостей XOY, XOZ, YOZ эллипсы.



Линии уровней.

Само поле x = 0, x =1, y = 0, y = 1.

$$G_x(x, y, z) \qquad G_y(x, y, z) \qquad G_z(x, y, z),$$

которые называются проекциями векторного поля на оси координат. Зная функцию векторного поля можно в каждой точке пространства определить конкретную величину данного вектора, т.е. его положение в пространстве, величину по модулю, направляющие углы и направляющие косинусы.

Какие физические величины описываются векторными полями? Скорость, сила, ускорение, напряженность электрического, магнитного и гравитационного полей, поток тепловой энергии, угловая скорость вращения, положение точки в пространстве, угол поворота, плотность электрического тока, плотность потока энергии.

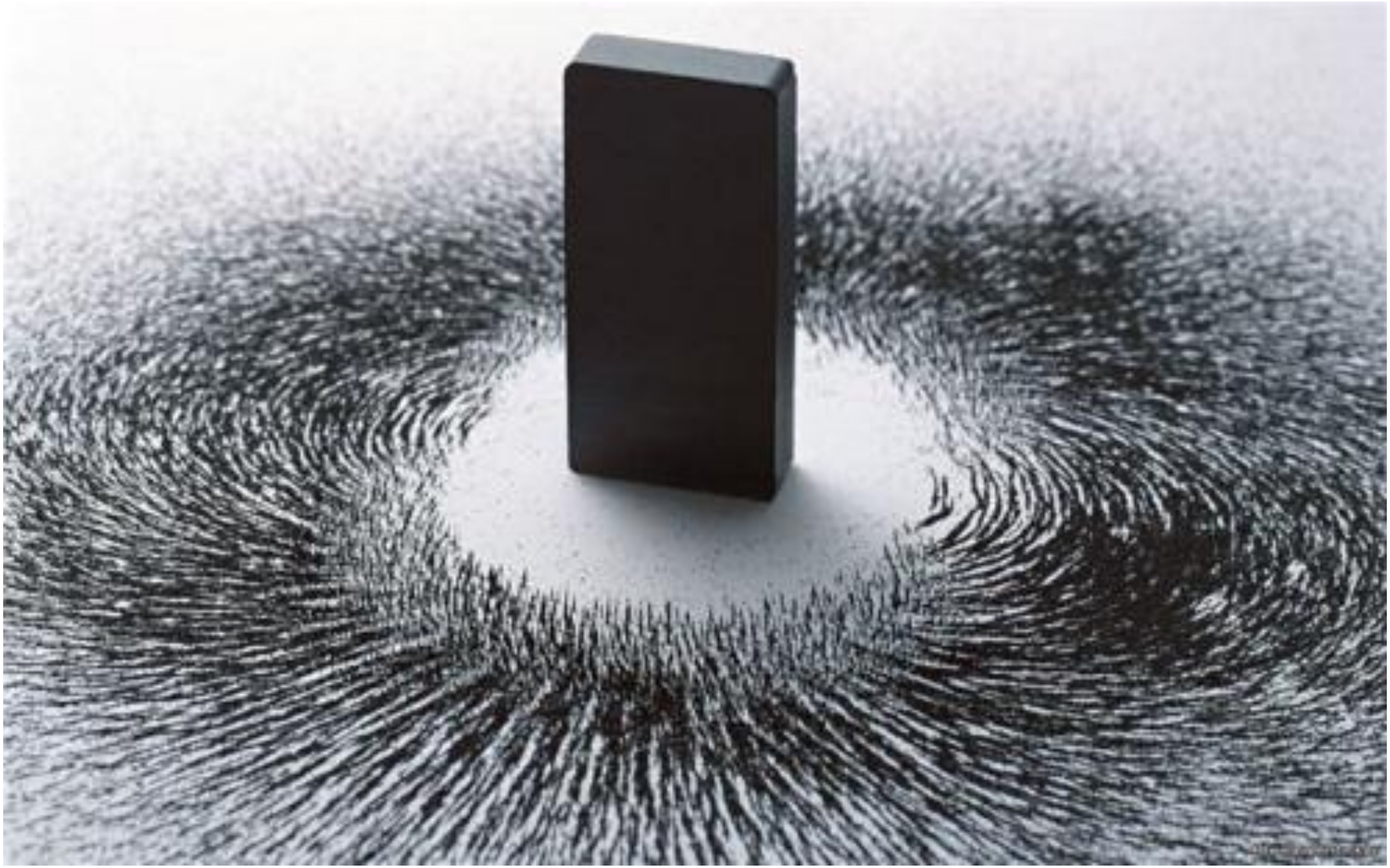
Самое простое из векторных полей это положение точки в пространстве. Задав три координаты, мы находим проекции соответствующего векторного поля

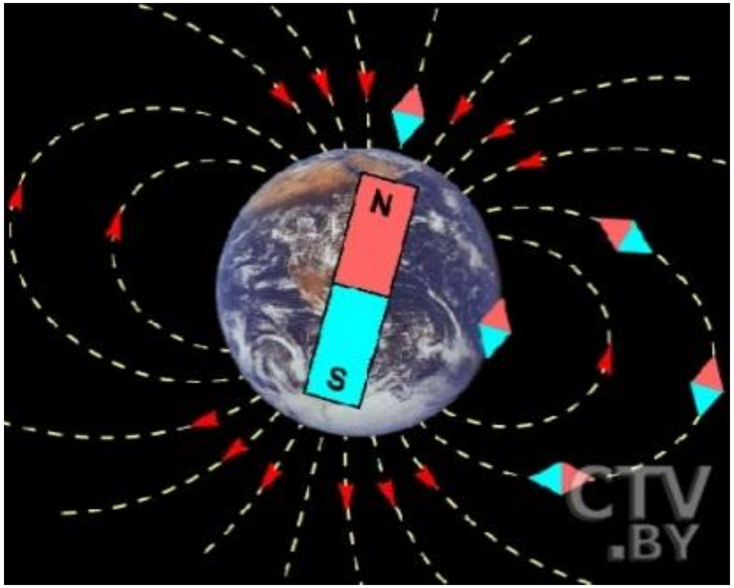
$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z\,.$$

Такая векторная функция носит специальное название – **радиус-вектор**. Графически оно состоит их игл-векторов, направленных от начала координат, причем длины этих векторов возрастают по мере удаления от центра. Такой математический дикобраз.

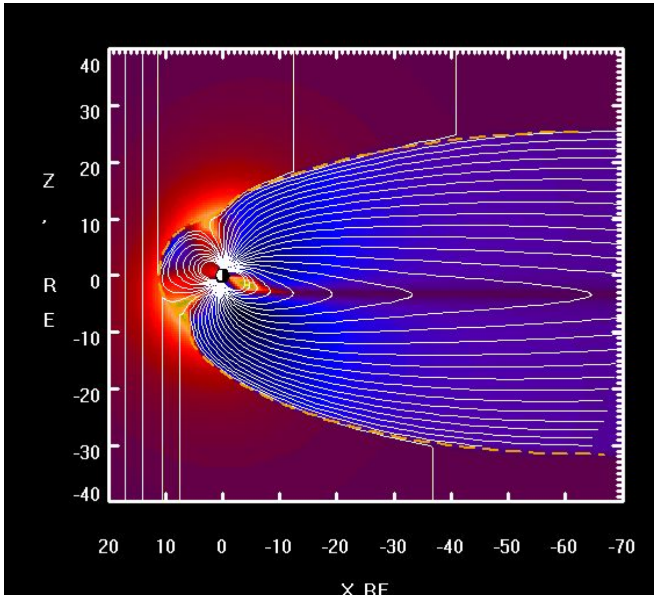
Векторное поле очень трудно нарисовать графически, так как формально это есть огромное количество стрелок разной величины и разного направления, расположенных в трехмерном пространстве.

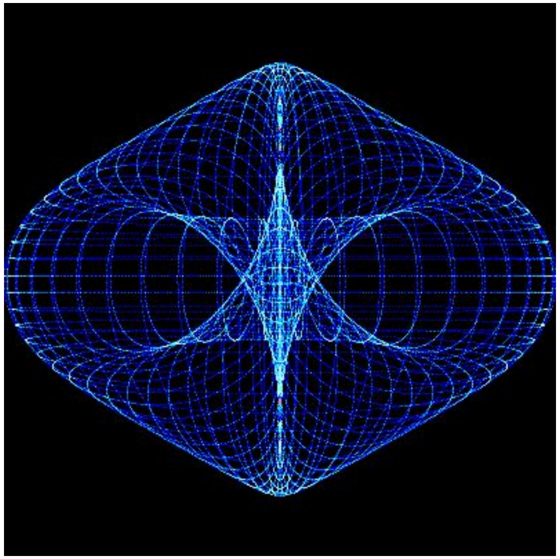
Для того, чтобы графически изобразить векторное поле хотя бы на плоскости, используются так называемые линии тока (векторные линии, силовые линии). Легче всего их увидеть, когда под листом бумаги расположен магнит, а на самой бумаге рассыпаны железные опилки. Они как раз и располагаются вдоль этих линий тока.

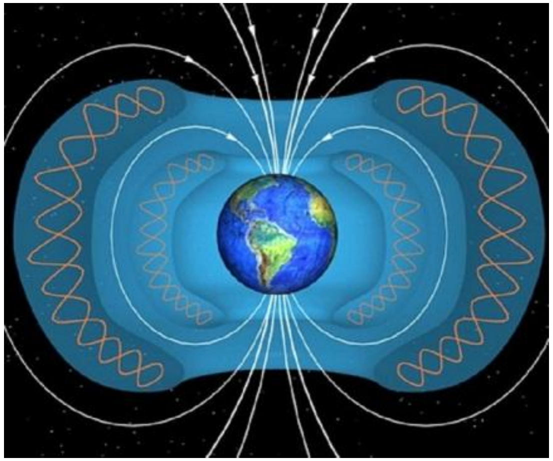


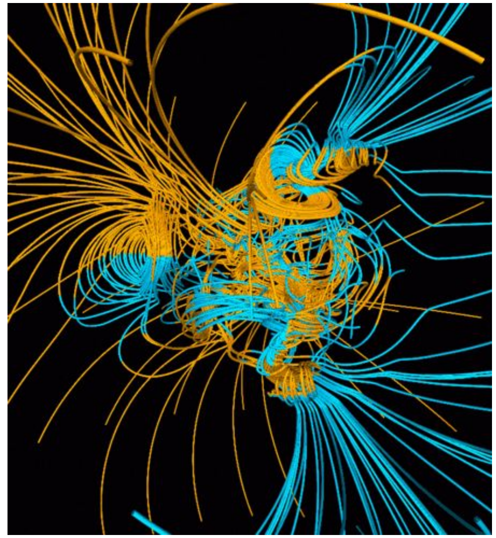

N
S
CTV
.BY


L James Lucas


40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
Z
,
R
E
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
X, RE

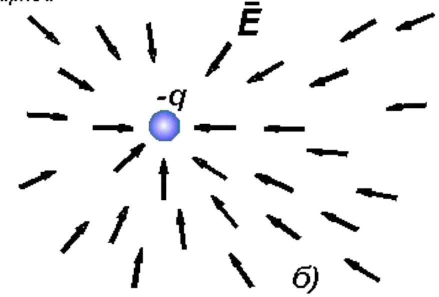


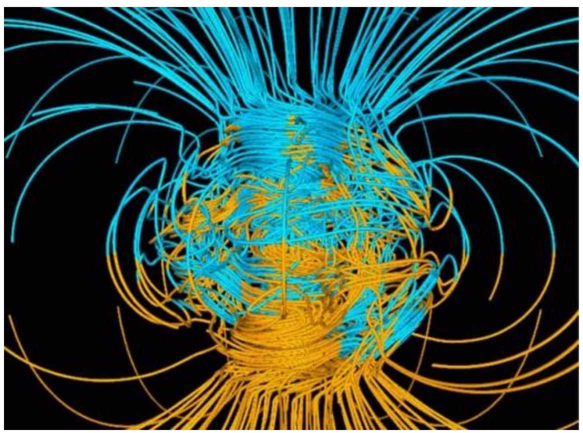


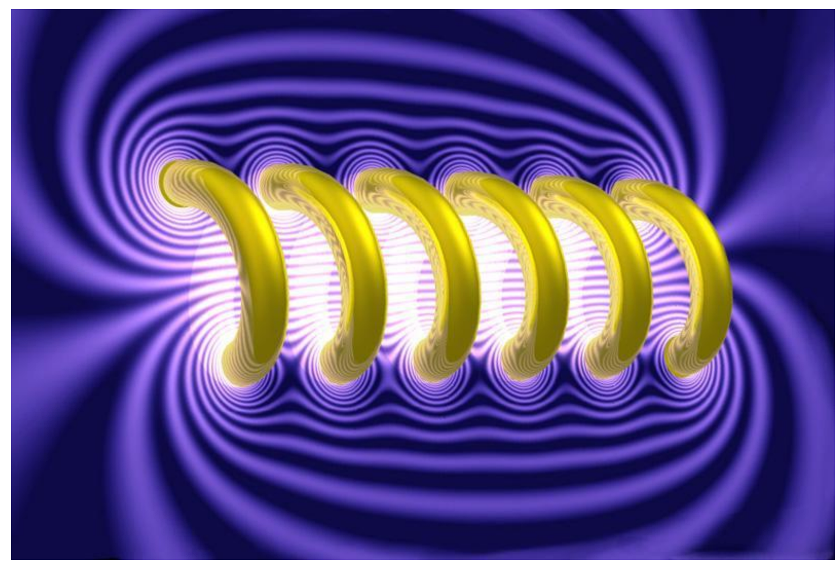


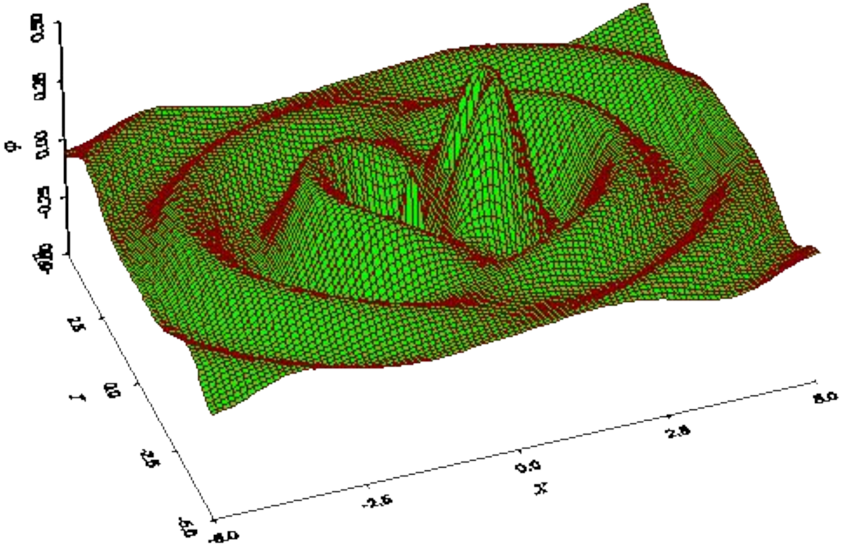
Строительство мечетей входами на Мекку

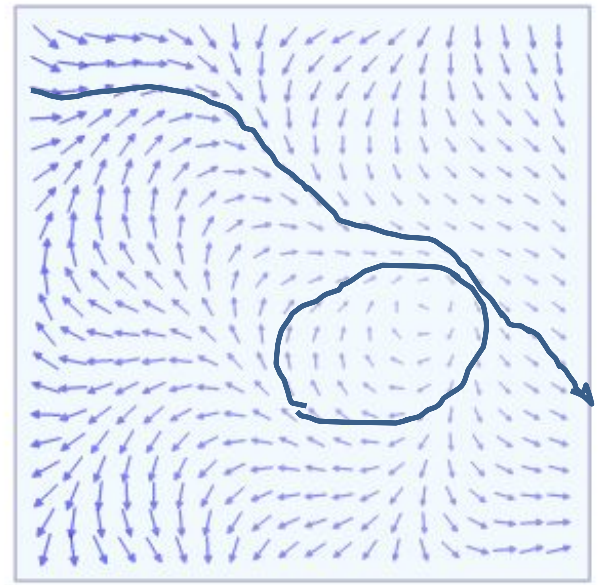
Векторное поле распределения электрического заряда

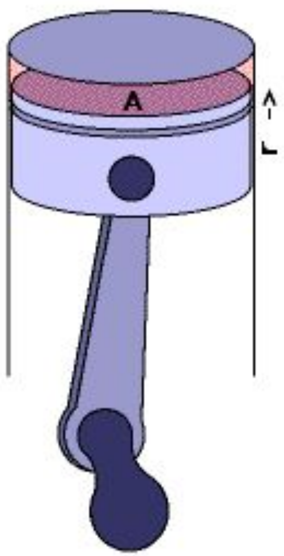


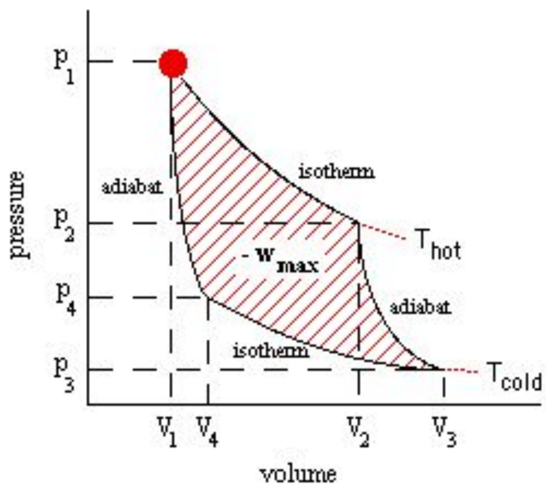


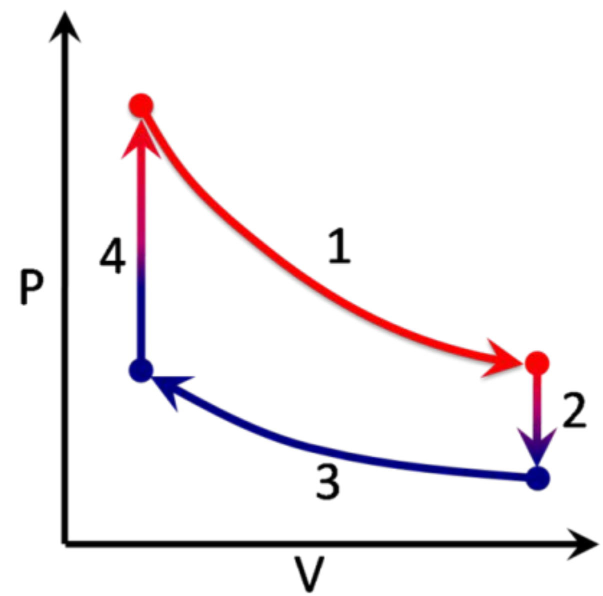







A
r


p1
p2
p4
p3
pressure
adiabat
isotherm
T hot
- w max
adiabat
isotherm
T cold
V1
V4
V2
V3
volume


P
V
1
2
3
4

Чтобы найти величину вектора в заданной точке, надо в этой точке провести касательную к линии тока, а длину вектора взять численно равной густоте этих линий тока.

Пример. Пусть скорость бумажного кораблика в водовороте описывается векторной функцией

$$\overrightarrow{v(x,y,z)} = -\vec{i}\,y + \vec{j}\,x \ .$$

Что мы можем сказать, глядя на это выражение? Во-первых, тело движется в плоскости XOY, так как z - компоненты скорости нет. Во-вторых, тело движется по окружности. Действительно, переходя к полярным координатам $x = r\cos\varphi$ $y = r\sin\varphi$, мы видим, что модуль скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = r.$$

Если радиус не меняется, то тело движется по кругу.

Векторные линии, определяющие расположение векторов векторного поля

$$\overrightarrow{G(x,y,z)} = \vec{i}\,G_x(x,y,z) + \vec{j}\,G_y(x,y,z) + \vec{k}\,G_z(x,y,z)$$

Находятся из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{G_x} = \frac{dy}{G_y} = \frac{dz}{G_z}$$

Найдем векторные линии для нашего бумажного кораблика, который попал в водоворот. У нас

$$G_x(x,y,z) = -y; \quad G_y(x,y,z) = x; \quad G_z(x,y,z) = 0\,.$$

Получаем дифференциальное уравнение

$$-\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x},$$

которое является ДУ с разделяющимися переменными

$$-x\,dx = y\,dy$$

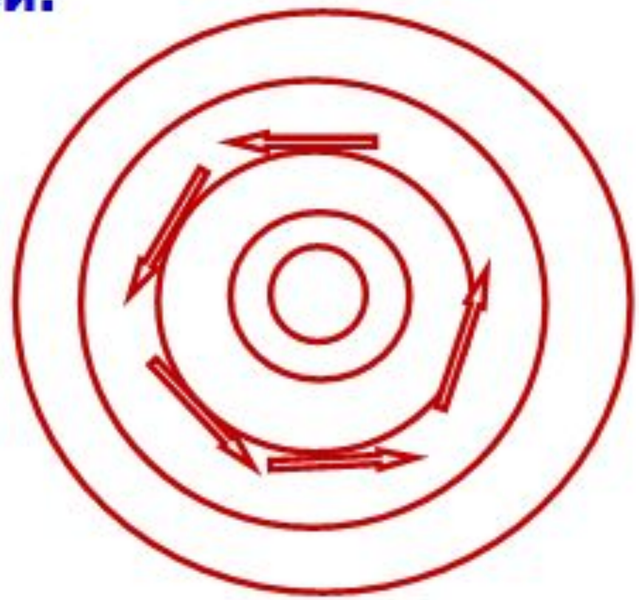
Интегрируя обе части равенства, получаем

$$-x^2 = y^2 + C,$$

которое перепишем в виде

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Действительно, мы получили систему концентрических окружностей.



Если векторные и скалярные функции (поля) не зависят от времени, то они называются стационарными полями.

Градиент

Начнем связывать набла-оператор и наши новые функции. Первыми по разнарядке идут скалярные поля. Если мы составим $\vec{\nabla} F(x, y, z)$, т.е. произведение векторного оператора на скалярную функцию, то получим следующее выражение

$$\vec{\nabla} F(x, y, z) = \vec{i}\,\frac{\partial F}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial F}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial F}{\partial z} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, F.$$

Действие набла-оператор на скалярное поле называется градиентом скалярного поля. Градиент скалярного поля, как мы видим, есть векторное поле, поскольку состоит их трех скалярных полей единичный векторов. Таким образом, скалярное поле может родить векторное поле и такое векторное поле называется **потенциальным векторным полем.** Это особый очень важный класс векторных полей. Само скалярное поле, породившее потенциальное векторное поле, называется – потенциалом. Если скалярное поле энергия, то это и есть потенциальная энергия.

Пример.

1. $F = \frac{r^2}{2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{2}$. Это скалярное поле рождает радиус-вектор, о котором мы говорили выше.

$$\vec{\nabla} F(x, y, z) = \vec{i}\,\frac{\partial F}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial F}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial F}{\partial z} = \vec{i}\,x + \vec{j}\,y + \vec{k}\,z.$$

2. В физике обнаружено, что сила, действующая на тело, с потенциальной энергией U(x, y, z) находится по формуле

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U(x, y, z)$$

Проверим эту формулу. Мы знаем, что потенциальная энергия тела массы m, поднятого на высоту z над центром Земли, определяется формулой

$$U(x, y, z) = mgz.$$

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U(x, y, z) = -\vec{k} \cdot mg.$$

Мы получили хорошо известное выражение силы земного тяготения. По модулю эта сила равна F = mg,

$g = 9{,}8$ м/с^2 –ускорение свободного падения, а ее направление идет к центру Земли, против направления вверх. Все сошлось.

3. Из физики известно, что потенциальная энергия двух электрических зарядов q_1 и q_2 , находящихся на расстоянии $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ определяется формулой

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Найдем силу притяжения этих зарядов по формуле, связывающей силу и потенциальную энергию. Вычисляем градиент.

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} 2x = -\frac{x}{r^3}.$$

Таким же образом мы берем и остальные частные производные, составляем градиент и записываем общее выражение для силы Кулона

$$\vec{F} = -\frac{q_1 q_2 (\vec{i}\,x + \vec{j}\,y + \vec{k}\,z)}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = -\frac{q_1 q_2 \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

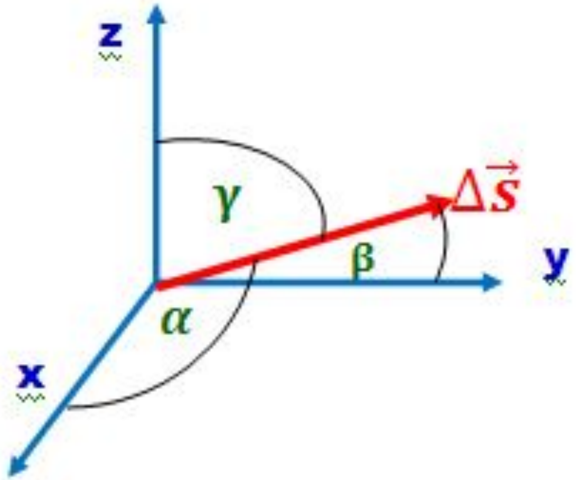
Это есть точный закон Кулона, взаимодействия двух электрических зарядов в векторной форме. Если заряды одного знака, то сила имеет отрицательный знак, что означает, что заряды отталкиваются. Если заряды имеют разные знаки, то сила положительна, и заряды притягиваются. Сила Кулона по модулю записывается в виде

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

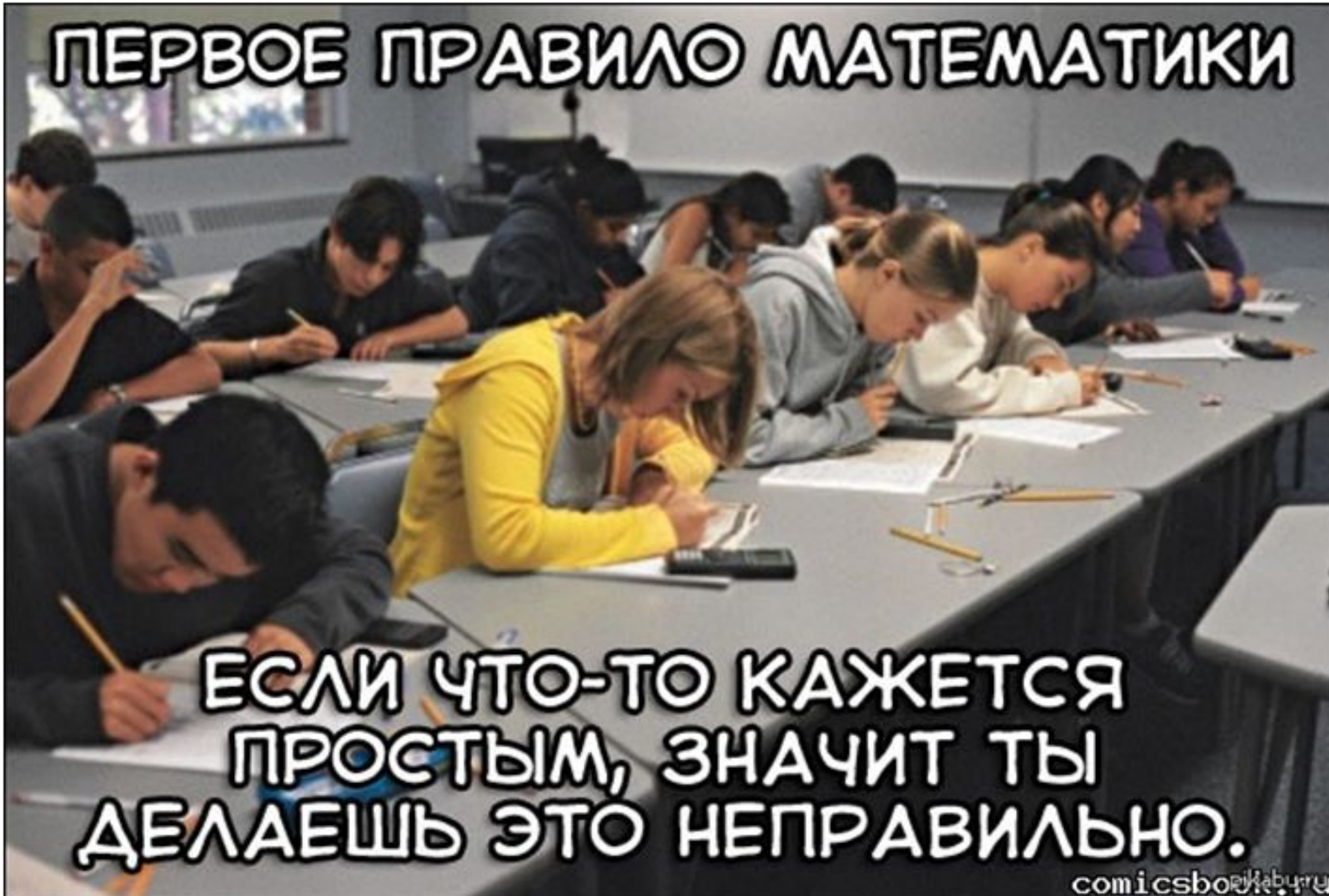
Именно эту формулу чаще всего приводят в справочниках.

Рассмотрим свойства градиента

Предварительно вспомним определение производной по направлению



Допустим, дан вектор $\Delta\vec{s}$, образующий с координатными осями направляющие углы α, β, γ и нам надо взять про-

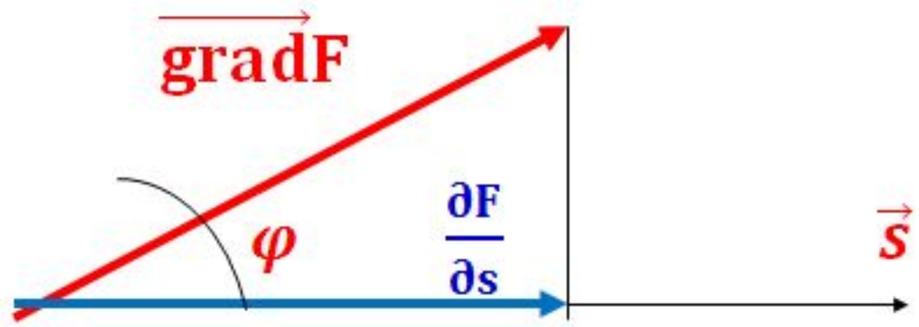

ПЕРВОЕ ПРАВИЛО МАТЕМАТИКИ
ЕСЛИ ЧТО-ТО КАЖЕТСЯ ПРОСТЫМ, ЗНАЧИТ ТЫ ДЕЛАЕШЬ ЭТО НЕПРАВИЛЬНО.
comicsbook.ru

Допустим, дан вектор $\Delta\vec{s}$, образующий с координатными осями направляющие углы α, β, γ и нам надо взять производную от скалярной функции трех переменных F(x,y,z) по направлению $\Delta\vec{s}$. Из математического анализа известно, что такая производная имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{s}} = \frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma = \left(\vec{\nabla}F, \frac{\vec{s}}{s}\right).$$

Теорема. Производная $\dfrac{\partial F}{\partial s}$ равняется проекции $\overrightarrow{\mathrm{grad}F}$ на направление $\vec{s}$.

Геометрическая интерпретация.



$$\overrightarrow{s_0} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma.$$

Скалярное произведение $(\overrightarrow{\mathrm{grad}F}, \overrightarrow{s_0})$ есть сумма произведений компонент этих векторов

$$(\overrightarrow{\mathrm{grad}F}, \overrightarrow{s_0}) = \frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma = \frac{\partial F}{\partial s}.$$

С другой стороны

$$(\overrightarrow{\mathrm{grad}F}, \overrightarrow{s_0}) = \left|\overrightarrow{\mathrm{grad}F}\right|\cos\varphi.$$

Сравнивая оба равенства, получаем

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \left|\overrightarrow{\mathrm{grad}F}\right|\cos\varphi.$$

Из рисунка видно, производная по направлению есть проекция градиента на свое направление.

Теорема доказана.

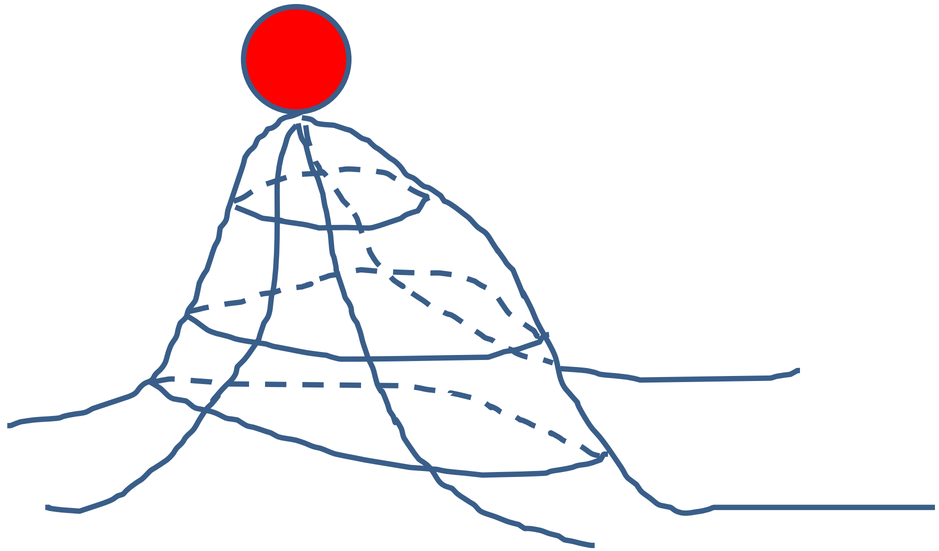
Исходя из этой теоремы, мы можем установить некоторые свойства градиента.

1. Производная от скалярного поля по направлению $\overrightarrow{s_0}$ имеет наибольшую величину в направлении градиента и эта величина равна $|\overrightarrow{\mathrm{grad}F}|$.

Из рисунка видно, что при стремлении угла φ к нулю проекция градиента нарастает вплоть до самого значения градиента.

2. Более того, производная по направлению перпендикулярному градиенту вообще равна нулю.

3. Если скалярная функция зависит только от двух переменных, т.е. F= F(x,y), то градиент этой функции

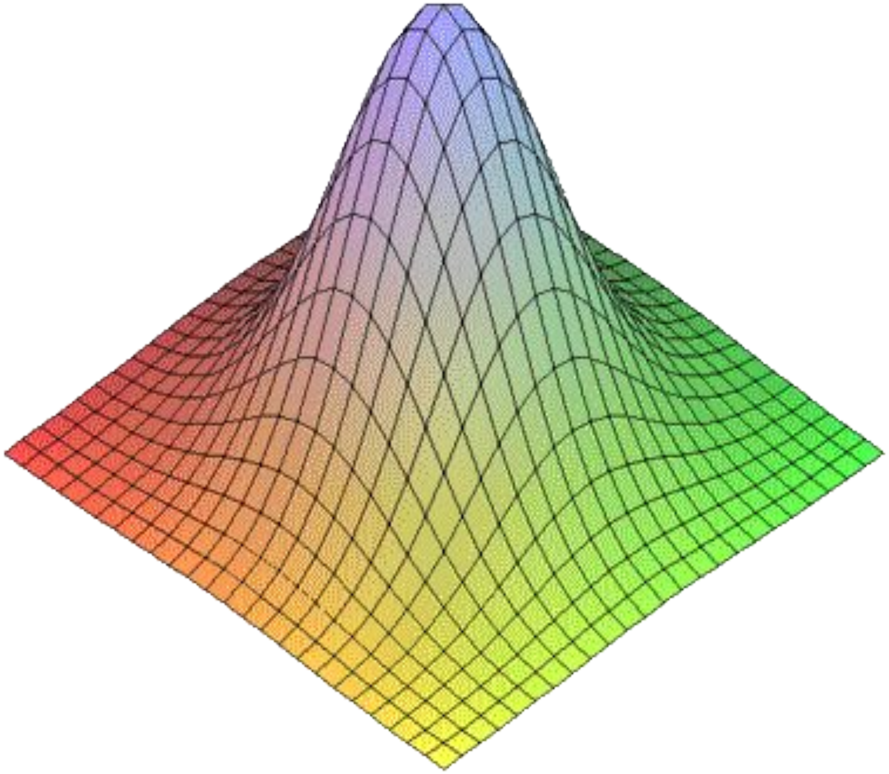


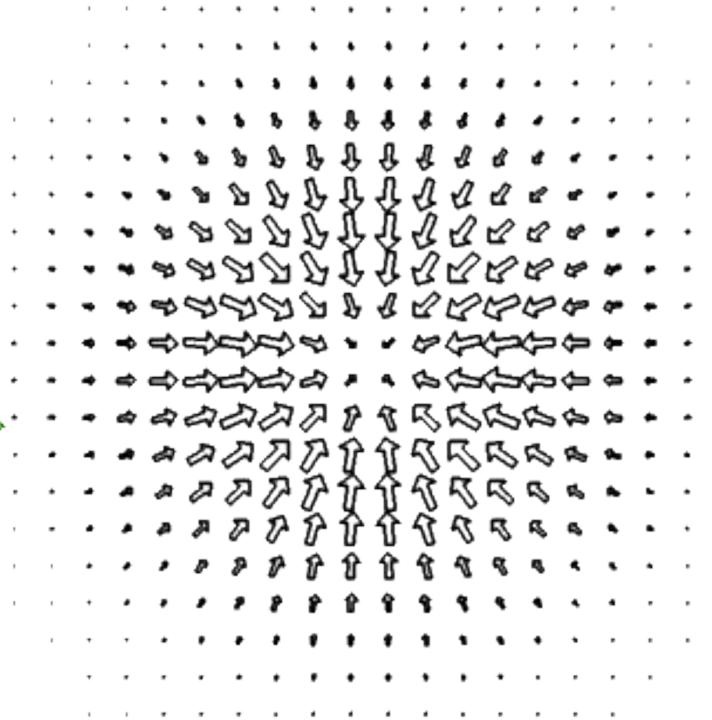
**Куда скатится шар? Где будет больше производная
о направлению, т. е. куда направлен градиент?**

Несколько новых сообщений из текущей прессы.

**1. Чтобы наверняка запомнить слово или предложение на иностранном языке,
надо его повторить 160 раз в течение 14 минут. За это время в мозгу образуется
устойчивая связка между нейронами.**

**2. У одного чиновника в Швейцарии заболело ухо и горло. Томография нашла с зоне ухо-горло-нос кусочек бумаги, но которой были записаны формулы. Когда больной посмотрел на бумажку, он вспомнил, что 20 лет
назад он сдавал экзамен и засунул в ухо шпаргалку.**





Слева поверхность уровня скалярного поля, справа проекции градиента

$$\vec{G} = \vec{\nabla} F(x,y) = \vec{i}\,\frac{\partial F}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial F}{\partial y}$$

дает векторное поле $\vec{G}$, которое лежит в плоскости XOY. Покажем, что это векторное поле перпендикулярно к линии уровня a = $F(x,y)$, где a некоторая константа. Поскольку a = $F(x,y)$ есть плоская линия, то к ней можно провести касательную $y = k_1 x + b$, причем k_1 равно производной от этой плоской линии. Производная от неявной функции (плоской кривой) R(x,y) = 0 имеет вид

$$\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{dy}{dx} = R'_x + R'_y y'_x = 0,$$

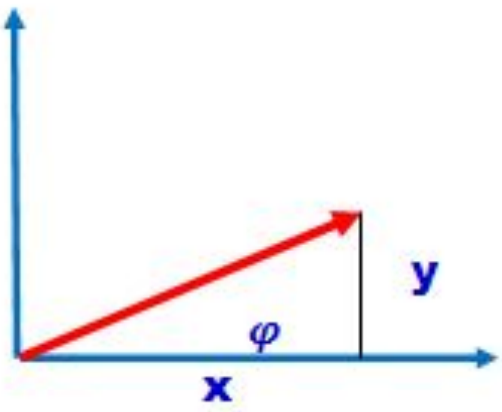
Откуда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{R'_x}{R'_y}$$

У нас $R(x,y) = F(x,y) - a$ **, т.е.**

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x^/}{F_y^/} = k_1$$

Далее найдем угловой коэффициент k_2 **вектора** $\vec{c} = \vec{i}x + \vec{j}y$. $k_2 = \text{tg}\,\varphi = y/x$



$$\vec{\nabla}F(x,y) = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y = \vec{i}x + \vec{j}y$$

У градиента на плоскости

$$k_2 = \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = \frac{F'_y}{F'_x}$$

Таким образом,

$$k_1 k_2 = = -\frac{F'_x}{F'_y}\frac{F'_y}{F'_x} = -1$$

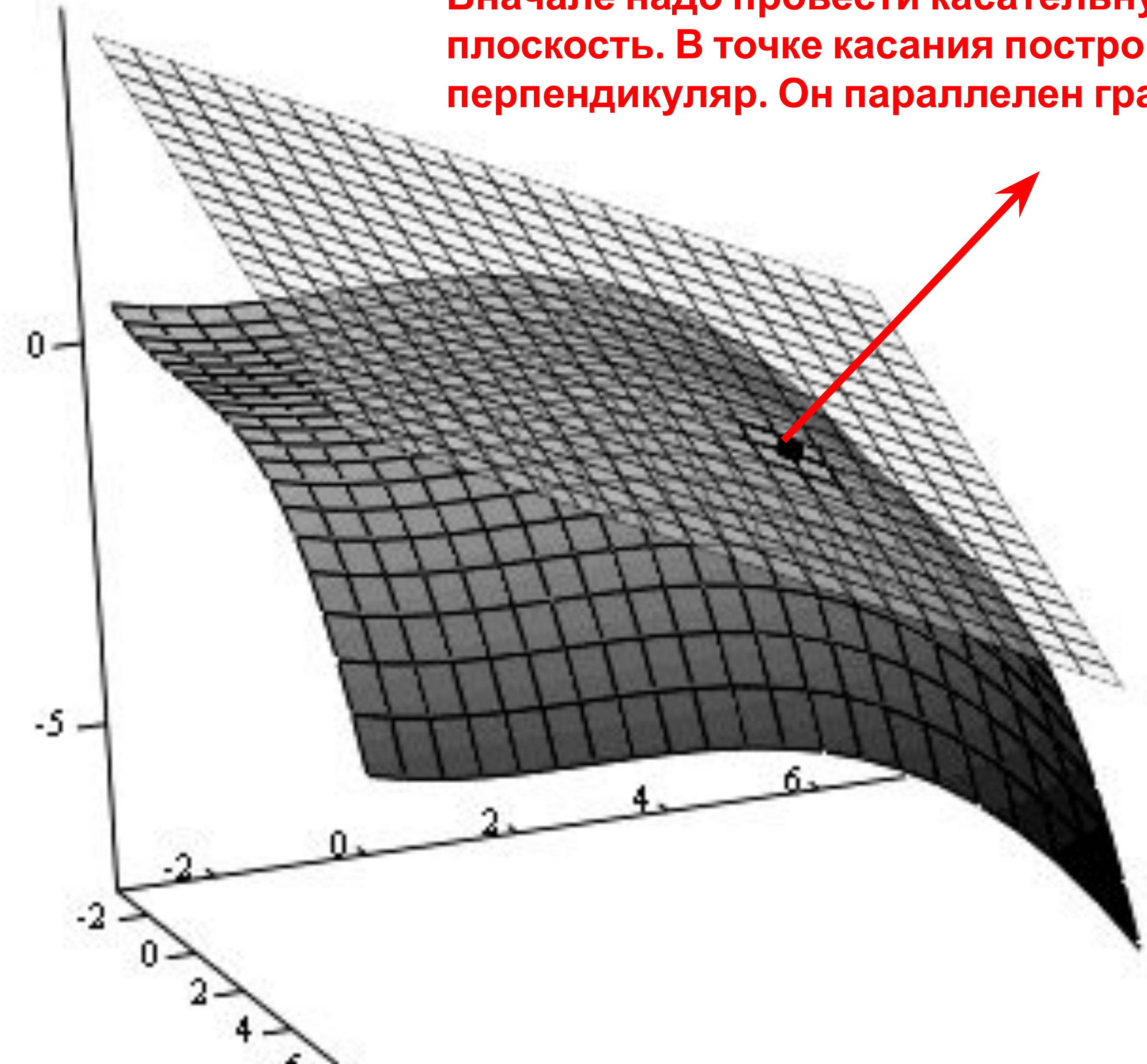
В аналитической геометрии доказывается, что прямые линии $y = k_1 x + b$ и $y = -\frac{1}{k_1} x + b$ взаимно перпендикулярны. Поэтому вектор градиента перпендикулярен к касательной линии уровня.

Это правило обобщается и на трехмерный случай: градиент скалярного поля перпендикулярен к касательной

плоскости поверхности уровня в любой точке пространства.
Итак, мы имеем некоторую информацию о свойствах потенциальных векторных полей. Они порождаются некоторым скалярным полем через взятие градиента. Если мы нарисуем поверхности уровней или линии уровне, то полученное векторное поле будет направлено перпендикулярно этим поверхностям или линиям.

Задача. Тело массы $m = 10$ кг находится в среде с потенциальной энергией $U(x, y, z) = (x^4 + y^2 + z^6)$ Дж. Эквипотенциальные поверхности есть трехосные эллипсоиды. Спрашивается, в каком направлении, и с каким по модулю ускорением будет двигаться это тело, если оно в начальный момент находится в точке $(1;1;1)$?

Как провести нормаль к поверхности? Вначале надо провести касательную плоскость. В точке касания построить перпендикуляр. Он параллелен градиенту.



Решение. Вспомним формулу, связывающую силу и потенциальную энергию

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U(x, y, z),$$

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(x^4 + y^2 + z^6) = -4x^3\vec{i} - 2y\,\vec{j} - 6z^5\vec{k}.$$

Ускорение, как известно, определяется формулой второго закона Ньютона

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = -0,4x^3\vec{i} - 0,2y\,\vec{j} - 0,6z^5\vec{k}.$$

В конкретной точке (1;1;1) мы имеем ускорение в векторном виде

$$\vec{a} = -0,4\vec{i} - 0,2\vec{j} - 0,6\overrightarrow{k}.$$

Это значит, что оно имеет направление вектора с проекциями (-2; -1; -3), и по модулю равно

$$a = \sqrt{0,16 + 0,04 + 0,36} = 0,748\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Пусть в пространстве задано скалярное поле давления жидкости или газа. Поместим в эту область тело произвольной формы, ограниченное поверхностью Σ, (рис. 24). Вычислим суммарную силу $\mathbf{F}$, действующую на тело со стороны среды.

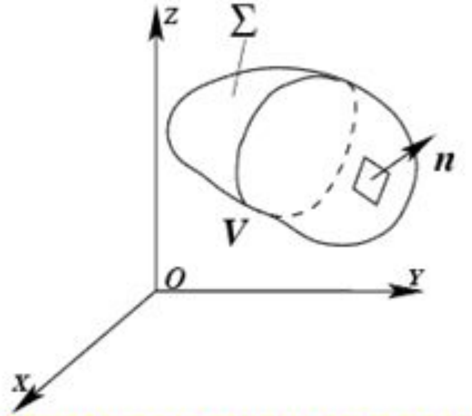


Рис.24 К определению градиента скалярной функции

Рассмотрим площадку dS, содержащую точку M на поверхности Σ. Модуль силы, действующей на площадку dS, равен $dF = pdS$, а направление совпадает с направлением нормали к поверхности в точке M. Таким образом, вектор силы

$$\boxed{d\mathbf{F} = p\mathbf{n}dS.} \tag{71}$$

Полная сила может быть вычислена интегрированием по поверхности Σ:

$$\mathbf{F} = \oint\limits_{\Sigma} p\mathbf{n}dS. \tag{72}$$

Если результат (72) разделить на объем V, заключенный внутри поверхности Σ, то получившаяся величина

$$\frac{1}{V}\oint\limits_{\Sigma} p\mathbf{n}dS \qquad (73)$$

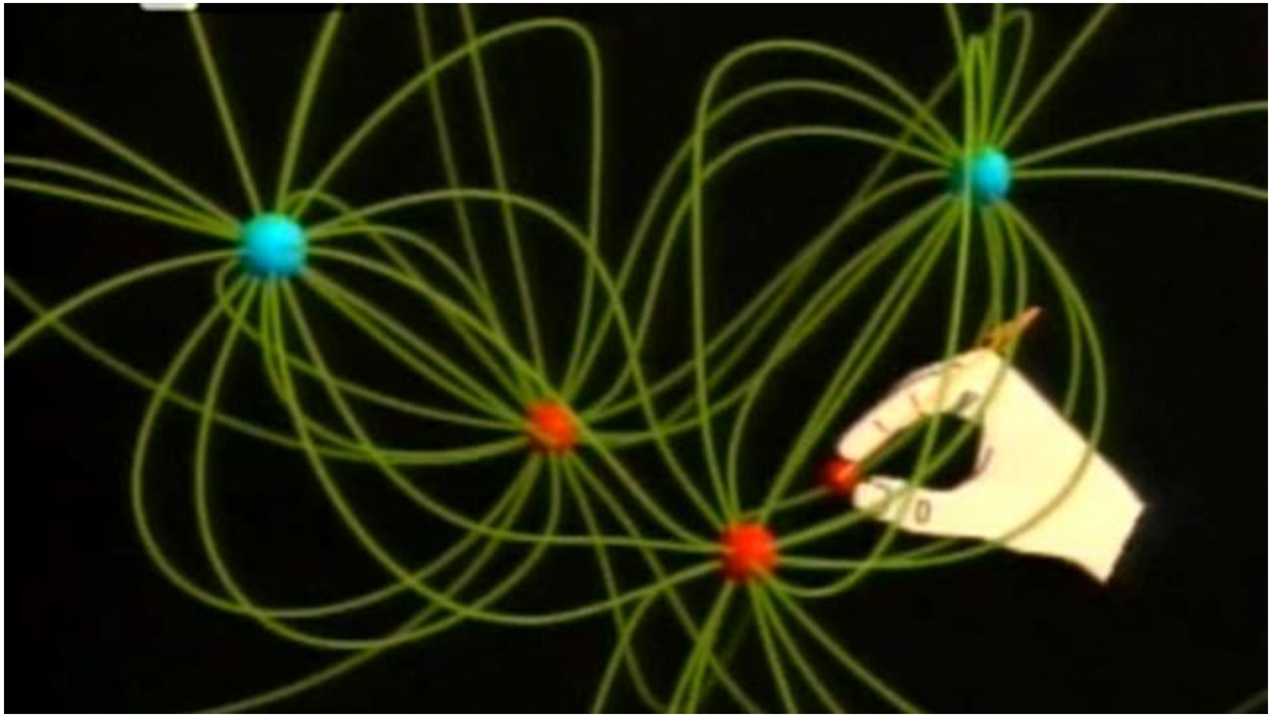
будет "средней" силой, действующей со стороны среды на любую точку внутри Σ. Физической причиной этого действия является перепад давлений между различными точками среды.

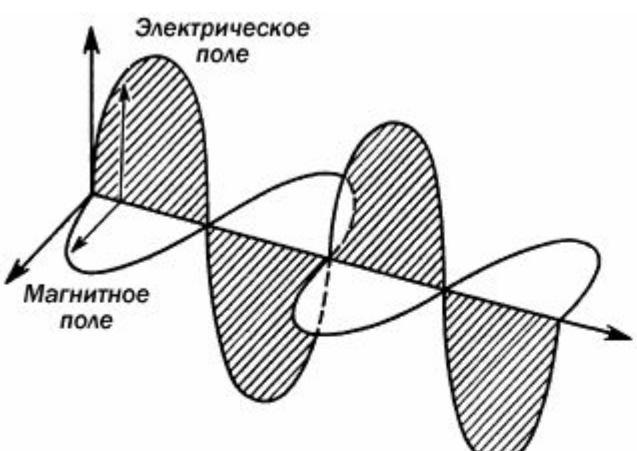
Способность поля (в данном случае поля давлений) оказывать действие на пробное тело является характеристикой самого поля и поэтому не должна зависеть на формы и размеров тела, помещенного в это поле. Будем стягивать поверхность Σ к точке M, устремляя, таким образом, $V \to 0$ и рассмотрим предел

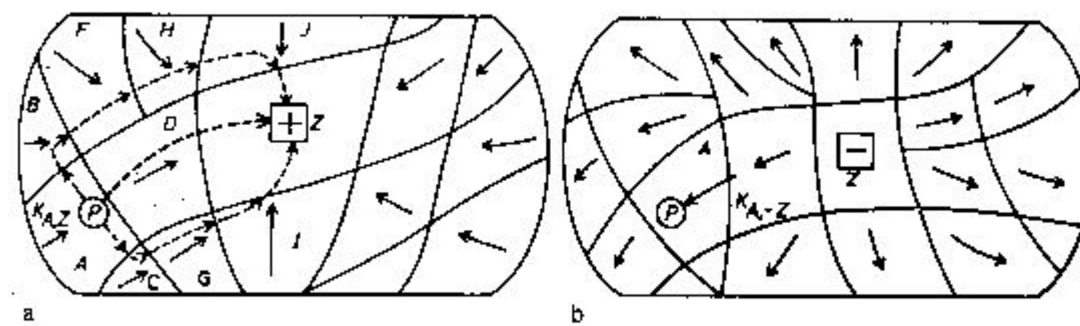
$$\mathbf{f} = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \oint_{\Sigma} p\mathbf{n} dS. \qquad (74)$$

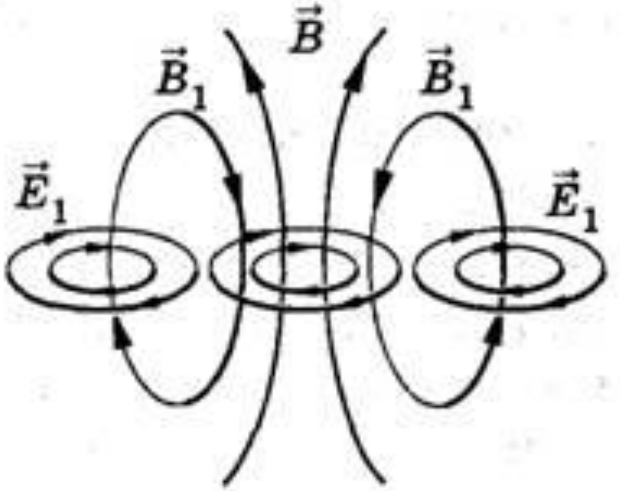
Если предел (74) существует, то по смыслу рассуждений он определит плотность силы, действующей со стороны поля (давлений) на точечное тело, помещенное в точку M и будет характеризовать быстроту изменения поля (перепад давлений) в окрестности этой точки. Рассмотрим общий случай скалярного поля $\varphi(\mathbf{r})$. Если для поля $\varphi(\mathbf{r})$ существует предел (74) при стягивании поверхности к точке M, то он называется *градиентом* поля $\varphi(\mathbf{r})$ в этой точке:

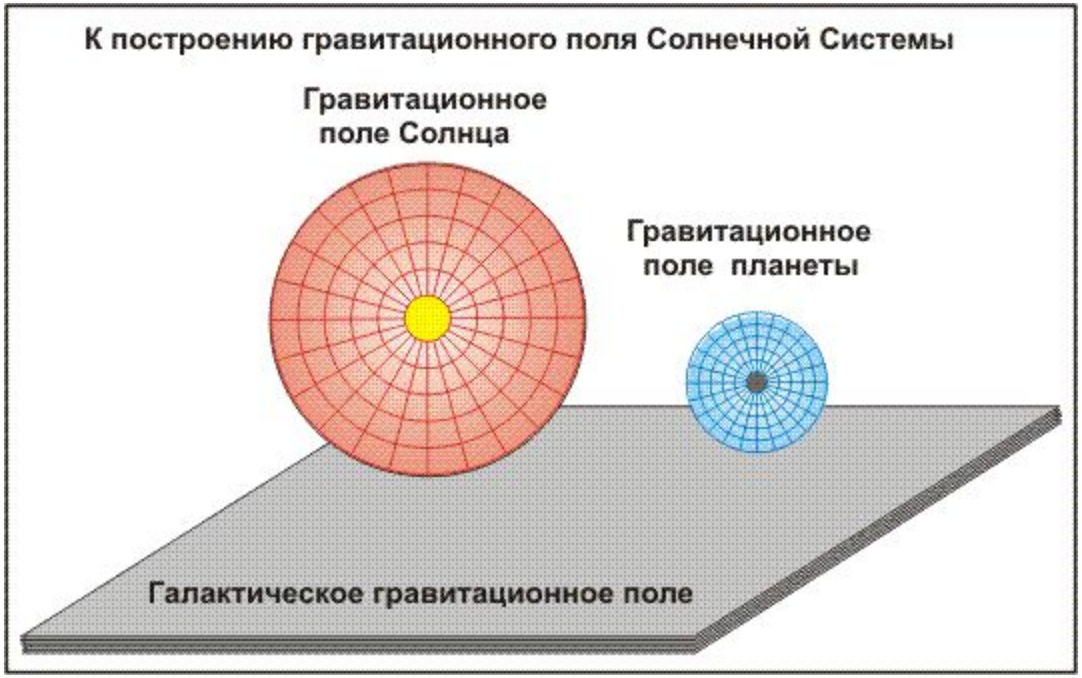
$$\mathrm{grad}\varphi = \lim_{\mathrm{V}\to 0} \frac{1}{\mathrm{V}} \oint_{\Sigma} \varphi \mathbf{n} \mathrm{dS}\,. \qquad (75)$$

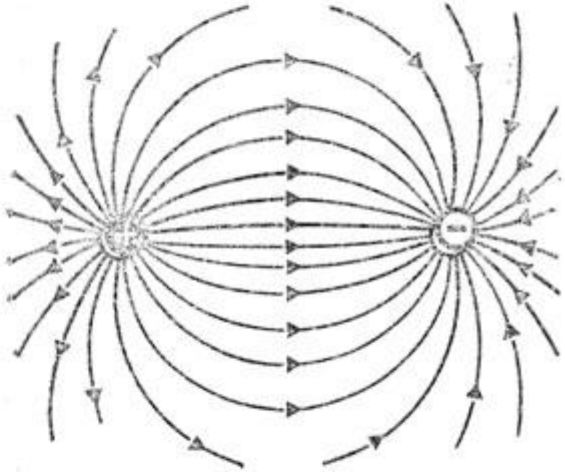


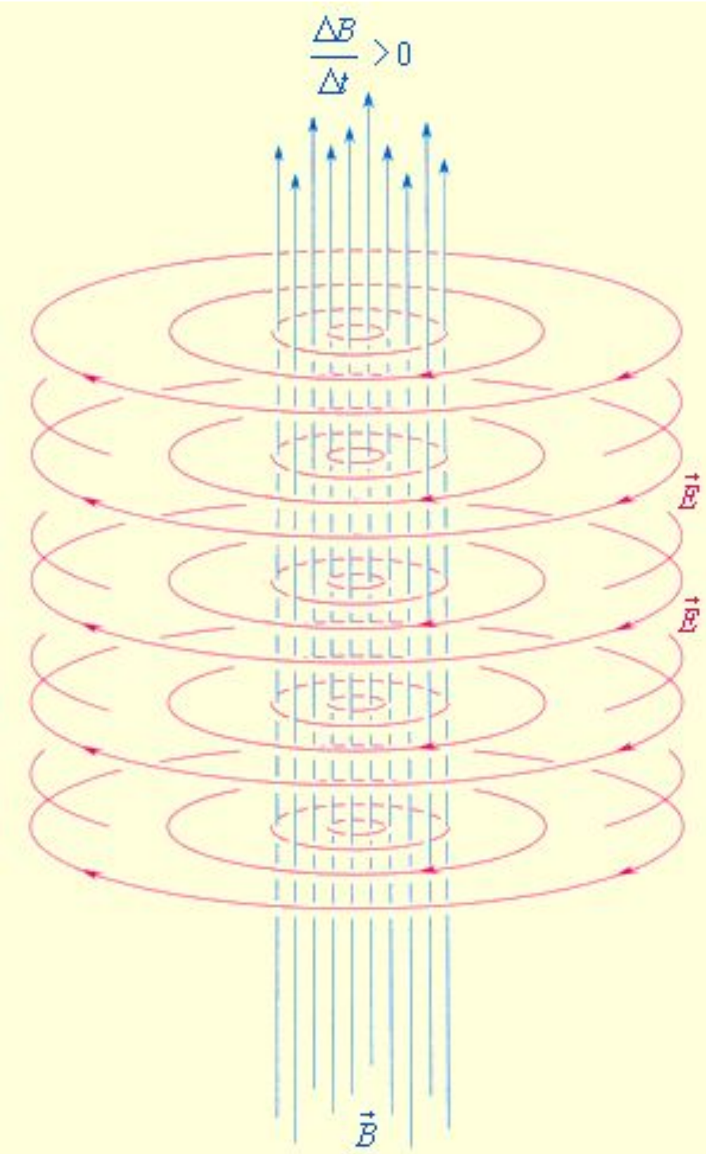

Электрическое
поле
Магнитное
поле


F
H
J
B
D
Z
P
A
C
G
I
a
b

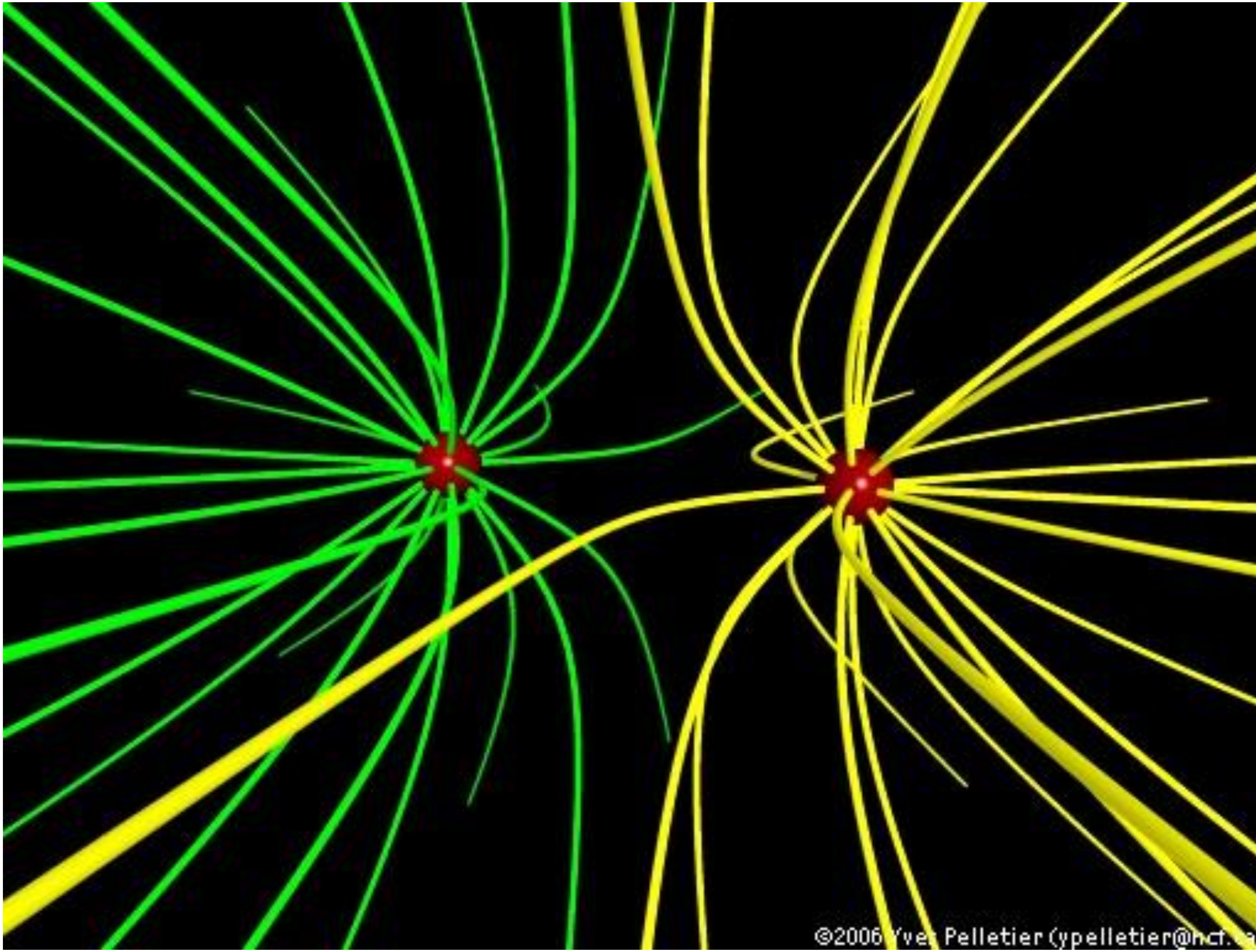

$\vec{B}$
$\vec{B}_1$
$\vec{B}_1$
$\vec{E}_1$
$\vec{E}_1$

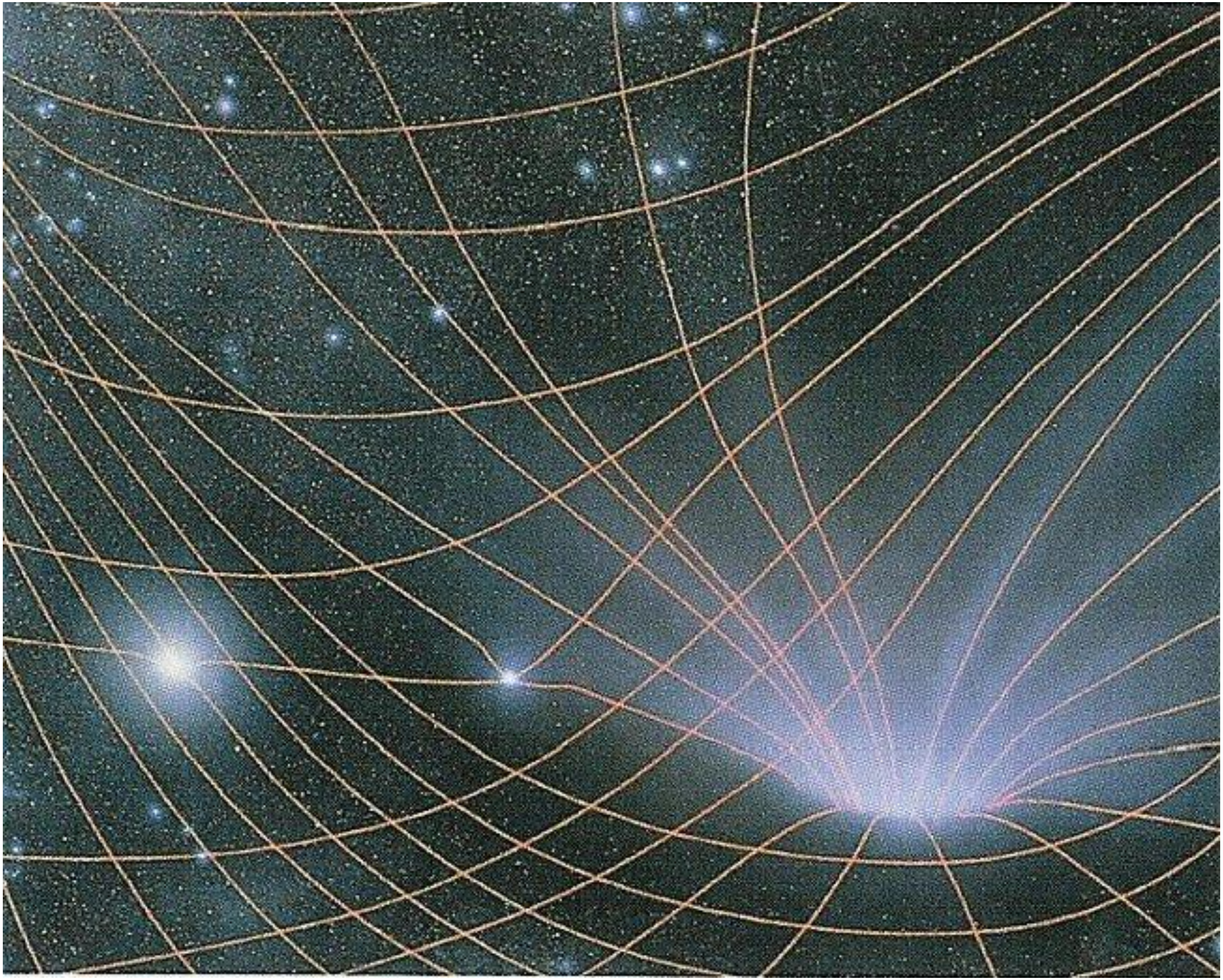

К построению гравитационного поля Солнечной Системы
Гравитационное поле Солнца
Гравитационное поле планеты
Галактическое гравитационное поле





Электромагнитное поле- это особая форма материи, посредством которой осуществляется взаимодействие между электрически заряженными частицами


©2006 Yves Pelletier (ypelletier@ncf.ca)



Дифференциальные операторы в различных системах координат

Под дифференциальными операторами мы понимаем сам оператор набла

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

и связанные с ним такие понятия как градиент, дивергенция, ротор, оператор Лапласа. Переведем эти операторы из декартовой системы координат в какую-либо другую криволинейную систему координат. Например, полярную, цилиндрическую, сферическую, эллиптиче-

скую. Путь новые переменные $\{q_{1;} q_2; q_3\}$ связаны с декартовыми координатами следующими функциями

$$q_1 = \varphi_1(x, y, z); \quad q_2 = \varphi_2(x, y, z); \quad q_3 = \varphi_3(x, y, z).$$

Потребуем, чтобы расстояние межу двумя точками ds было одним и тем же в обеих системах координат. Это выливается в такое равенство

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_3} dq_3\right)^2$$
$$+ \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_3} dq_3\right)^2$$
$$+ \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_3} dq_3\right)^2.$$

Запишем это условие более коротко

$$(ds)^2 = H_1^2 (dq_1)^2 + H_2^2 (dq_2)^2 H_3^2 (dq_3)^2,$$

где

$$H_1^2 = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_1}\right)^2;$$

$$H_2^2 = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_2}\right)^2;$$

$$H_3^2 = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_3}\right)^2.$$

В результате мы получаем связки между приращениями координат в разных системах

$$ds_1 = H_1 dq_1;\ ds_2 = H_2 dq_2;\ ds_3 = H_3 dq_3,$$

и выражение для дифференциала объема в новой системе координат

$$dV = ds_1 ds_2 ds_3 = H_1 H_2 H_3 \; dq_1 dq_3 dq_3;$$

Множитель $H_1 H_2 H_3$ называется якобианом преобразования.

После этого анализа мы можем записать

$$\vec{A} = \overrightarrow{grad}\, u = \vec{\nabla}\, u = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\vec{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\vec{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\vec{e}_3$$
$$= A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_2\vec{e}_2.$$

Тут $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\}$ орты новой системы координат. Далее

$$div\vec{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2 H_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(H_1 H_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(H_2 H_1 A_3)\right].$$

В декартовой системе координат оператор Лапласа записывается в трехмерном пространстве виде

$$\Delta u(x,y,z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

В новой системе координат

$$\Delta u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1 H_3}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_2 H_1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right]$$

В двумерном пространстве он записывается в виде

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

В полярной системе координат $x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$.
Поэтому

$$H_1^2 = \left(\frac{\partial r\cos\varphi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial r\sin\varphi}{\partial r}\right)^2 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1;\ H_1 = 1$$

$$H_2^2 = \left(\frac{\partial r\cos\varphi}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial r\sin\varphi}{\partial \varphi}\right)^2 = r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r^2;\ H_2 = r.$$

Подставим эти выражения в общую формулу

$$\Delta u = \frac{1}{H_1 H_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)\right],$$

и получим вид оператора Лапласа в полярной системе координат

$$\Delta u(x,y) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 \varphi} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

После ряда таких же манипуляций находим оператор Лапласа в цилиндрической системе координат

$$\Delta u == \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

В сферической системе координат мы имеем такую связь

$$x = r sin\theta cos\varphi, \quad y = r sin\theta sin\varphi, \quad z = cos\theta.$$

Тут мы ввели полярный угол $\theta \in [0, \pi]$ и азимутальный гол $\varphi \in [0, 2\pi]$. Находим

$$H_1 = 1;\ H_2 = r;\ H_3 = r\sin\theta$$

и вид оператора Лапласа в сферической системе координат

$$\Delta u(x, y, z) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

ДИВЕРГЕНЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

В этом разделе лекций мы перейдем к воздействию оператора Гамильтона (набла-оператора) на векторные поля, т. е. на векторные функции. Их линейной алгебры мы помним, что если мы умножаем один вектор на второй вектор, то тут возможны два способа произведения векторов – скалярное и векторное произведение.

Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Скалярное произведение осуществляется через компоненты векторов

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

а векторное произведение осуществляется через детерминант

$$\vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \\ = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \\ \vec{i}\left(a_y b_z - a_z b_y\right) + \vec{j}\left(a_z b_x - a_x b_z\right) + \vec{k}\left(a_x b_y - a_y b_z\right).$$

В случае дивергенции мы будем действовать на векторную функцию первым скалярным образом, т. е.

$$\operatorname{div} \vec{G} \equiv \left(\vec{\nabla}, \vec{G}\right) = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}.$$

Равенство через три черты обозначает переобозначение. Таким образом, мы видим, что дивергенция переводит векторное поле в скалярное поле.

Примеры.

1. $\vec{r} = \vec{i}\,x + \vec{j}\,y + \vec{k}\,z$. Это векторное поле – радиус-вектор.

$$\operatorname{div}\vec{r} \equiv \left(\vec{\nabla}, \vec{r}\right) = 1 + 1 + 1 = 3$$

Мы получили скалярное поле, которое не меняется в пространство, так называемое однородное поле. Например, плотность воздуха в нашей аудитории примерно во всех точках одинакова и есть однородное скалярное поле.

2. $\vec{G} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{i}\,x + \vec{j}\,y + \vec{k}\,z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ это единичная функция радиус вектора. Вначале найдем производную от G_x

$$\frac{\partial G_x}{\partial x} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2} - x\dfrac{2x}{2\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3}$$

Точно такие же слагаемые, только с заменой x на y и z,
Получаются для следующих производных. Складывая их,
Мы находим окончательное выражение для дивергенции

$$\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r} \equiv \left(\overrightarrow{\nabla}, \frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{3r^2 - r^2}{r^3} = \frac{2}{r}$$

Рассмотрим некоторые свойства дивергенции

$$\operatorname{div}\left(c\vec{G}\right) = c\operatorname{div}\left(\vec{G}\right),$$

Если c – константа.

$$\operatorname{div}\left(\vec{G} + \vec{D}\right) = \operatorname{div}\left(\vec{G}\right) + \operatorname{div}\left(\vec{D}\right)$$

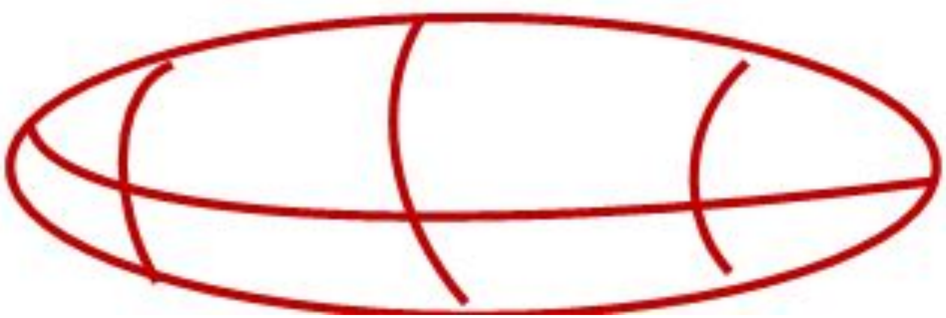
Если векторное поле состоит их произведения скалярного поля на чисто векторное поле, т.е. $\vec{G} = F\vec{D}$, то

$$\operatorname{div}\left(F\vec{D}\right) = \left(\operatorname{grad}F, \vec{D}\right) + F\operatorname{div}\vec{D}.$$

В результате получаем снова скалярное поле. Дивергенция вектора используется в формуле Остроградского – Гаусса

$$\oiint_{\partial V} (\vec{G}, d\vec{\sigma}) = \iiint_{V} \operatorname{div}\vec{G}\, dV$$

Напомним, как читается эта теорема. Поток векторного поля $\vec{G}$ через замкнутую поверхность ∂V тройному интегралу от $\operatorname{div}\vec{G}$ по объему, ограниченному этой поверхностью.



Докажем, что поток радиус-вектора через любую замкнутую поверхность равен утроенной величине объема этой области.

Так как

$$\mathrm{div}\,\vec{r} \equiv \left(\vec{\nabla}, \vec{r}\right) = 1 + 1 + 1 = 3$$

то

$$\oiint_{\partial V} (\vec{r},\, d\vec{\sigma}) = \iiint_{V} \mathrm{div}\vec{r}\; dV = 3 \iiint_{V} dV = 3V.$$

Рассмотрим такую комбинацию

$$\mathrm{divgrad}\;\vec{G} = \left(\vec{\nabla},\, \vec{\nabla}F\right) = \left(\vec{\nabla},\, \vec{\nabla}\right)F$$

Скалярное произведение оператора Гамильтона самого на себя называется оператором Лапласа и имеет вид

$$\left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}\right) = \Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$$

Таким образом,

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\;F = \left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}F\right) = \left(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}\right)F = \Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}.$$

Примеры.

1. $F = xyz$. $\mathrm{divgrad}\;xyz = 0$. **Поле отсутствует**

2. $F = (xyz)^2$. $\mathrm{divgrad}\;xyz = 2(yz + zx + xy)$

3. $F = x^2+y^2+z^2$. $\mathrm{divgrad}\,(x^2+y^2+z^2) = 6$. **Однородное скалярное поле.**

4. $F = e^x+ e^y+ e^z$. $\mathrm{divgrad}\,(e^x+ e^y+ e^z) = e^x+ e^y+ e^z$.

.

Далее найдем

$$\text{grad div grad } F = \vec{i}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial z^2}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 F}{\partial y \partial z^2}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial z \partial x^2} + \frac{\partial^3 F}{\partial z \partial y^2}\right)$$

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Уравнения Максвелла являются величайшим достижением науки XIX века. Они дали связь между электрическим и магнитным полями, а также между электрическими зарядами и токами.

Это система дифференциальных уравнений в частных производных. Тут входят: индукция магнитного поля $\vec{B}$ (Тл − тесла) **, напряженность магнитного поля** $\vec{H}\left(\frac{A}{м}\right)$,

электрическое смещение электрического поля $\vec{D}$ $\left(\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}\right)$, напряженность электрического поля $\vec{E}$ $\left(\frac{\text{В}}{\text{м}}\right)$, плотность электрического заряда ρ $\left(\frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}\right)$ – скалярная величина, вектор плотности электрического тока $\vec{j}$ $\left(\frac{\text{А}}{\text{м}^2}\right)$.

Для вакуума уравнения Максвелла имеют вид

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\vec{H} = -\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \;; \\ \mathrm{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \;; \\ \mathrm{div}\vec{B} = 0 \;; \\ \mathrm{div}\vec{E} = \rho. \end{cases}$$

Рассмотрим два последних уравнения Максвелла с точки зрения теоремы Остроградского-Гаусса.
Найдём, чему равен поток векторного поля через поверхность. Вообще-то под потоком вектора понимают количество этого поля, протекающего через поверхность.

РОТОР ВЕКТОРОГО ПОЛЯ

Следующая операция, связанная с оператором Гамильтона (набла-оператором) это векторное произведение этого оператора на векторное поле, т.е.

$$\left[\vec{\nabla},\vec{A}\right] = \mathrm{rot}\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right).$$

Эта операция называется ротором и она из одного векторного поля порождает другое векторное поле. Очень часто это второе векторное поле равно нулю. Если это происходит, то первое поле является потенциальным, т.е. существует некоторое скалярное поле, которое через градиент породило это первичное векторное поле. В символике это выглядит так (теорема)

$$\mathrm{rot}\vec{G}(\vec{r}) = 0 \iff \exists F(\vec{r}) : \vec{G}(\vec{r}) = \mathrm{grad}\, F(\vec{r}).$$

По русскому ротор называют еще и «вихрь», так как оно указывает на внешнюю структуру поля. Если ротор (вихрь) равен нулю, то поле безвихревое.
Вначале чисто математически докажем, что

$$\mathrm{rotgrad}\, F(\vec{r}) = 0.$$

Воспользуемся определением оператора Гамильтона

$$\left[\vec{\nabla}, \vec{G}\right] = \left[\vec{\nabla}, \vec{\nabla} F\right] = \left[\vec{\nabla}, \vec{\nabla}\right] F.$$

Мы видим, что в векторное произведение попали два одинаковых оператора. Из векторной алгебры мы знаем, что модуль векторного произведения двух векторов пропорционален $\sin\varphi$, где φ – угол между этими двумя векторами. Но, если перемножаемые вектора одинаковы, то

угол $\varphi = 0$ $\sin\varphi = 0$. Хотя в данной задаче вектора не настоящие, а векторные операторы, но на них это правило также распространяется.

Примеры.

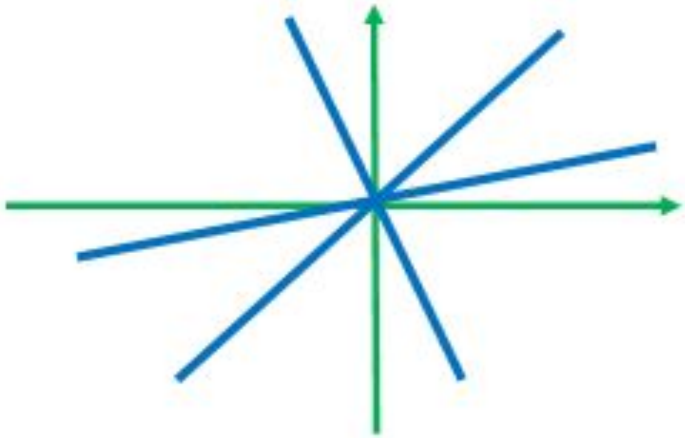
1. $\vec{r} = \vec{i}\,x + \vec{j}\,y + \vec{k}\,z$. Поле радиус-вектора обладает следующими линиями тока. Для примера возьмем плоский случай. Уравнения силовых линий в этом случае имеют вид

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}.$$

Решение этого дифференциального уравнения (с разделяющимися переменными) осуществляется очень просто. В точке удаленной от нуля, $\ln x + \ln k = \ln y$, т.е.

$$y = kx.$$

Это система прямых линий, проходящих через начало координат, т.е. никаких завихрений нет.



$$\left[\vec{\nabla}, \vec{r}\right] = \operatorname{rot} \vec{r} =$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right) = 0$$

Чисто визуально видно, что поле не вихревое, нет тут окружностей или эллипсов.

В качестве контрпримера найдем ротор поле скоростей водоворота (задача о бумажном кораблике). Поле скоростей воды описывалось функцией

$$\overrightarrow{v(x,y,z)} = -\vec{i}\,y + \vec{j}\,x.$$

$$\operatorname{rot}\vec{v} =$$

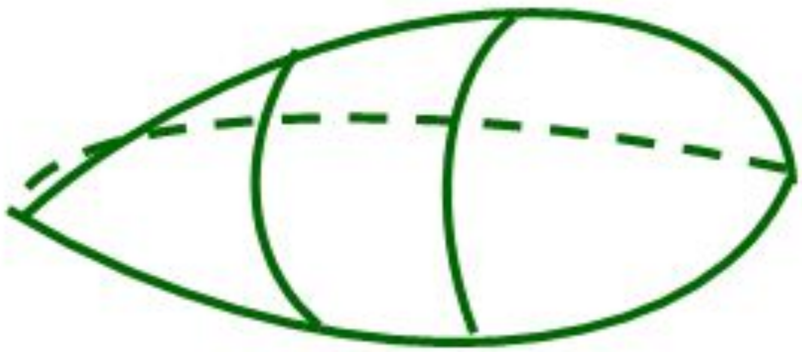
$$= \vec{i}\left(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial(-y)}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right) = 2\vec{k}.$$

Мы видим, что ротор не равен нулю, он направлен вдоль оси OZ. Это значит, что в силовых линиях (линиях тока) есть окружности в плоскости перпендикулярной оси OZ, т.е. в плоскости XOY. Так оно и есть на самом деле.

С помощью ротора по теореме Стокса вычисляются криволинейные интегралы по замкнутой линии. Напомним, эту теорему

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \iint_S (\mathrm{rot}\,\vec{B}, d\vec{\sigma}).$$

Читается эта формула так: циркуляция векторного поля по некоторой замкнутой линии равна величине поверхностного интеграла второго рода по поверхности, натянутой на этот контур.



Если поле $\vec{B} = \vec{F}$ это сила, то физический смысл криволинейного интеграла есть работа этой силы. Из формулы

Стокса вытекает следующее утверждение: Работа силы-потенциального векторного поля по замкнутому контуру всегда равна нулю.

Действительно, если векторное поле потенциально, то существует скалярное векторное поле (потенциал), которое через градиент породило это поле.

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U(x, y, z) = -\vec{\nabla}U.$$

Мы только что выше показали, что ротор градиента всегда равен нулю. Следовательно, правая часть формулы Стокса равна нулю и работа соответствующих сил по замкнутому контуру равна нулю.

$$\oint_L (\vec{B}, d\vec{l}) = \iint_S (\operatorname{rot}\vec{B}, d\vec{\sigma}) = 0.$$

Примеры.

Работа сил гравитационного поля по перенесению тел по замкнутому контуру всегда равна нулю, так как силы гравитационного поля есть потенциальное векторное поле.

Работа сил трения по перенесению тел по замкнутому контуру неравна нулю, так как силы трения, не потенциальное векторное поле.

Докажем, что

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} = 0.$$

Запишем это выражение через оператор Гамильтона

$$(\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{A}]) = 0.$$

Вспомним свойства смешанного произведения трех векторов

$$\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right)=\left(\vec{b},\left[\vec{c},\vec{a}\right]\right)=\left(\vec{c},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right).$$

Это значит, что в смешанном произведении трех векторов можно циклически переставлять вектора без изменения результата.

Для нашего случая получаем

$$\left(\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla},\vec{A}\right]\right)=\left(\vec{\nabla},\left[\vec{A},\vec{\nabla}\right]\right)=\left(\vec{A},\left[\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right]\right)=\left(\left[\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right],\vec{A}\right).$$

В последнем звене мы получили векторное произведение оператора Гамильтона самого на себя. Но это произведение всегда равно нулю. Исходное равенство доказано.

Далее рассмотрим сочетание $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}$**. Запишем его в символике** $\left[\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla},\vec{A}\right]\right]$**. Это так называемое двойное век-**

торное произведение. В теории векторного анализа доказывается следующая формула

$$\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right] = \vec{b}\left(\vec{a},\vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a},\vec{b}\right).$$

Для того, чтобы запомнить это правило существует такая мнемоническая фраза

«БАЦ минус ЦАП».

Применим правило «бац минус цап» к двойному ротору от векторной функции

$$\left[\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla},\vec{A}\right]\right] = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla},\vec{A}\right) - \left(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\right)\vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{A}} - \Delta\vec{A}$$

Тут мы использовали оператор Лапласа, который был введен ранее

Теперь обратимся к новому понятию –

соленоидальное векторное поле $\vec{A}$.

Это поле $\vec{A}$ удовлетворяет по определению такому равенству

$$\oiint_{\partial G} \left(\vec{A}, d\vec{\sigma}\right) = 0.$$

Что это равенство означает физически? Математически оно звучит так: поток векторного поля через заданную поверхность равен нулю. С точки зрения физики это выглядит так. Сколько силовых линий (линий тока) вошло в эту область, столько же их и вышло. С бытовой, экспериментальной точки зрения, это равенство звучит так, сколько воды попало в квартиру от соседа сверху, столько же этой воды вылилось к нижнему соседу. Общий поток воды с плюсами и с минусами через замкнутую поверхность равен нулю.

То же самое происходит с человеком при принятии пищи.

Вначале выясним условия, при которых векторное поле является соленоидальным.

Вспомним теорему **Остроградского-Гаусса**.

Если векторное поле $\overrightarrow{A}$ непрерывно дифференцируемо в области **G**, то поток этого поля через поверхность, ограничивающую эту область ∂G интегралу от скалярной функции **div** $\overrightarrow{A}$ по объему этой области

$$\oiint_{\partial G}(\overrightarrow{A}, d\overrightarrow{\sigma}) = \iiint_{G} \mathrm{div}\overrightarrow{A}\, dV.$$

Итак, для того, чтобы непрерывно дифференцируемое поле было соленоидальным необходимо и достаточно равенство нулю его дивергенции

$$\mathrm{div}\vec{\mathrm{A}} = 0.$$

Если поле $\vec{\mathrm{A}}$ само произошло от некоторого другого векторного поля $\vec{\mathrm{B}}$, т.е.

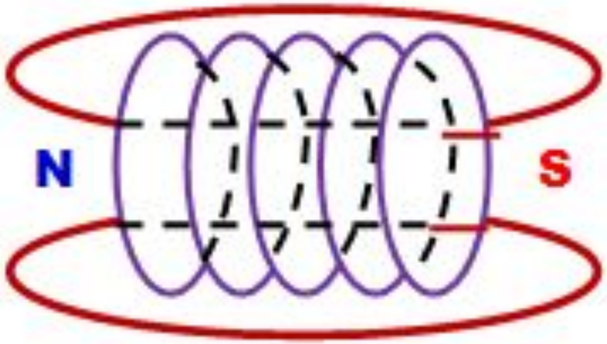
$$\vec{\mathrm{A}} = \mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{B}},$$

Но, как ранее было доказано,

$$\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{A}} = \mathrm{div\,rot}\,\vec{\mathrm{B}} = 0.$$

Итак, мы делаем следующий вывод. Если векторное поле произошло из другого векторного поля посредством воздействия на него операции ротор, то такое поле является соленоидальным.

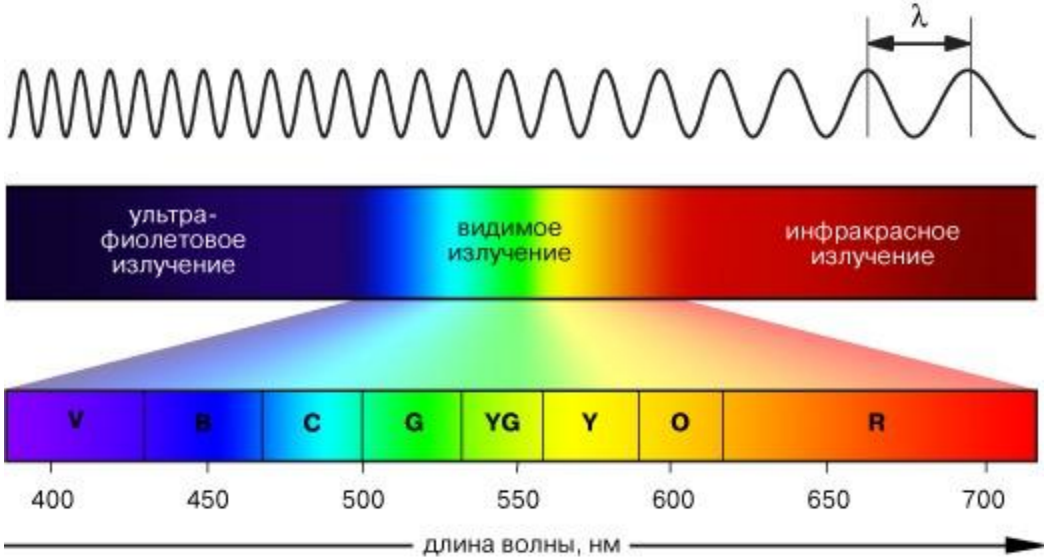
Далее разберемся, почему такое поле называется соленоидальным? Исторически это название произошло из экспериментов с катушкой (соленоидом), по которой проходит электрический ток.

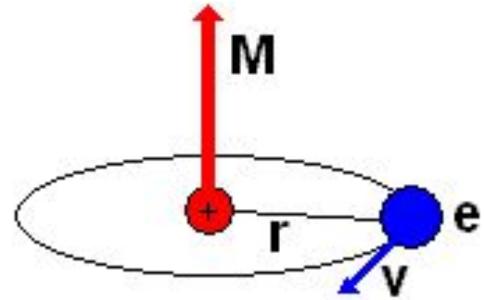


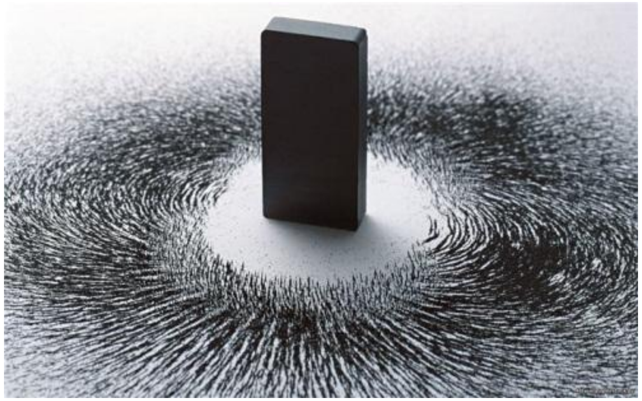
Ток – это синие линии, а красные линии, это силовые линии магнитного поля. Они выходят из южного полюса S и входят в северный полюс N . При этом силовые линии магнитного поля замкнуты. Потому для любой замкнутой области имеет место одинаковое число входящих и выходящих линий, что и дает суммарный поток магнитного поля равным нулю. Отсюда видно, что магнитное поле соленоидально. В уравнениях Максвелла

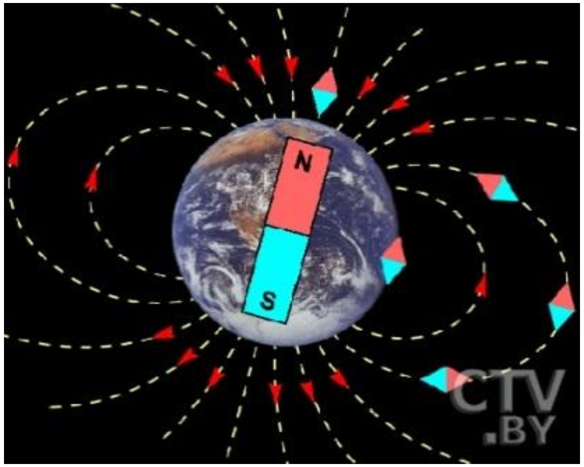
$$\mathrm{div}\vec{B} = 0.$$

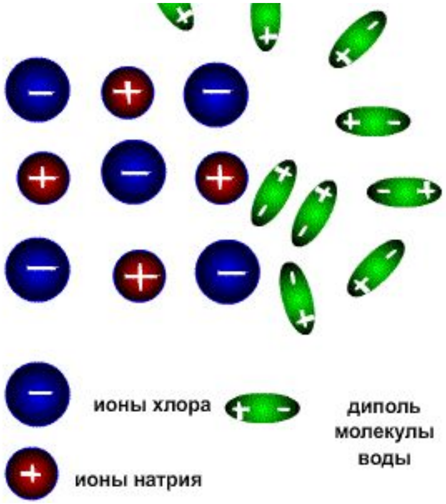
С физической точки зрения это означает, что свободным магнитных зарядов нет, или, что свободные магнитные заряды – монополи – не обнаружены экспериментально. А какие же магнитные заряды есть? Магнитные заряды существуют в виде пары связанных положительного и отрицательного магнитного заряда. Это магнитный диполь.

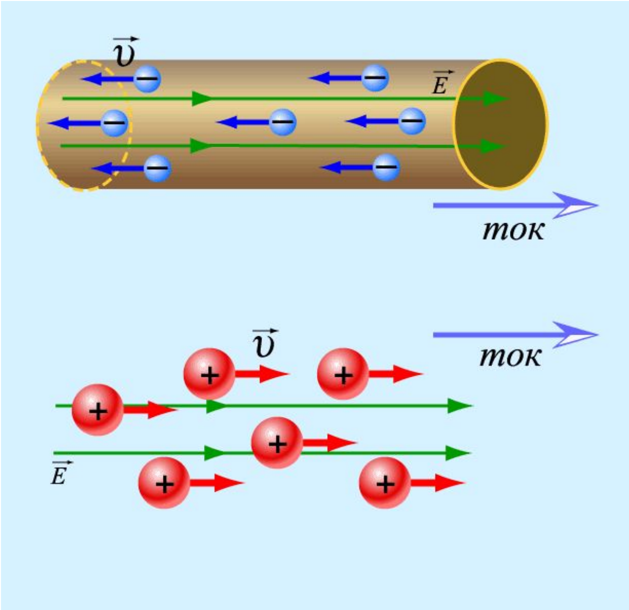

λ
ультра-
фиолетовое
излучение
видимое
излучение
инфракрасное
излучение
V
B
C
G
YG
Y
O
R
400
450
500
550
600
650
700
длина волны, нм


M
+
r
e
V

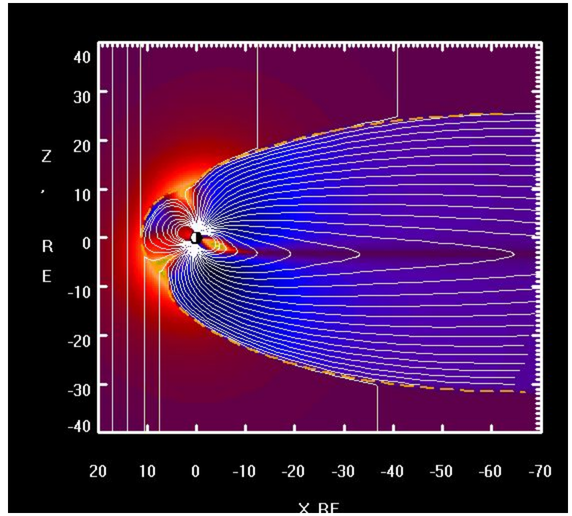



N
S
CTV
.BY

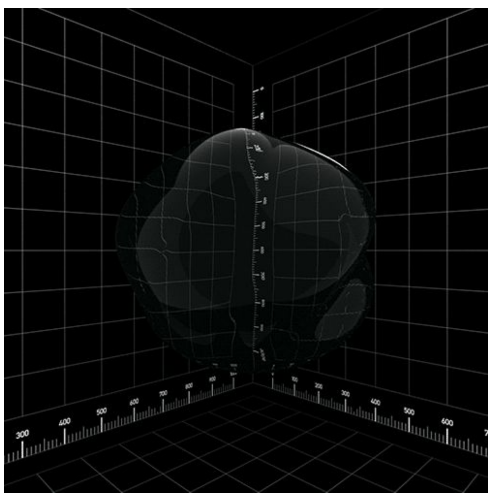

ионы хлора
диполь
молекулы
воды
ионы натрия

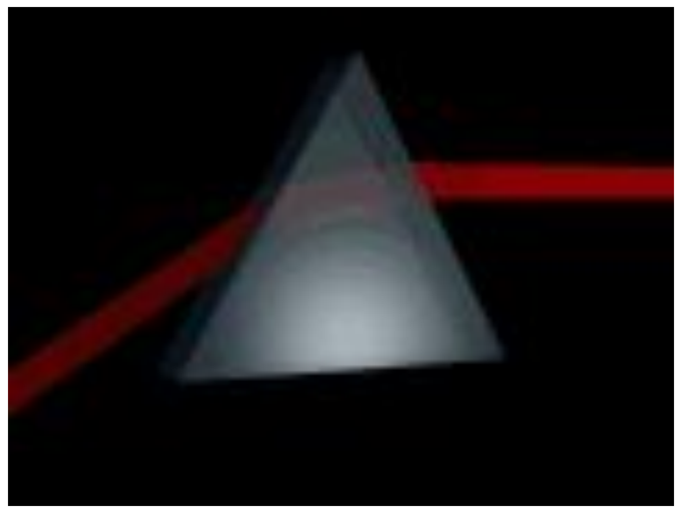


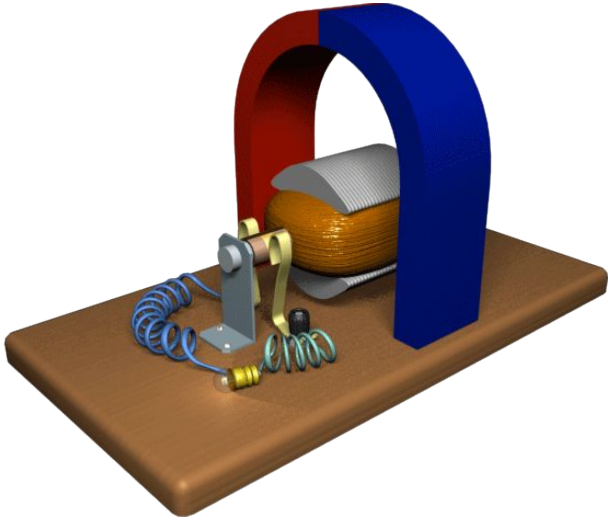
$\vec{\upsilon}$
$\vec{E}$
ток
$\vec{\upsilon}$
ток
$\vec{E}$

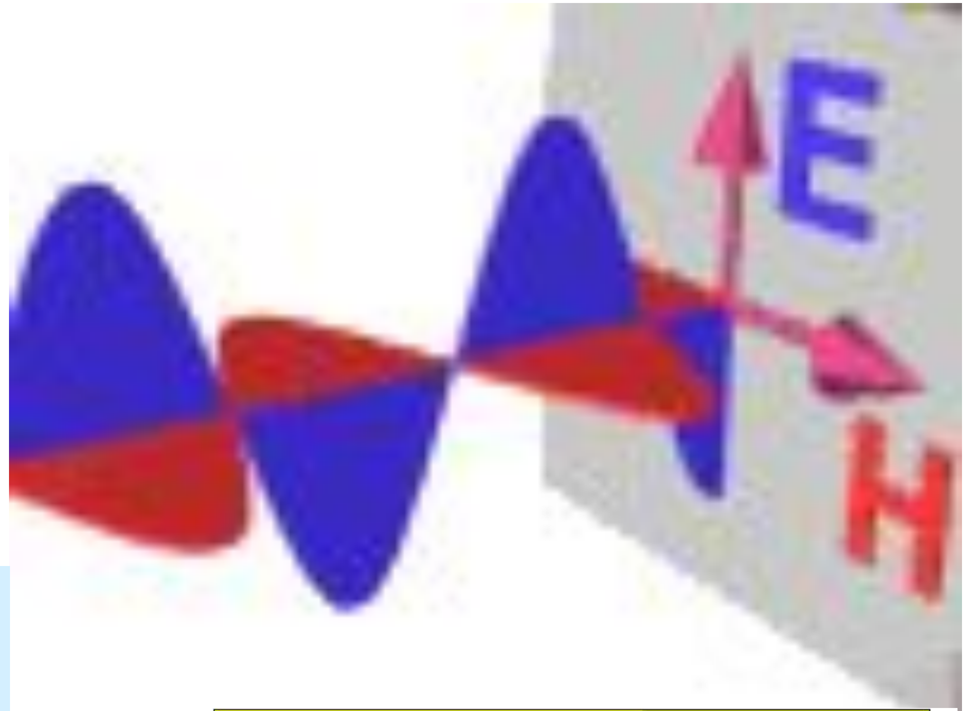


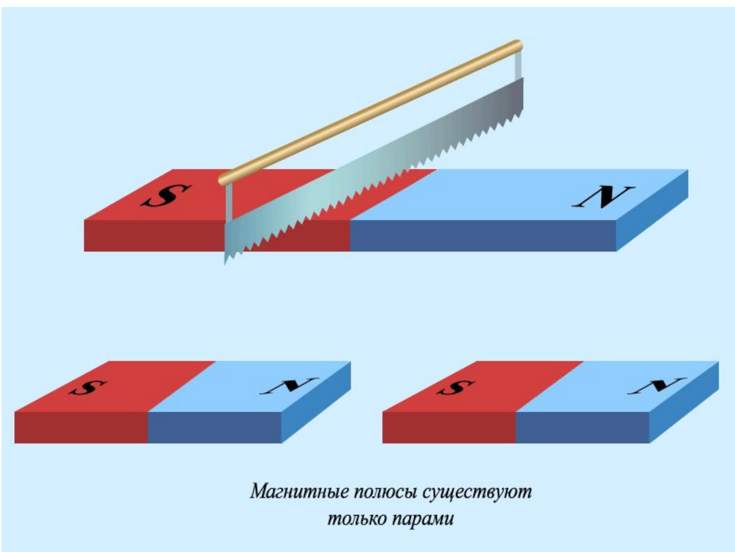
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
Z, RE
20 10 0 -10 -20 -30 -40 -50 -60 -70
X RE

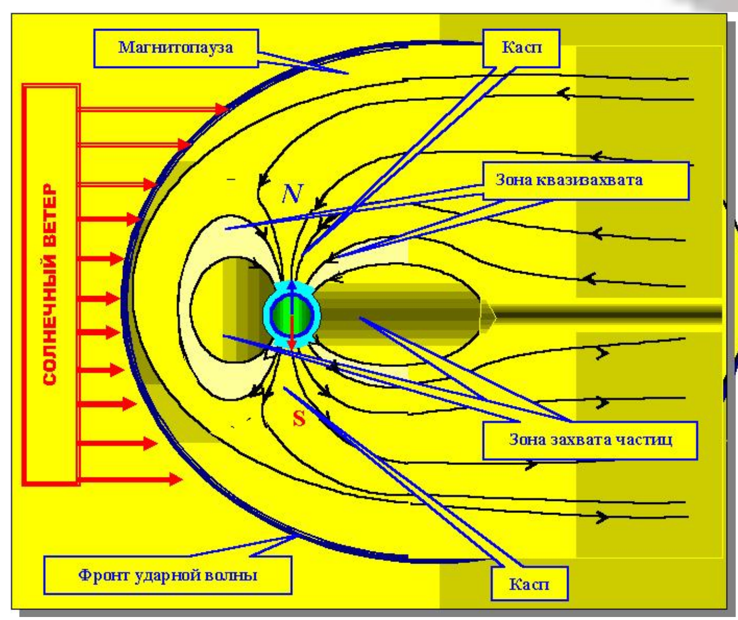







E
H


S
N
S
N
S
N
Магнитные полюсы существуют
только парами


Магнитопауза
Касп
Зона квазизахвата
N
СОЛНЕЧНЫЙ ВЕТЕР
S
Зона захвата частиц
Фронт ударной волны
Касп

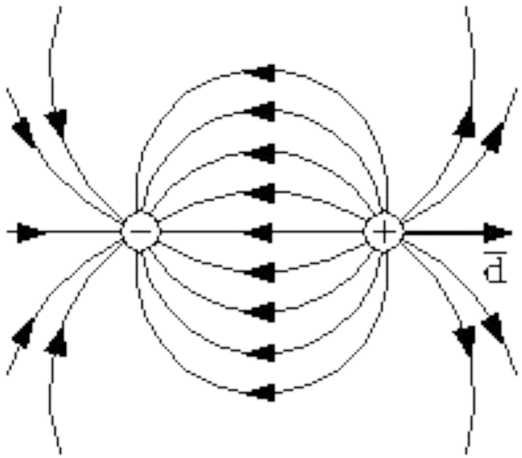
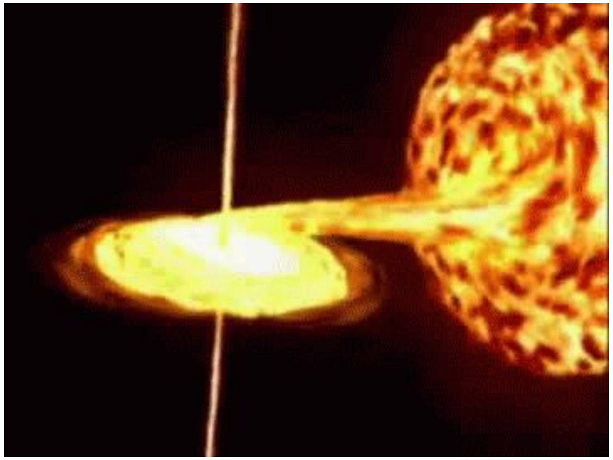
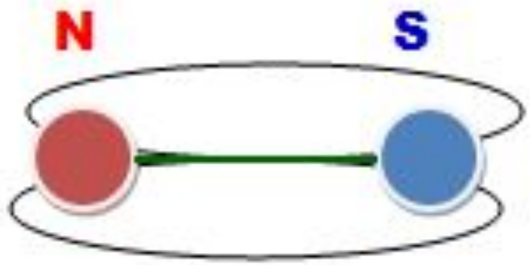


Рис. 1.4





Итак, если векторное поле потенциально, то его ротор равен нулю, это поле еще называют безвихревым. Если же дивергенция поля равно нулю, то это поле соленоидально.
Могут ли быть другие векторные поля. Могут быть. Например, силовое поле трения не потенциальное и не соленоидалое. Оно существует само по себе.
Если векторное поле одновременно и потенциальное и соленоидальное , т.е.

$$\operatorname{div} \overrightarrow{A} = 0. \qquad \operatorname{rot} \overrightarrow{A} = 0.$$

то у такого поля обязательно есть скалярный родитель потенциал F . Из условия $\mathrm{rot}\,\overrightarrow{\mathrm{A}} = 0$ следует, что

$$\overrightarrow{\mathrm{A}} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{F},$$

поскольку ротор градиента всегда ноль (векторное произведение двух параллельных операторов Гамильтона). Но тогда значит, и

$$\mathrm{div}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{F} = 0.$$

А дивергенция градиента есть оператор Лапласа, т.е.

$$\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial z^2} = 0.$$

Мы получаем следующий результат: если векторное поле одновременно и потенциальное и соленоидальное, то

оно порождается скалярным полем F(x,y,z), которое находится из уравнения Лапласа.

$\overline{F}$	$(\vec{\nabla}, \vec{F})$	$[\vec{\nabla}, \vec{F}]$	$(\vec{G}\cdot\vec{\nabla})\vec{F}$	$\Delta\vec{F}$	$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}, \vec{F})$
$\vec{r}$	3	0	0	0	0
$[\vec{a}, \vec{r}]$	0	$2\vec{a}$	$[\overline{\mathrm{a}}, \overline{G}]$	0	0
$\vec{a}\cdot r^n$	$nr^{n-1}(\vec{\mathrm{r}}, \vec{a})$	$nr^{n-2}[\vec{\mathrm{r}}, \vec{a}]$	$nr^{n-2}(\vec{\mathrm{r}}, \vec{G})$ $\overline{a},$	$n(n+1)r^{n-2}$ $\vec{a}$	

Пример 2

Дано векторное поле $\vec{a} = xy^2\vec{i} + yz^3\vec{j} + zx^4\vec{k}$. Вычислить $\mathrm{div}\vec{a}$, $\mathrm{rot}\vec{a}$ в точке (2; -1; 5). Проверить потенциальность и соленоидальность данного поля.

Решение. Согласно известным формулам,

$$\mathrm{div}\vec{a} = \frac{\partial(xy^2)}{\partial x} + \frac{\partial(yz^3)}{\partial y} + \frac{\partial(zx^4)}{\partial z} = y^2 + z^3 + x^4; \qquad \mathrm{div}\vec{a}(2;-1;5) = (-1)^2 + 5^3 + 2^4 = 142;$$

$$\mathrm{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & yz^3 & zx^4 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(zx^4)}{\partial y} - \frac{\partial(yz^3)}{\partial z} \right)\cdot\vec{i} - \left(\frac{\partial(zx^4)}{\partial x} - \frac{\partial(xy^2)}{\partial z} \right)\cdot\vec{j} + \left(\frac{\partial(yz^3)}{\partial x} - \frac{\partial(xy^2)}{\partial y} \right)\cdot\vec{k} =$$

$$= -3yz^2\vec{i} - 4zx^3\vec{j} - 2xy\vec{k}; \qquad \mathrm{rot}\vec{a}(2;-1;5) = -3\cdot(-1)\cdot 5^2\cdot\vec{i} - 4\cdot 5\cdot 2^3\cdot\vec{j} - 2\cdot 2\cdot(-1)\cdot\vec{k} = 75\vec{i} - 160\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Векторное поле не потенциально ($\mathrm{rot}\vec{a} \neq \overline{0}$) и не соленоидально ($\mathrm{div}\vec{a} \neq 0$).

Если векторное поле одновременно и потенциальное и соленоидальное, т.е. $rot\,\vec{A} = 0, div\vec{A} = 0$, то такое поле называется лапласовым или гармоническим.

Рассмотрим, например поле $\vec{A} = \overrightarrow{grad} \ln r$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Поскольку поле $\vec{A}$ произошло через градиент от скалярной функции $u = ln\, r$, то уже сразу видим, что это поле потенциальное. Далее возьмем

$$div\vec{A} = div\overrightarrow{grad} \ln r = \Delta \ln r = \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ln r}{\partial y^2}.$$

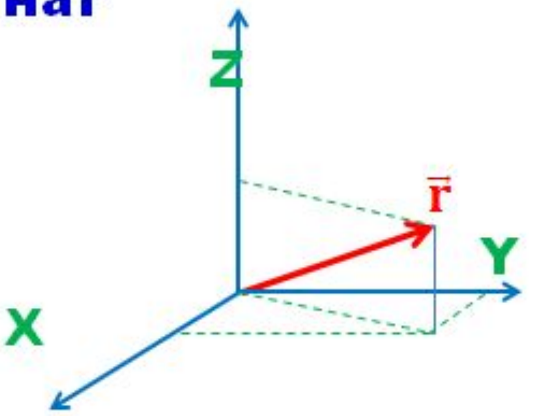
$$\frac{\partial \ln r}{\partial x} = \frac{1}{r} \cdot \frac{x}{r} = \frac{x}{r^2};\ \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} = \frac{r^2 - x2r\frac{x}{r}}{r^4} = \frac{r^2 - 2x^2}{r^4}.\ \frac{\partial^2 \ln r}{\partial y^2} = \frac{r^2 - 2y^2}{r^4}.$$

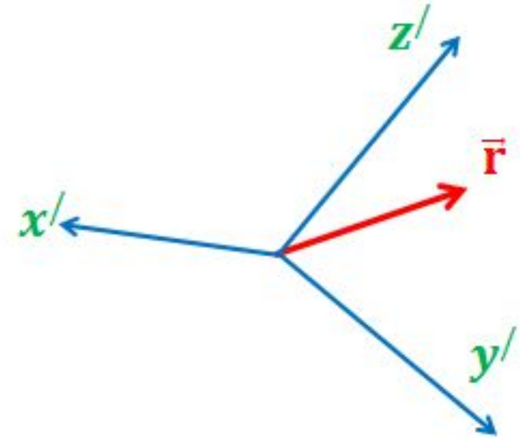
$$\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ln r}{\partial y^2} = \frac{2r^2 - 2\left(x^2 + y^2\right)}{r^4} = 0.$$

ИНВАРИАНТНОСТЬ ОПЕРАТОРА НАБЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Если мы имеем заданную систему координат, т. е декартову прямоугольную систему с осями OX, OY, OZ, то конкретный вектор в этой системе координат характеризуется своими тремя проекциями $\{a; b; c\}$ на оси координат

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$





Если мы как-нибудь повернём систему координат вокруг неподвижного начала координат, то оси изменят свое положение в пространстве, а сам вектор $\vec{\mathrm{r}}$ останется на месте. В результате его проекции на оси координат изменятся. Преобразование системы координат при повороте осей описывается матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

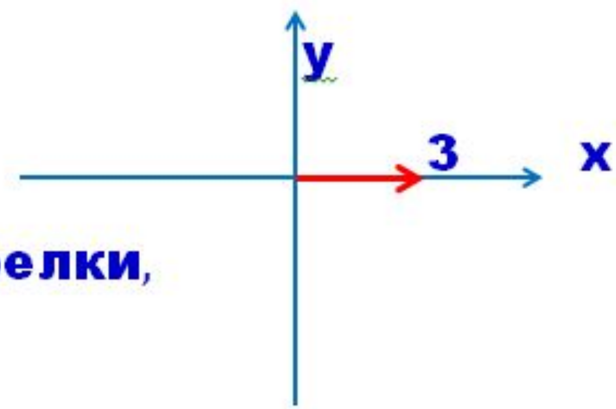
Детерминант этой матрицы не равен нулю, следовательно, имеется обратная матрица $A^{-1} = A^{\text{т}}$. Это значит, что обратная матрица есть транспонированная исходная матрица. В линейной алгебре доказывается, что при ортогональном преобразовании это имеет место.
Итак, обратная матрица имеет вид

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x^{/} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y^{/} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ z^{/} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a_{11}x^{/} + a_{21}y^{/} + a_{31}z^{/} \\ y = a_{12}x^{/} + a_{21}y^{/} + a_{32}z^{/} \\ z = a_{13}x^{/} + a_{23}y^{/} + a_{33}z^{/} \end{cases}$$

Пример на плоскости

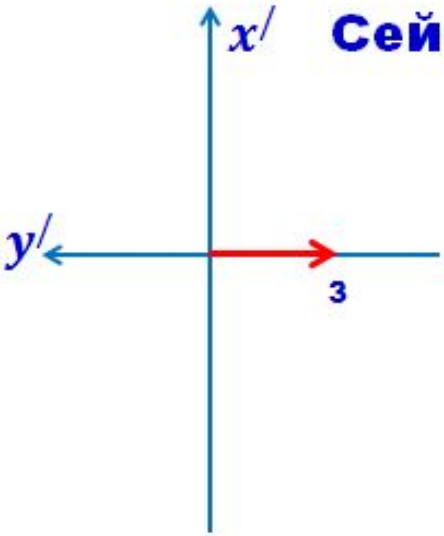


$$\begin{cases} x^{/} = (\cos\alpha)\mathrm{x} + (\sin\alpha)\mathrm{y} \\ y^{/} = -(\sin\alpha)\mathrm{x} + (\cos\alpha)\mathrm{y} \end{cases}$$

Угол α **– поворот против часовой стрелки,**

Если $\alpha = 0$ **, то** $x^{/} = x \quad y^{/} = y$

Пусть вектор $\vec{r} = (3, 0)$, т. е. x = 3, y = 0.



Сейчас вектор $\vec{r} = (0, -3)$, т. е. $x^{/}$ = 0, $y^{/}$ = - 3

$$\begin{cases} x^{/} = (\cos\frac{\pi}{2})x + (\sin\frac{\pi}{2})y = y = 0 \\ y^{/} = -(\sin\frac{\pi}{2})x + (\cos\frac{\pi}{2})y = -x = -3 \end{cases}$$

Итак, матрица преобразования на плоскости имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Если мы их перемножим, то должны получить единичную матрицу

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos^2\alpha + sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\sin\alpha \\ -\cos\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\sin\alpha & \cos^2\alpha + sin^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Так оно и есть.

При переходе к новой системе координат оператор набла преобразуется по закону дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x^{/}}\frac{\partial x^{/}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y^{/}}\frac{\partial y^{/}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z^{/}}\frac{\partial z^{/}}{\partial x} = a_{11}\frac{\partial}{\partial x^{/}} + a_{21}\frac{\partial}{\partial y^{/}} + a_{31}\frac{\partial}{\partial z^{/}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x^{/}}\frac{\partial x^{/}}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y^{/}}\frac{\partial y^{/}}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z^{/}}\frac{\partial z^{/}}{\partial y}=a_{12}\frac{\partial}{\partial x^{/}}+a_{22}\frac{\partial}{\partial y^{/}}+a_{32}\frac{\partial}{\partial z^{/}}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x^{/}}\frac{\partial x^{/}}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial y^{/}}\frac{\partial y^{/}}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z^{/}}\frac{\partial z^{/}}{\partial z}=a_{13}\frac{\partial}{\partial x^{/}}+a_{23}\frac{\partial}{\partial y^{/}}+a_{33}\frac{\partial}{\partial z^{/}}$$

Дифференцирование векторной функции по направлению

Ранее мы рассмотрели формулу дифференцирования скалярной функции по направлению и убедились, что это скалярная величина и он меньше или равна модуля градиента функции. Это значит, что по направлению градиента происходит наибольшее спадание или возрастание поля и именно по этому направлению происходят физические процессы: перемещение тепла, движение-

электричекого заряда в электрическом поле, диффузия в жидкостях и другие процессы.

Сейчас рассмотрим, как брать производную от векторной функции по направлению.

Итак, дано векторное поле

$$\vec{a}(x,y,z) = a_x(x,y,z)\vec{i} + a_y(x,y,z)\vec{j} + a_z(x,y,z)\vec{k}$$

Пусть в пространстве дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ **и орт** $\vec{e} = (\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma)$. **Проведем через точку** M_0 **прямую линию в направлении орта** $\vec{e}$

$$x = x_0 + t\cos\alpha;\ y = y_0 + t\cos\beta;\ z = z_0 + t\cos\gamma;$$

Прямая линия задана параметрически и параметр $-\infty < t < +\infty$. **После этой подготовки можно переходить и производной по направлению**

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial\vec{e}} = \frac{d}{dt}\vec{a}(x_0 + t\,cos\alpha, y_0 + t\,cos\beta, y_0 + t\,cos\beta)$$

По правилу дифференцирования сложной функции, не записывая значения аргумента, получаем

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial\vec{e}} = \frac{\partial\vec{a}}{\partial x}cos\alpha + \frac{\partial\vec{a}}{\partial y}cos\beta + \frac{\partial\vec{a}}{\partial z}cos\gamma$$

Это и есть производная по направлению от векторной функции. Ее можно переписать так

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial\vec{e}} = (\vec{e},\vec{\nabla})\vec{a}$$

Пример. Пусть поле

$$\vec{a}(x,y,z) = x^2y\vec{i} + y^2z\vec{j} + x^2z\vec{k}$$

$$\vec{e} = (\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}})$$

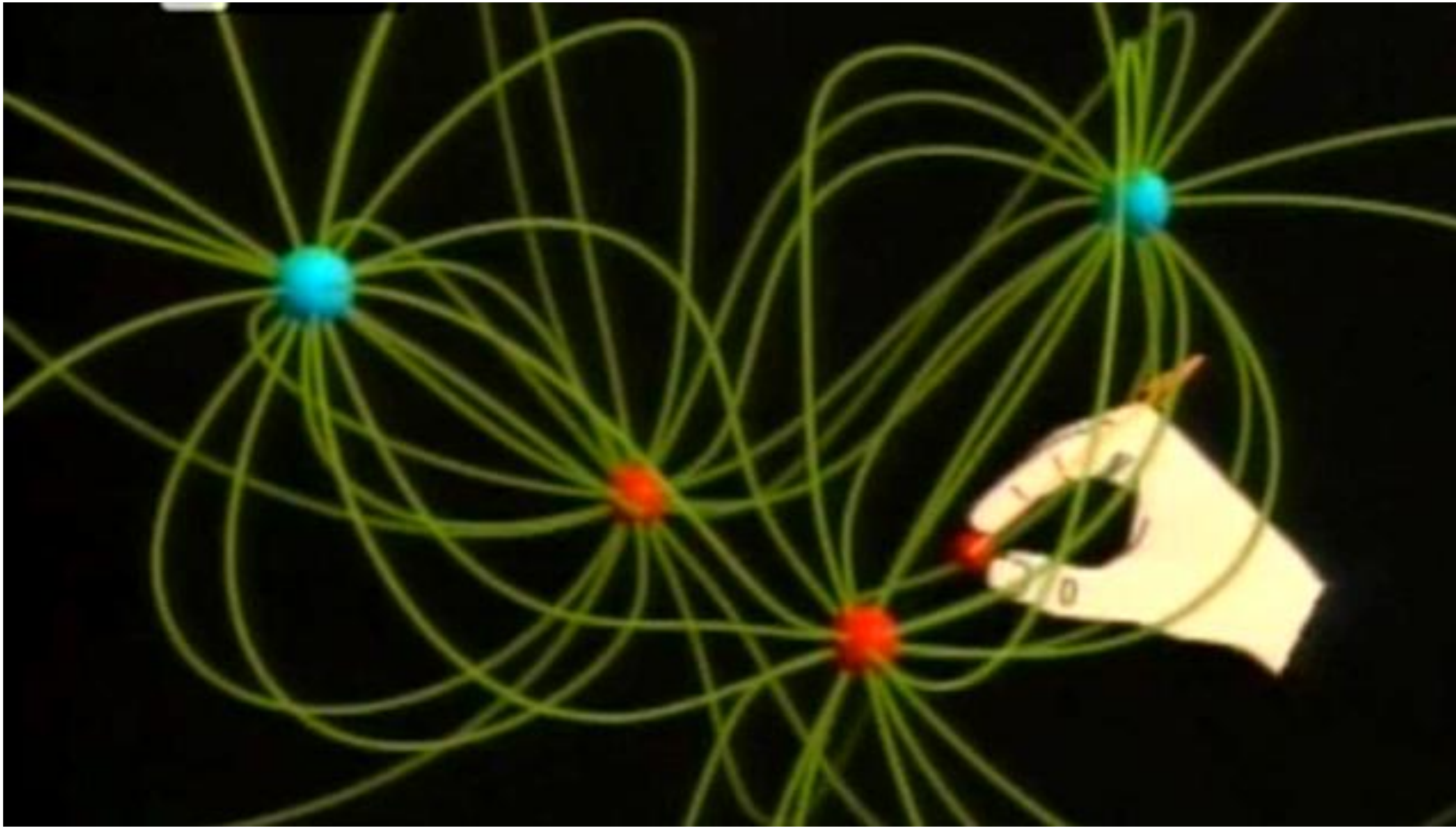
$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{e}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{(2xy + x^2)\vec{i} + (2zy + y^2)\vec{j} + (x^2 + 2xz)\vec{k}\right\}.$$

Это есть векторная величина и она показывает изменение векторного поля в заданном направлении.

Вводится также градиент векторного поля. Он получается из производной по направлению, если в ней убрать направляющие косинусы.

$$(\overrightarrow{b,\nabla})\vec{a} = b_x\frac{\partial \vec{a}}{\partial x} + b_y\frac{\partial \vec{a}}{\partial y} + b_z\frac{\partial \vec{a}}{\partial x}$$

Эта конструкция называется градиентом векторного поля по направлению вектора $\vec{b}$.



Скалярное поле задано функцией $U(x,y,z)=z/(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$. Найти уравнения поверхностей уровня. Какая из этих поверхностей проходит через точку A(2;0;-2/$\sqrt{3}$)?

Решение. По формуле (2.1.1), уравнения поверхностей уровня:

$$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=C.$$

Если поверхность проходит через точку A, то

$$C=\frac{-2/\sqrt{3}}{\sqrt{2^2+0^2+(-2/\sqrt{3})^2}}=-\frac{1}{2},$$

так что ее уравнение имеет вид:

$$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=3z^2\\ z<0\end{cases}.$$

Это поверхность прямого кругового конуса, точнее, одна из ее двух полостей.

Дано векторное поле $\vec{a} = xy^2\vec{i} + yz^3\vec{j} + zx^4\vec{k}$. Вычислить $\operatorname{div}\vec{a}$, $\operatorname{rot}\vec{a}$ в точке (2; -1; 5). Проверить потенциальность и соленоидальность данного поля.

Решение. Согласно известным формулам,

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial(xy^2)}{\partial x} + \frac{\partial(yz^3)}{\partial y} + \frac{\partial(zx^4)}{\partial z} = y^2 + z^3 + x^4; \quad \operatorname{div}\vec{a}(2;-1;5) = (-1)^2 + 5^3 + 2^4 = 142;$$

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & yz^3 & zx^4 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(zx^4)}{\partial y} - \frac{\partial(yz^3)}{\partial z} \right)\cdot\vec{i} - \left(\frac{\partial(zx^4)}{\partial x} - \frac{\partial(xy^2)}{\partial z} \right)\cdot\vec{j} + \left(\frac{\partial(yz^3)}{\partial x} - \frac{\partial(xy^2)}{\partial y} \right)\cdot\vec{k} =$$

$$= -3yz^2\vec{i} - 4zx^3\vec{j} - 2xy\vec{k}; \quad \operatorname{rot}\vec{a}(2;-1;5) = -3\cdot(-1)\cdot 5^2\cdot\vec{i} - 4\cdot 5\cdot 2^3\cdot\vec{j} - 2\cdot 2\cdot(-1)\cdot\vec{k} = 75\vec{i} - 160\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Векторное поле не потенциально ($\operatorname{rot}\vec{a} \neq \overline{0}$) и не соленоидально ($\operatorname{div}\vec{a} \neq 0$).

Вычислить работу силового поля $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ вдоль дуги винтовой линии $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, $z=bt$, $0 \le t \le 2\pi$.

<u>Решение</u>. Работа поля определяется интегралом

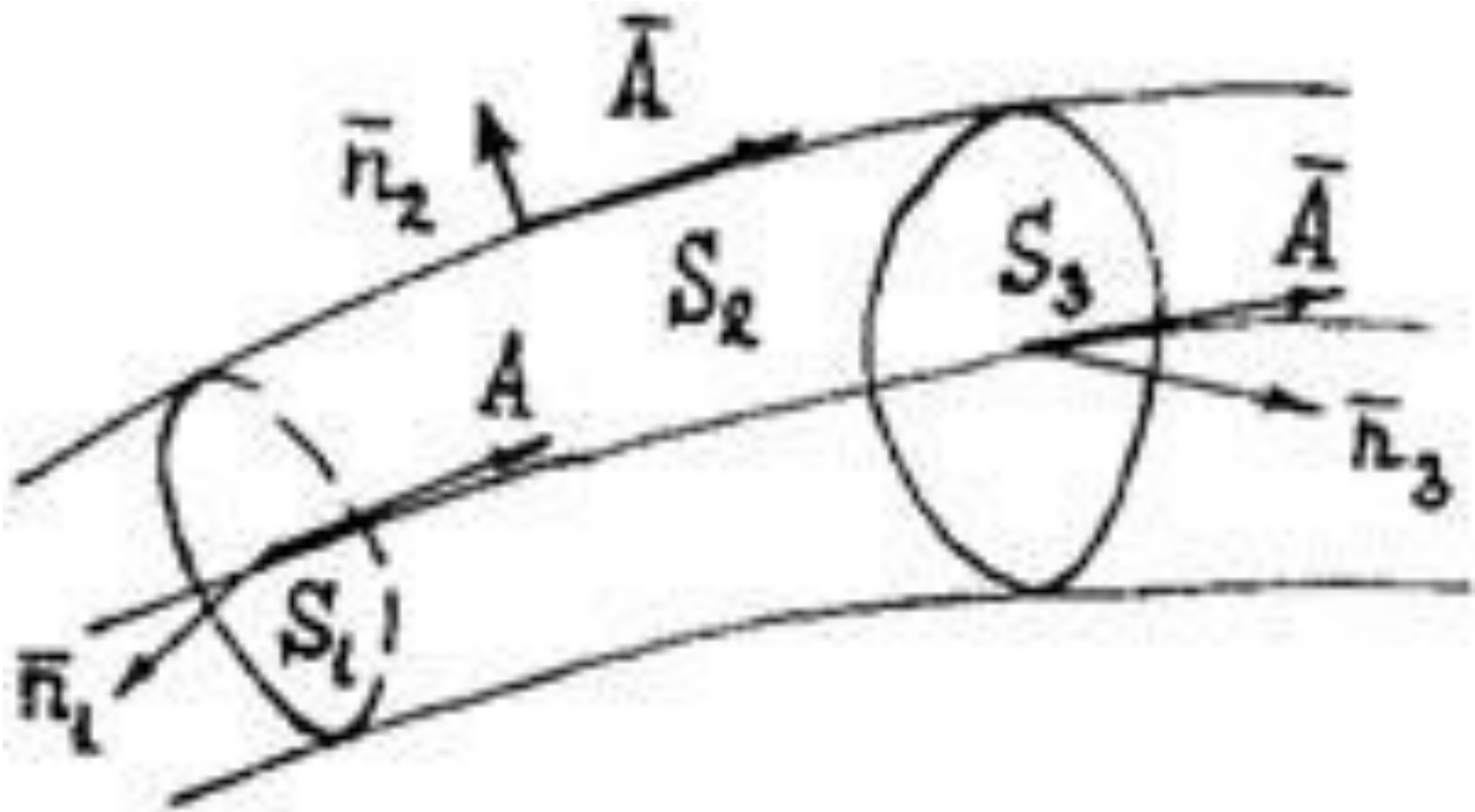
$$A = \int_L \vec{a} d\vec{l} = \int_\alpha^\beta \left(a_x \cdot \frac{dx}{dt} + a_y \cdot \frac{dy}{dt} + a_z \cdot \frac{dx}{dt} \right) dt,$$

где L – дуга, по которой перемешается материальная точка, нижний и верхний пределы интегрирования – соответственно начальное и конечное значения параметра t. Координаты a_x, a_y, a_z вектора $\vec{a}$ вычисляют в точках дуги L.

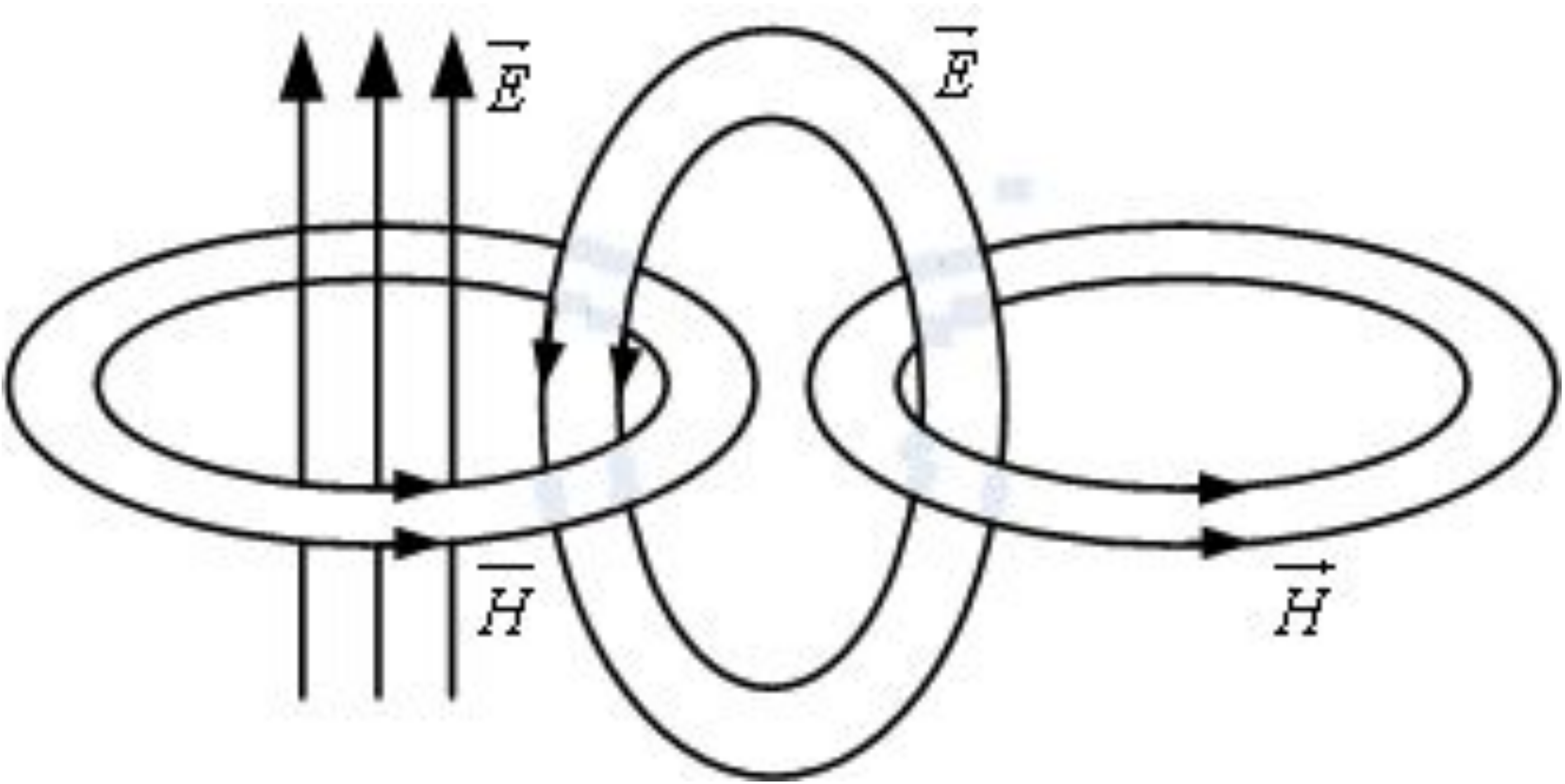
Здесь

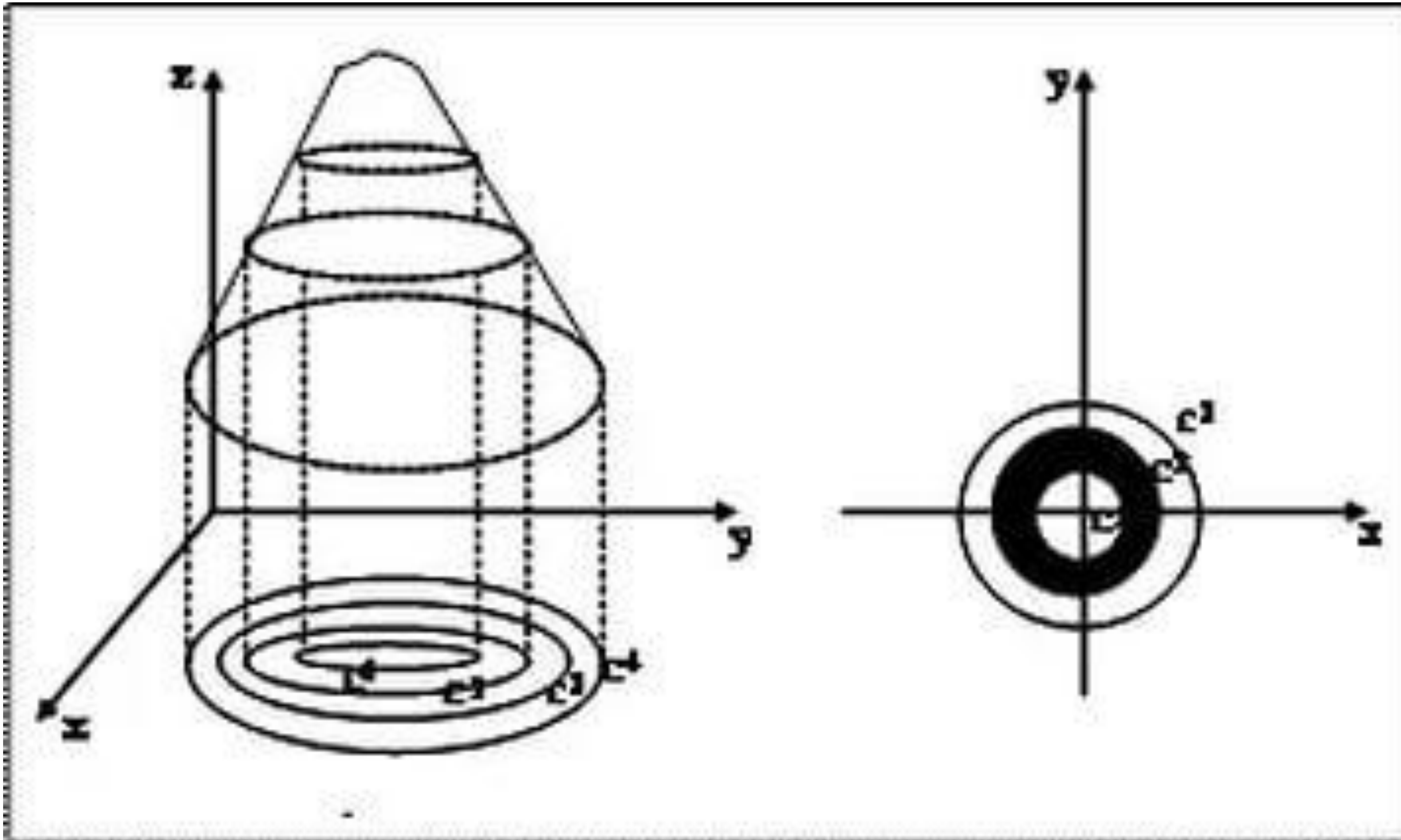
$$a_x = x = R\cos t,\ \ a_y = y = R\sin t,\ \ a_z = z = bt; \quad \frac{dx}{dt} = -R\sin t,\ \ \frac{dy}{dt} = R\cos t,\ \ \frac{dz}{dt} = b;$$

$$A = \int_0^{2\pi} (R\cos t \cdot (-R\sin t) + R\sin t \cdot R\cos t \cdot + bt \cdot b))dt = \int_0^{2\pi} b^2 t dt = b^2 t^2 / 2 \Big|_0^{2\pi} = 2\pi^2 b^2.$$

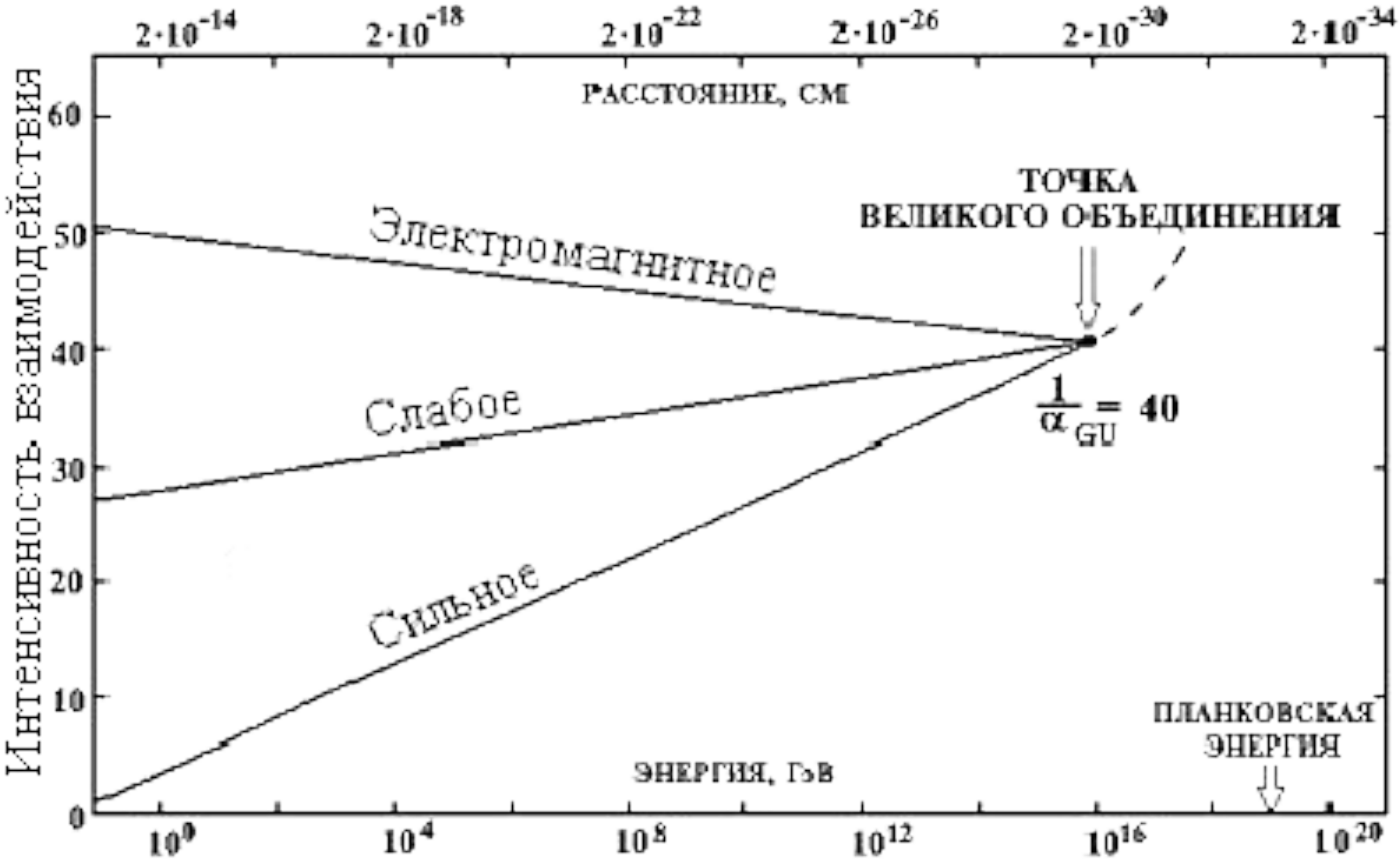


$\bar{A}$
$\bar{n}_2$
S_2
S_3
$\bar{A}$
A
$\bar{n}_3$
S_1
$\bar{n}_1$

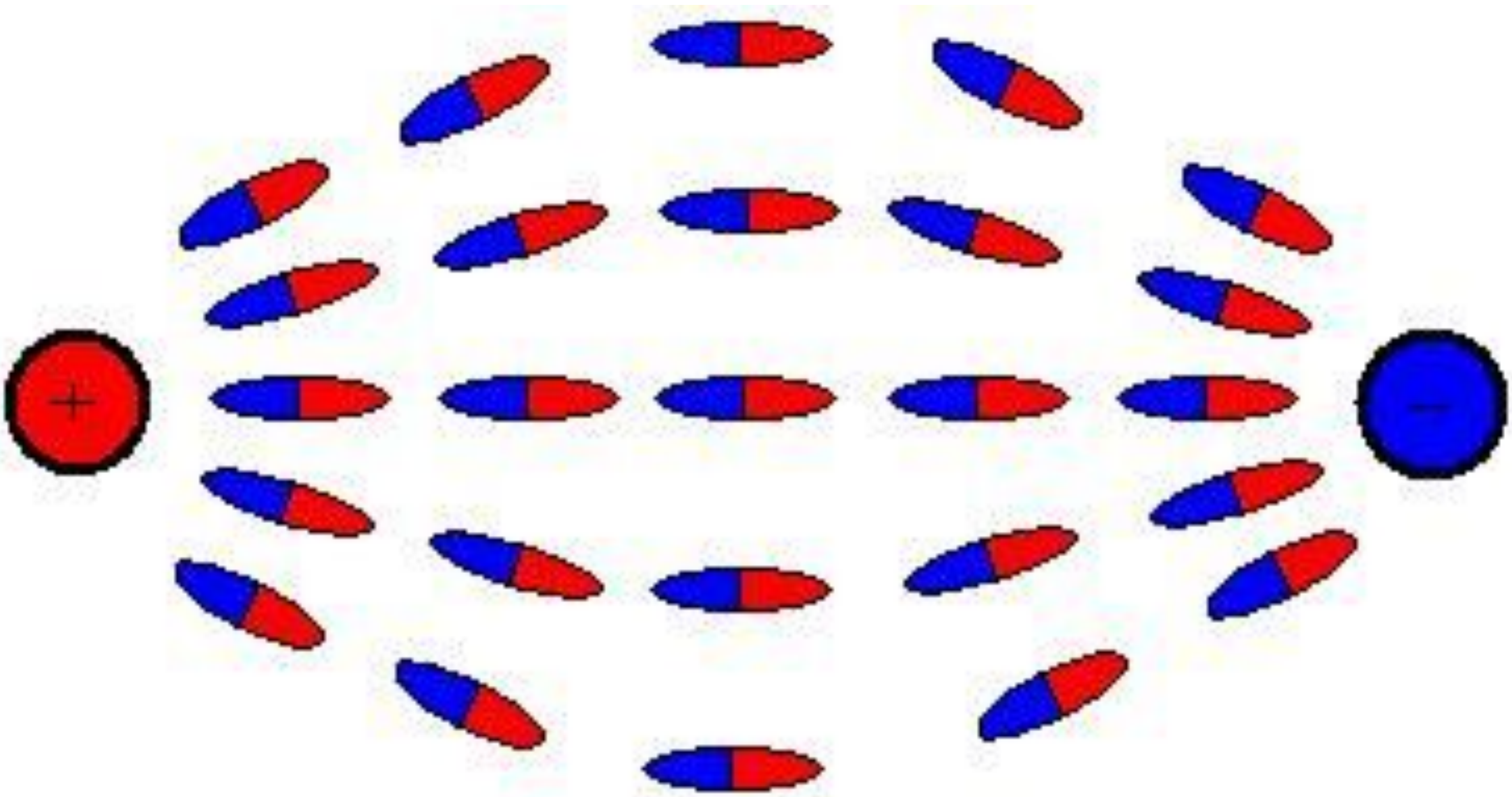

$\vec{E}$
$\vec{E}$
$\vec{H}$
$\vec{H}$



z
y
x
y
x



$2\cdot10^{-14}$
$2\cdot10^{-18}$
$2\cdot10^{-22}$
$2\cdot10^{-26}$
$2\cdot10^{-30}$
$2\cdot10^{-34}$
РАССТОЯНИЕ, СМ
Интенсивность взаимодействия
60
50
40
30
20
10
0
ТОЧКА
ВЕЛИКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ
Электромагнитное
Слабое
Сильное
$\frac{1}{\alpha_{GU}} = 40$
ПЛАНКОВСКАЯ
ЭНЕРГИЯ
ЭНЕРГИЯ, ГэВ
10^{0}
10^{4}
10^{8}
10^{12}
10^{16}
10^{20}



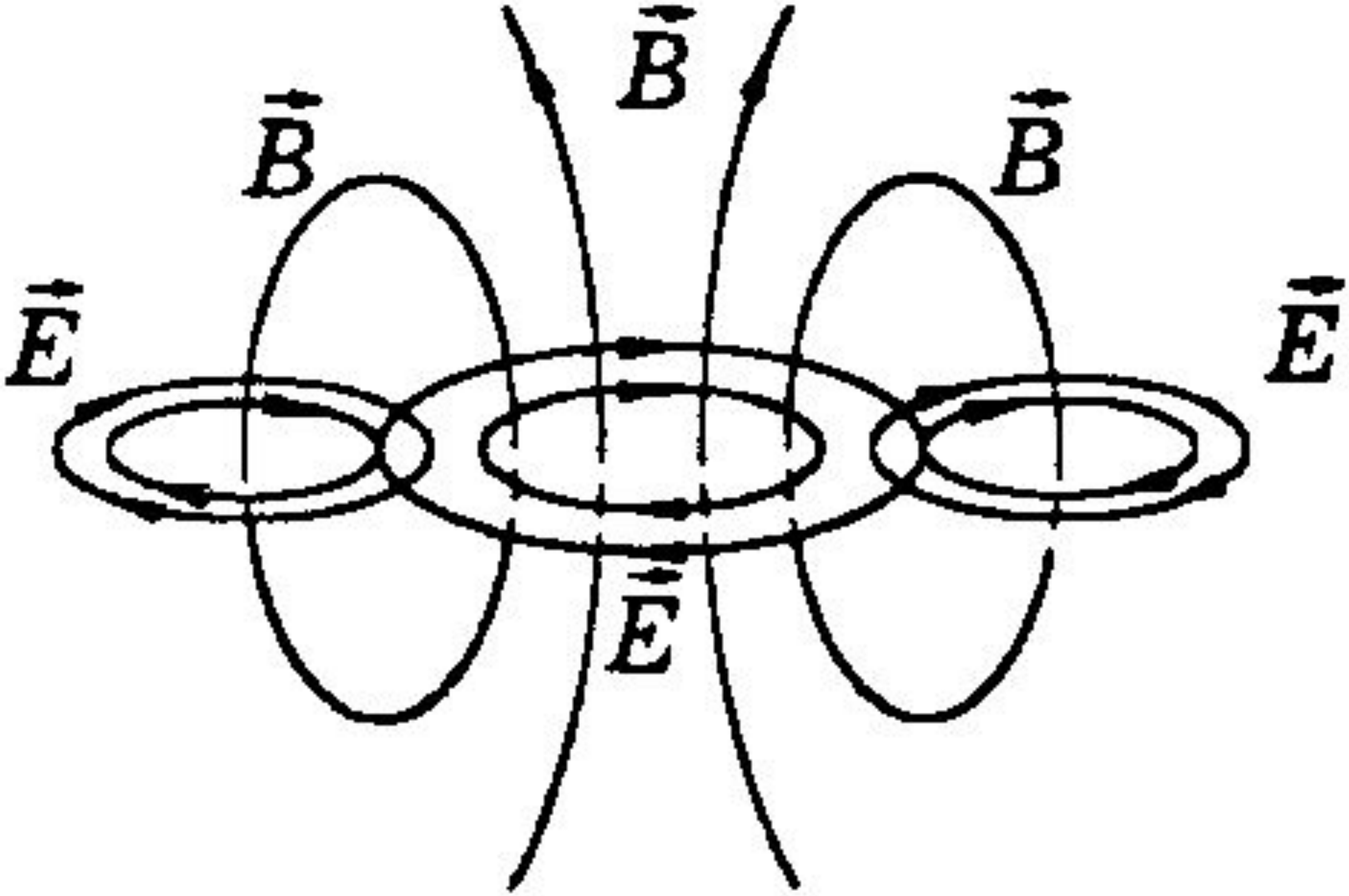
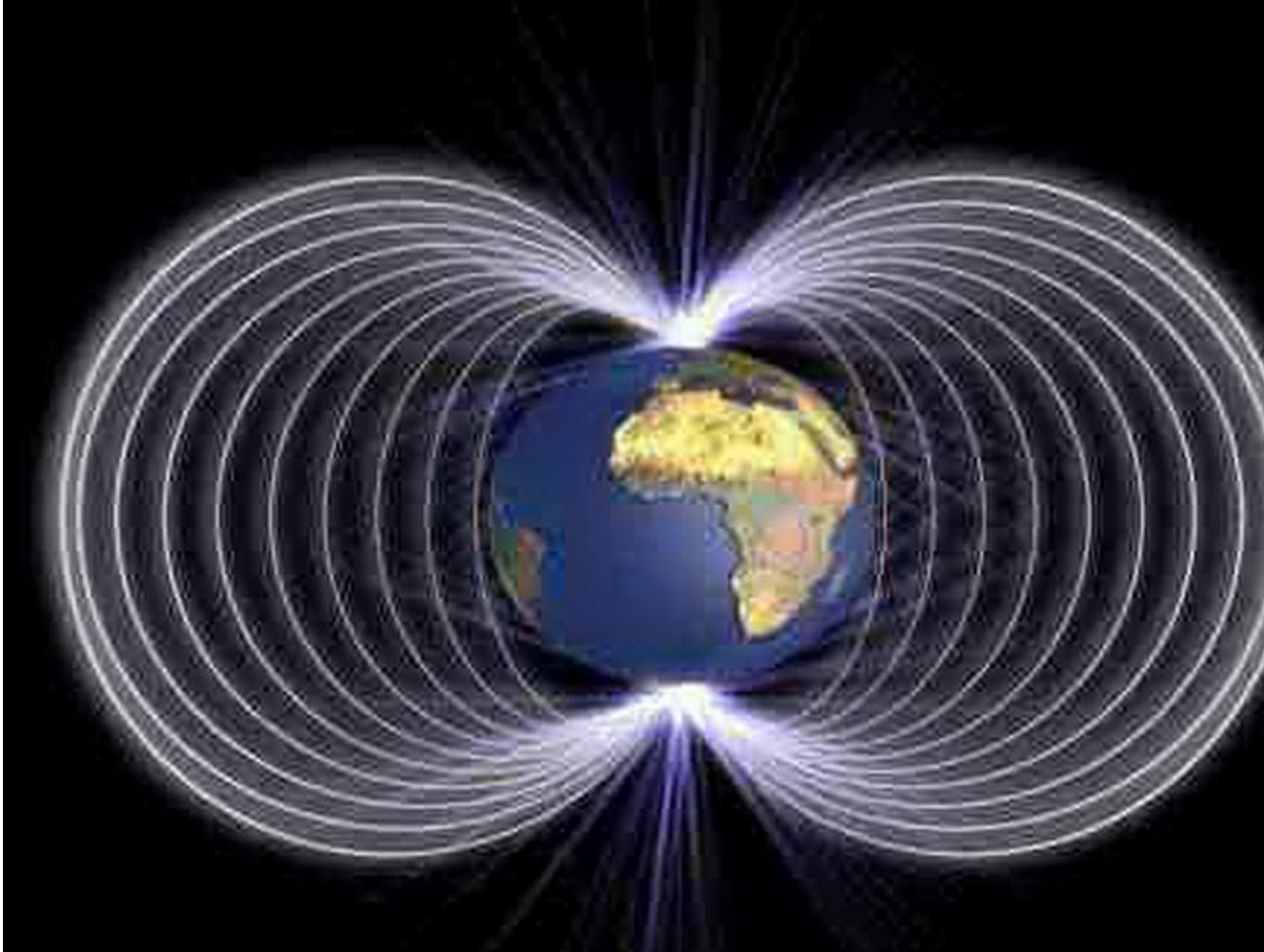


Рис. 31

Гипотезы о происхождении магнитного поля Земли :

- ферромагнитная гипотеза;
- электрическая гипотеза;
- гипотеза гидромагнитного динамо



Электромагнитные волны

Рассмотрим случай, когда электрическое и магнитное поле перетекают друг в друга. Из уравнений Максвелла следует, что электрическое поле, меняясь во времени, порождает магнитное, а магнитное поле, тоже меняясь во времени, также порождает электрическое поле.

$$\begin{cases} rot\vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \ ; \\ rot\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \ ; \\ div\vec{B} = 0 \ ; \\ div\vec{E} = \rho. \end{cases}$$

Тут $\vec{D} = \mu\mu_0\vec{E}$, $\vec{B} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{H}$. В этих равенствах $\vec{D}$ - электрическая проницаемость, $\vec{E}$ - напряжённость электрического поля, $\vec{B}$ - магнитная индукция, $\vec{H}$ - напряженность магнитного поля. μ- магнитная проницаемость среды, ε- диэлектрическая проницаемость среды.

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\text{Гн/м} -$ магнитная проницаемость вакуума, мировая константа. $\varepsilon_0 = (1/4\pi \cdot 9 \cdot 10^9)\,\text{Ф/м}$. Пусть все происходит в пустоте (вакууме), где нет ни электрических зарядов, следовательно, нет и электрического тока. Это значит, что $\rho = 0$ и $\vec{j} = 0$. При этом все диэлектрические и магнитные проницаемости $\varepsilon = \mu = 1$. Поэтому в вакууме уравнения Максвелла записываются так

$$\begin{cases} rot\vec{H} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \\ rot\vec{E} = -\mu_0 \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \\ div\vec{H} = 0; \\ div\vec{E} = 0. \end{cases}$$

Ясно, что эти уравнения имеют тривиальное решение $\vec{E} = \vec{H} = 0$, т.е. никаких полей вообще нет. Но если предположить, что электрическое и магнитное поля все-таки есть, то они должны быть переменными. И такое решение найдено.

Подействуем оператором rot на второе уравнение

$$rotrot\vec{E} = -\mu_0 rot\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Вспомним формулу двойного ротора

$$\left[\vec{\nabla},\left[\vec{\nabla},\vec{\mathrm{A}}\right]\right] = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{A}} - \Delta\vec{\mathrm{A}}.$$

Подставим вместо $\vec{\mathrm{A}}$ $\vec{E}$, получаем

$$rotrot\vec{E} = \overrightarrow{graddiv}\,\vec{E} - \Delta\vec{E}.$$

Смотрим на уравнения Максвелла и видим, что $div\vec{E} = 0.$

Значит, второе уравнение Максвелла можно записать так

$$\Delta\vec{E} = \mu_0 rot\frac{\partial\vec{\mathrm{H}}}{\partial \mathrm{t}} = \mu_0\frac{\partial rot\vec{\mathrm{H}}}{\partial \mathrm{t}}.$$

Но для $rot\vec{\mathrm{H}}$ есть свое первое уравнение $rot\vec{H} = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$

Подставляем этот ротор в уравнение для электрического поля, и получаем

$$\Delta\vec{E} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

В развернутом виде это уравнение, называемое волновым уравнением, запишется в виде

$$c^2 \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2}.$$

На самом деле это не одно уравнение, а три уравнения для трех проекций электрического поля на оси координат E_x; E_y; E_z. В силу симметрии уравнений Максвелла в вакууме для электрических и магнитных полей, точно такое же волновое уравнение запишем для напряженности магнитного поля

$$c^2 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2}.$$

В волновых уравнениях появилась новая константа c^2. Что это такое.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4\pi\cdot 10^{-7}}{4\pi\cdot 9\cdot 10^{9}}}} = 3\cdot 10^{8}\,\frac{\text{м}}{\text{с}} = 300\,000\,\frac{\text{км}}{\text{сек}}.$$

Это число не простое, это есть скорость света в вакууме. Первую оценку скорости света дал датский ученый Олаф Рёмер (1676). Он заметил, что когда Земля и Юпитер находятся по разные стороны от Солнца, затмения спутника Юпитера Ио запаздывают по сравнению с расчётами на 22 минуты. Отсюда он получил значение для скорости света около 220000 км/сек — неточное, но по порядку величины близкое к истинному. Спустя полвека открытие аберрации позволило подтвердить конечность скорости света и уточнить её оценку.

Например, Луна находится от нас на расстоянии (в среднем) 384 440 км. И время прохождения кванта света то Земли до Луны

$$\Delta t = \frac{384440}{300000} = 1,28 \text{ сек.}$$

Чтобы понять суть решения волнового уравнения, рассмотрим его одномерный аналог

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

Разложим это равенство как разность квадратов

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} - c\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial t} + c\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0.$$

Тут есть два независимых решения от произвольной функции , но с фиксированными аргументами

$$f = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{c}\right).$$

Смысл функции $f = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right)$ состоит в том, что поле (функция) имеет одно и то же значение при $t - \frac{x}{c} = const.$ Отсюда следует вывод, что фиксированное значение f распространяется в пространстве со скоростью $v = \frac{x}{t} = c$. Таким образом, $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ есть скорость света.

$$f = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

представляет плоскую волну, бегущую в положительном направлении оси OX, а

$$f = f_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

представляет плоскую волну, бегущую в отрицательном направлении оси OX.

Для того, чтобы понять, как расположены электрическое и магнитное поле в электромагнитной волне, введем новую векторную функцию – векторный потенциал - $\vec{A}(x,y,z)$. В теории поля такой векторный потенциал вводится, так как он создает и магнитное и электрическое поле. Действительно, если $\vec{H} = rot\vec{A}$, то второе уравнение Максвелла

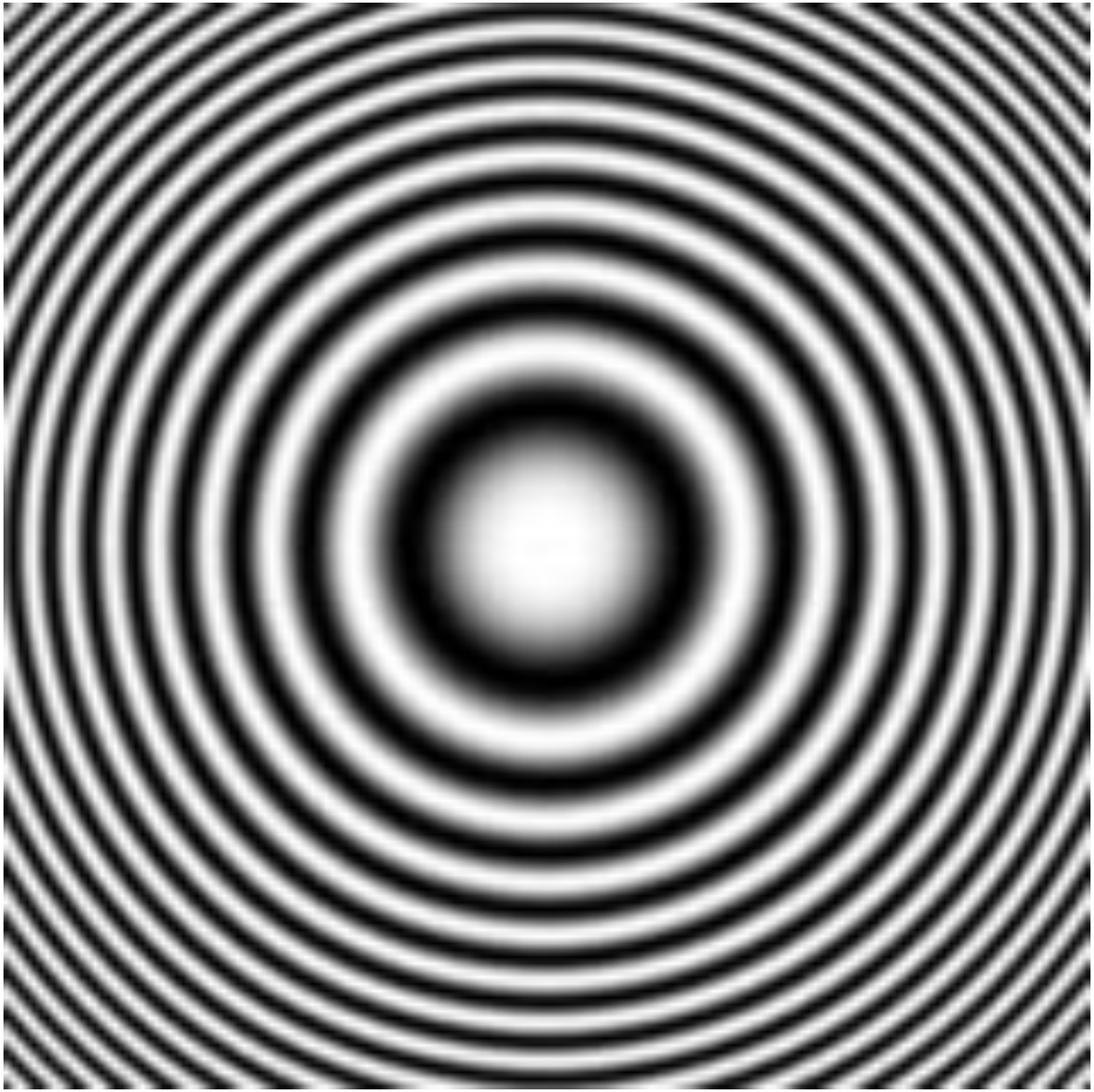
$$rot\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial rot\vec{A}}{\partial t} = rot\left(-\mu_0 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right).$$

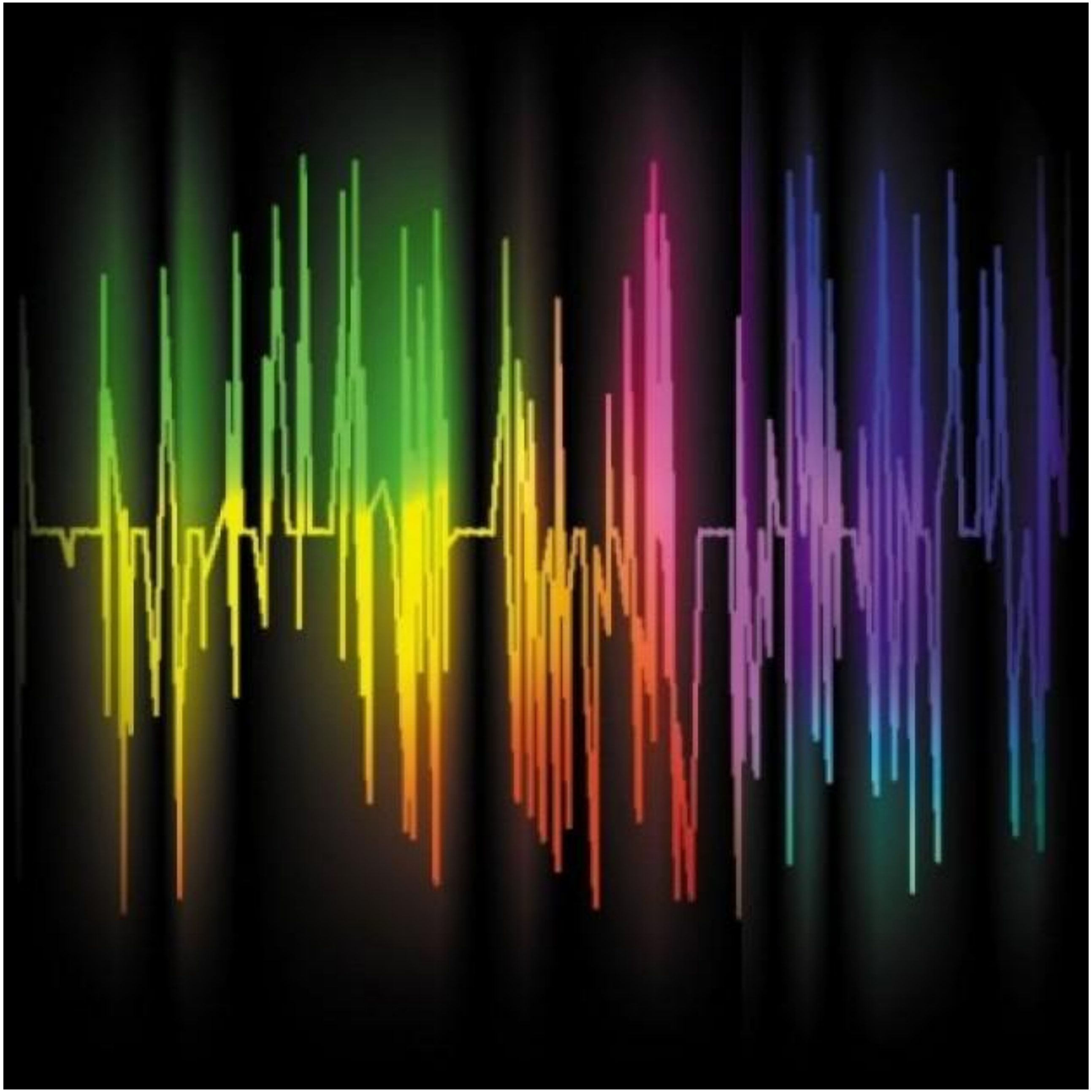
Опуская оператор ротора, получаем два уравнения

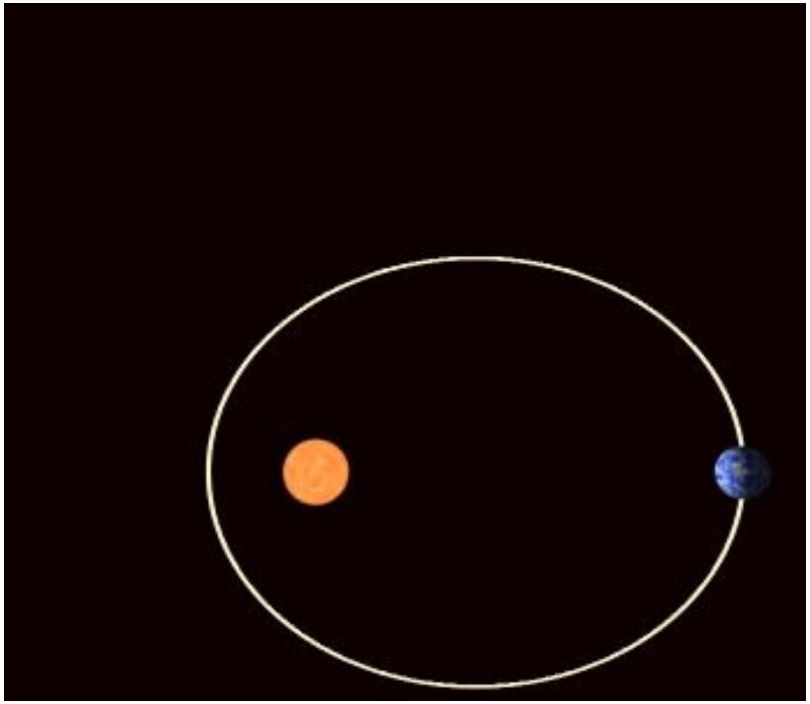
$$\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{H} = rot\vec{A}.$$

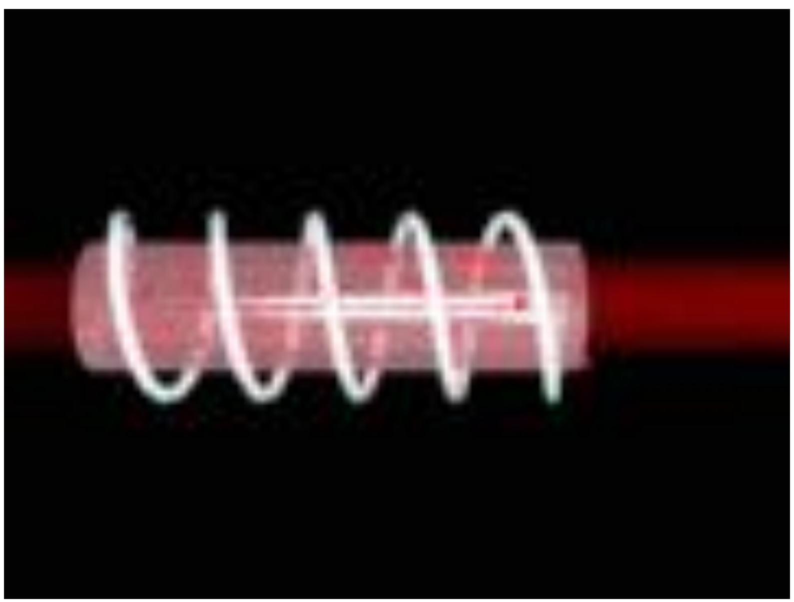
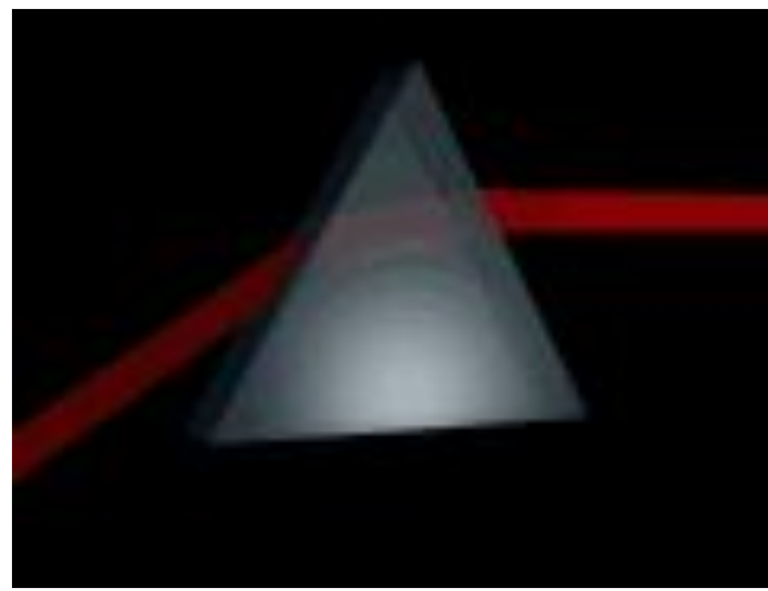
О чем они нам говорят? Во-первых, есть некоторая векторная функция $\vec{A}(x,y,z)$, которая порождает и электри-

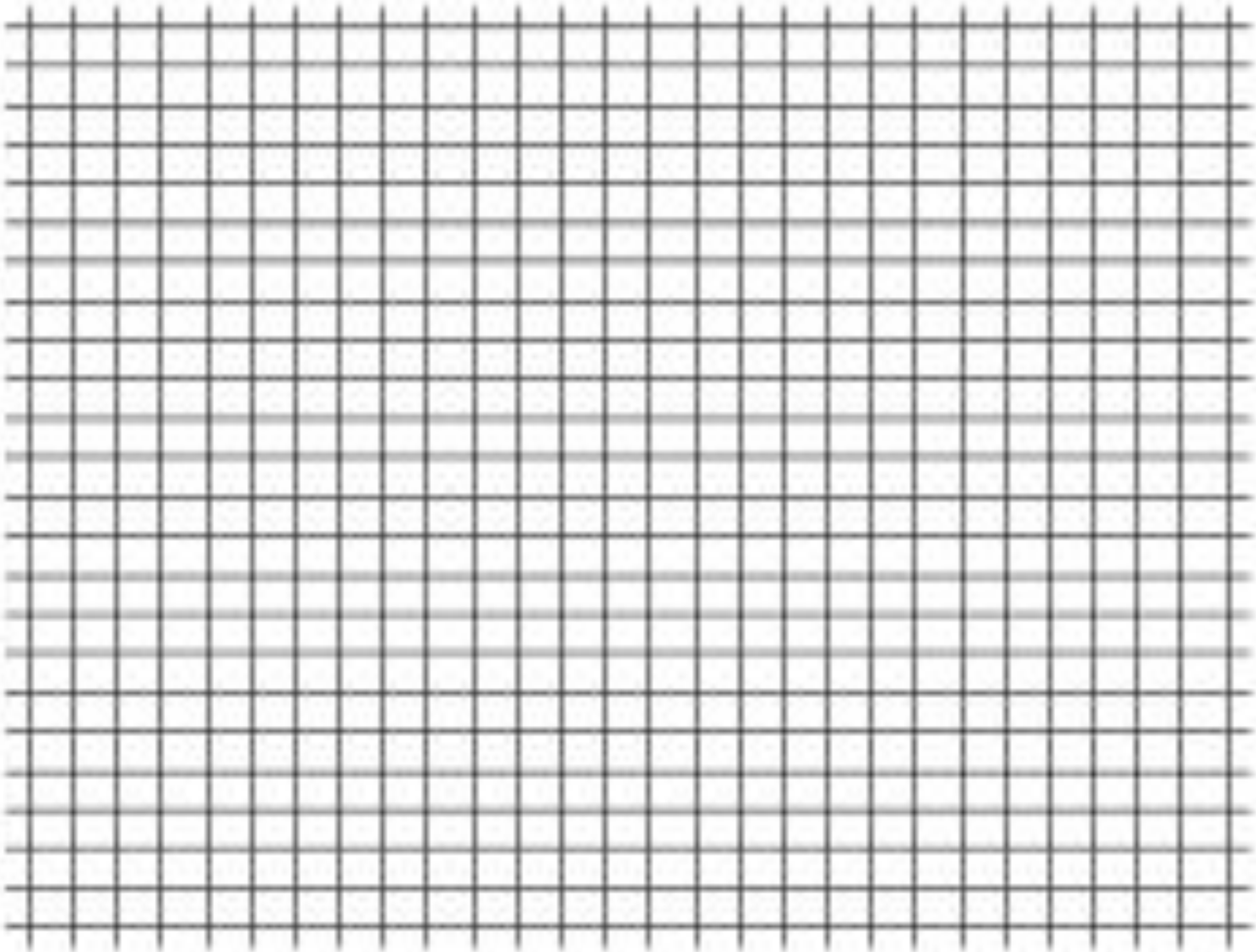
ческое и магнитное поле в электромагнитной волне. Во-вторых эти уравнения говорят, что оба поля - электрическое и магнитное – направлены перпендикулярно друг другу одновременно они перпендикулярны направлению распространения.

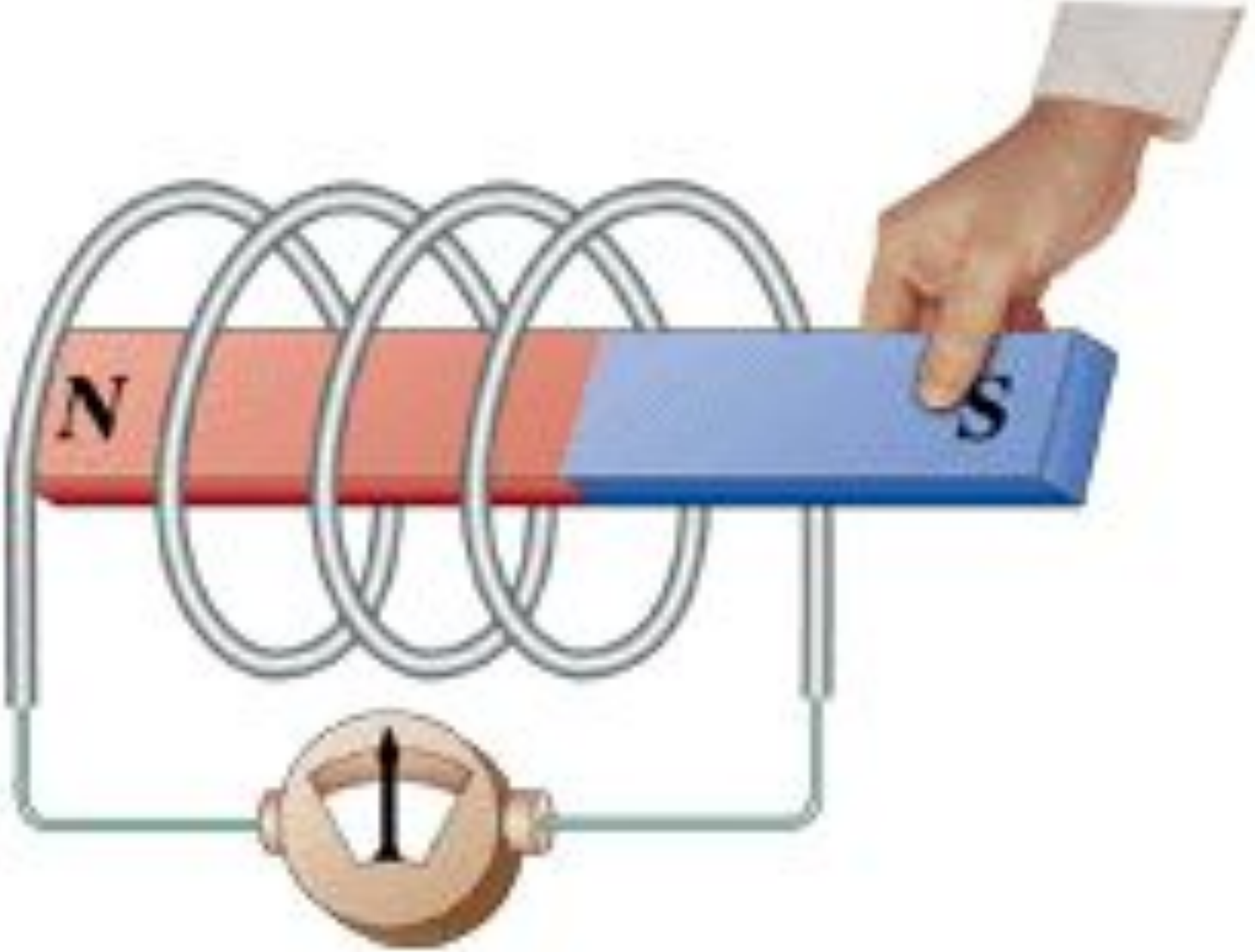




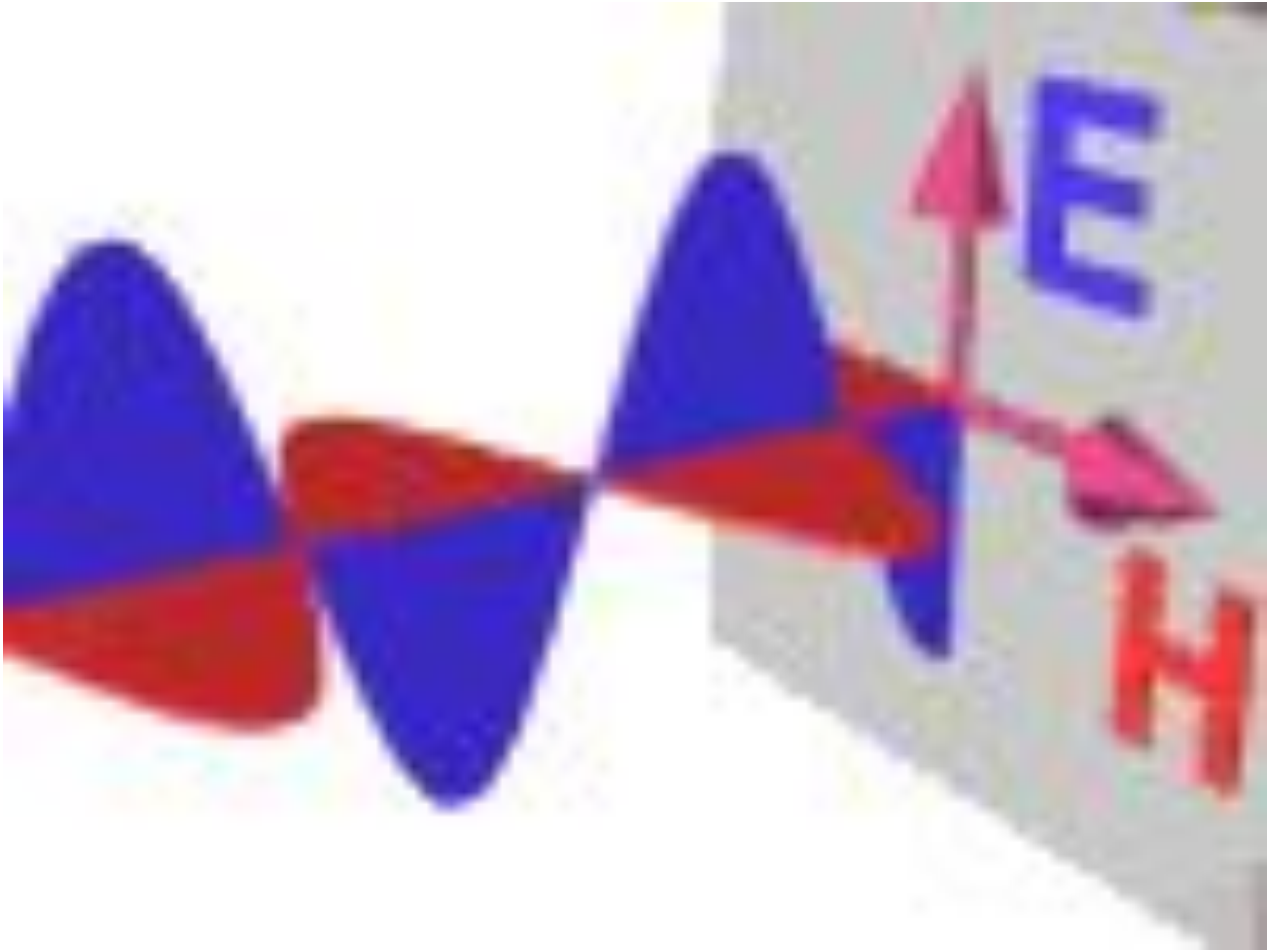


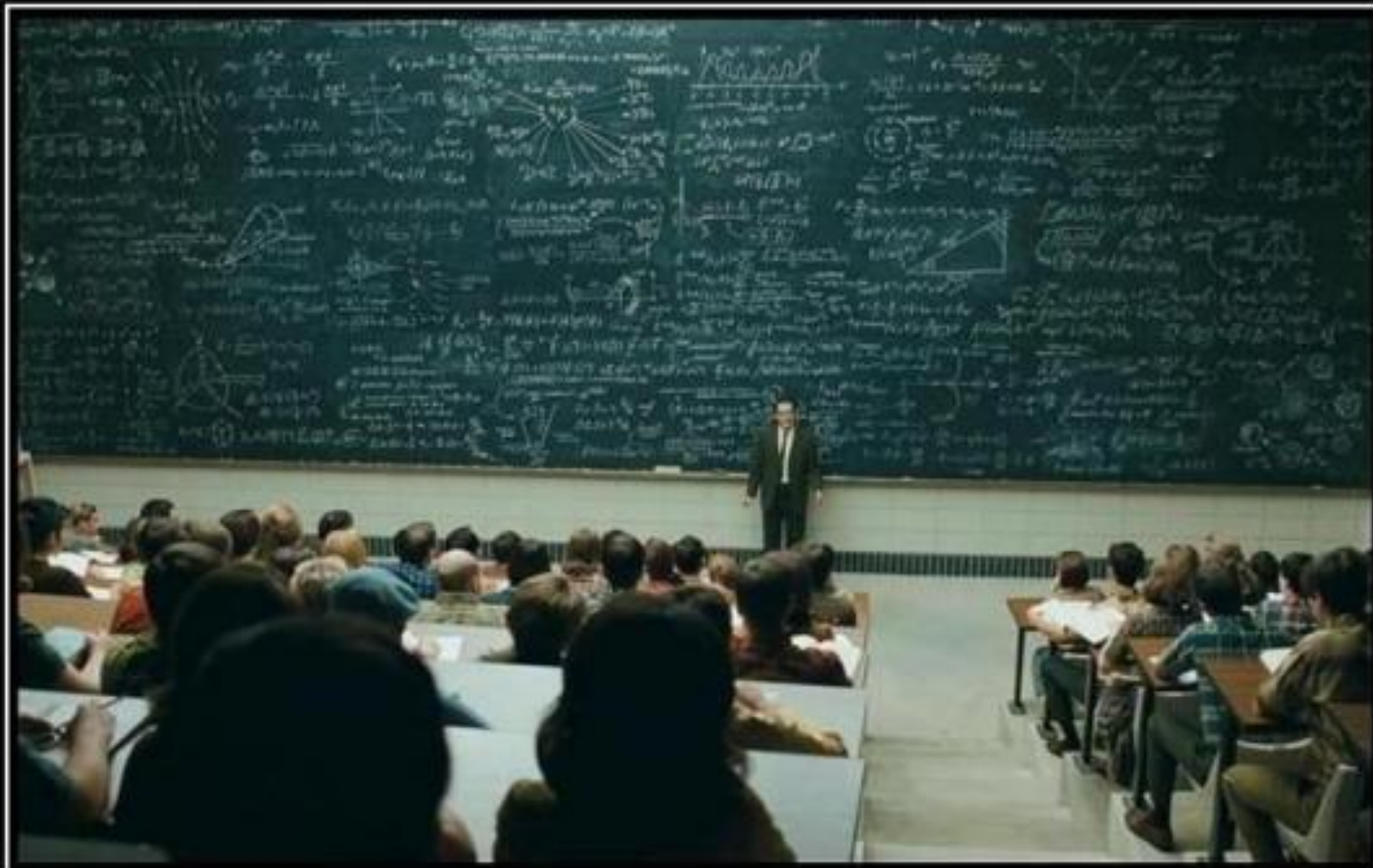







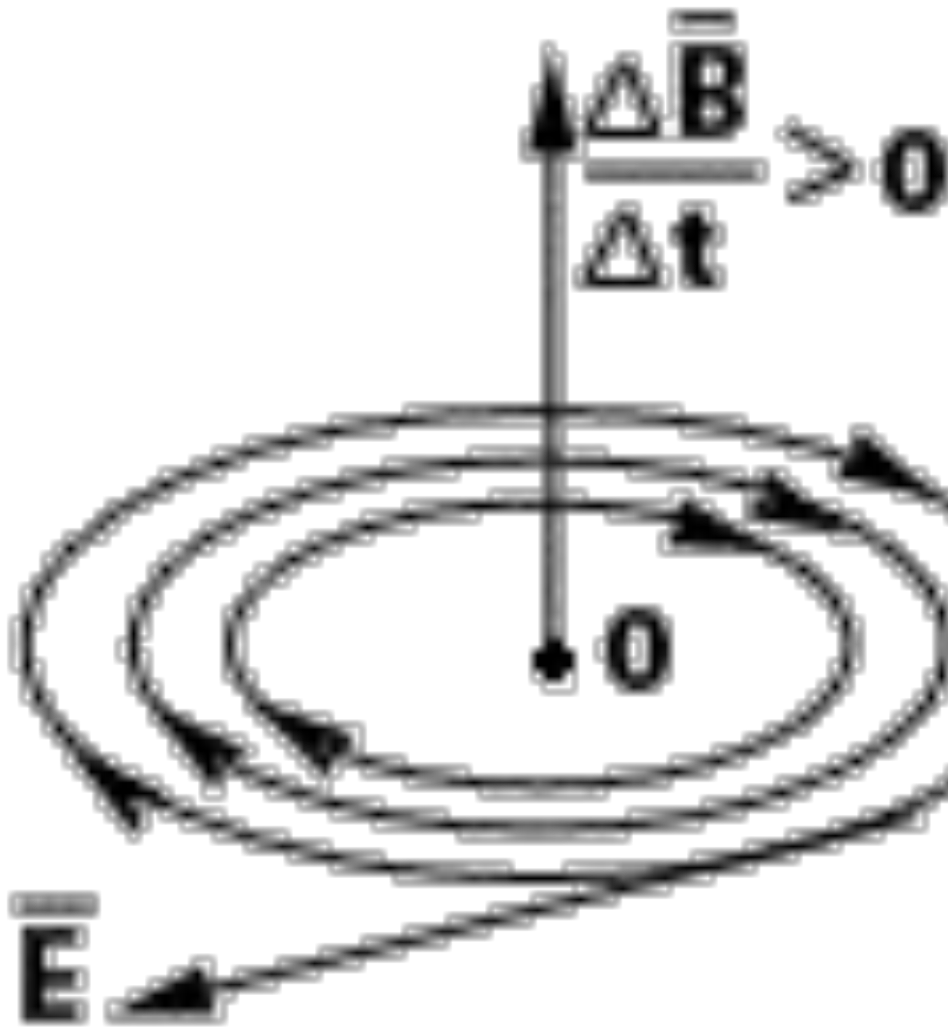
N
S


E
H



НУ ЧТО, Я ПОНЯТНО ОБЪЯСНИЛ?

кто не понял, поднимите руку, объясню еще раз...



Второй закон Максвелла

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

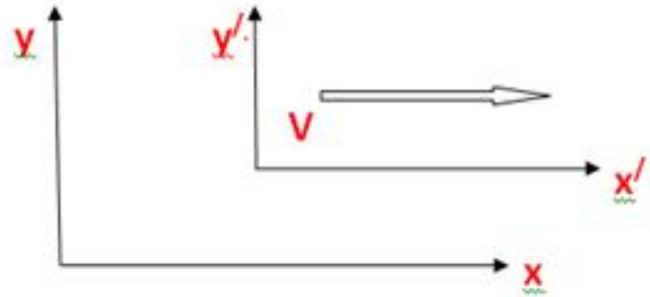
Почему этот раздел входит в наш курс «Теория поля»? Потому что при рассмотрении свойств полей, векторных, скалярных, тензорных, спинорных, большую роль играет переход из одной инерциальной системы (ИС) в другую инерциальную систему. При этом возникают некоторые законы сохранения, на физические величины накладываются ограничения, возникают новые законы.

Классический учебник Ландау и Лифшица «Теория поля» начинается именно с принципов относительности, конкретно, со специальной теории относительности (СТО). Исторически сложилось так, что в 1893 г. Лоренц, голландский ученый, предложил преобразования систем координат, которые сохраняют вид уравнений Максвелла неизменными при переходе в инерциальных системах. Преобразования были необычными, в них перемешивались на равных правах координаты, время и скорость инерциальных систем. На этих преобразованиях Лоренц предсказал сокращения длины тел при переходе в более быструю систему координат. Далее французский математик Пуанкаре на этих преобразованиях в 1903-1905 г. создал релятивистскую механику, т.е. механику тел, двигающихся со скоростями близкими к скорости света. В 1905 г. Эйнштейн опубликовал эти результаты, без каких либо ссылок на эти работы. В статье не было вообще никаких ссылок ни на кого. С тех пор его считают создателем СТО. Характерно, что не найдено никаких черновиков Эйнштейна по этой задаче, сама стем координат, которые сохраняют вид уравнений Максвелла неизменными при переходе в инерциальных системах. Преобразования были необычными, в них перемешивались на равных правах координаты, время и скорость инерциальных систем. На этих преобразованиях Лоренц предсказал сокращения длины тел при переходе в более быструю систему координат. Далее французский математик Пуанкаре на этих преобразованиях в 1903-1905 г. создал релятивистскую механику, т.е. механику тел, двигающихся со скоростями близкими к скорости света. В 1905 г. Эйнштейн опубликовал эти результаты, без каких либо ссылок на эти работы. В статье не было вообще никаких ссылок ни на кого. С тех пор его считают создателем СТО. Характерно, что не найдено никаких черновиков Эйнштейна по этой задаче, сама рукопись статьи в редакции журнала «Анналы физики» исчезла. Ходят предположения, что эту статью написала его жена, преподаватель физики в электротехническом техникуме, где учился Эйнштейн. Она было старше мужа на семь лет. В те времена статьи писались от руки, машинопись была редка. Поэтому, возможно, главную статью 20-го века просто выкрали. После войны в 1960 г. Эйнштейн, проживая в Америке, переписал статью вручную из того старого журнала и выставил на аукцион. Она была продана за 6 миллионов долларов.

СТО Лоренца-Пуанкаре- Эйнштейна базируется на преобразованиях Лоренца

$$x = \frac{x^{/} + Vt^{/}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \qquad t = \frac{t^{/} + \left(Vx^{/}/c^2\right)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Обычно обозначают $V^2/c^2 = \beta^2$. V - положительная скорость инерциальной системы вдоль оси **OX** с переменными $x^/$ и $t^/$, c - скорость света в вакууме, $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с.



Покоящаяся и движущаяся со скоростью V инерциальные системы

Считается, что законы природы должны быть инвариантными относительно перехода от одной инерциальной системы в другую инерциальную систему отсчета. Реально это выражается в том, что математическая запись соответствующих уравнений остается одной и той же.

Преобразования Галилея

- **Уравнение движения в классической механике математически переходит само в себя при преобразованиях Галилея**

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad F = m\frac{d^2x'^2}{dt'^2}$$

$$x = Vt' + x', \quad t = t'$$

При небольших скоростях V формулы СТО переходят в преобразования Галилея. $x = x' + Vt', \; t = t'$.

Инвариантность уравнений Максвелла при переходе от одной ИС к другой ИС сводится в двумерном пространстве к требованию сохранения метрики псевдоевклидова пространства, т.е. к равенству интервала между двумя событиями

$$x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2$$

Частным требованием инвариантности уравнений Максвелла является требование сохранения математического вида волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \, .$$

Действительно, преобразования Лоренца сохраняют вид волнового уравнения новой, штрихованной системе координат, двигающейся с любой скоростью $V < c$. Анализ преобразований Лоренца привел в новой формуле сложения скоростей

$$v = \frac{v^{/} + V}{1 + \frac{v^{/}V}{c^2}}$$

Тут штрих – не производная, а другая ИС, двигающаяся со скоростью V. При $V \ll c$ получаем галилевское сложение скоростей

$$v = v^{/} + V.$$

Пример. Смагин сидит на травке, а мимо него проносится поезд со скоростью $V = 100\frac{\text{км}}{\text{час}}$.. По вагону идет за

чаем Хромов со скоростью $v^{/} = 5\,\frac{\text{км}}{\text{час}}$. Какую скорость Хромовая фиксирует Смагин? $v = 105\,\frac{\text{км}}{\text{час}}$. Теперь допустим Хромов пролетает на звездолете мимо Земли со скоростью $V = \frac{2c}{3}$. Хромов и там пошел к проводнику за чаем со скоростью $v^{/} = \frac{c}{2}$. Какую скорость увидит Смагин?

$$v = \frac{\frac{c}{2} + \frac{2c}{3}}{1 + \frac{c^2}{3c^2}} = \frac{\frac{7}{6}c}{\frac{4}{3}} = \frac{7}{8}c.$$

По классической механике $v = \frac{7}{6}c$, т.е. скорость была бы больше скорости света. По СТО всегда $v \le c$.

Что декларирует СТО по своим формулам? 1.Скорости большей скорости света не может быть. 2. Скорость гравитационных волн равна c. 3. В двигающейся ИС тела сокращаются по длине. 4. Промежутки времени Δt уменьшаются. 5.Свет, налетая на ИС, двигающуюся со скоростью c, не проникает в нее, так как преломляется параллельно оси OX'. 6. Кинетическая энергия свободной частицы с массой m_0 (масса покоя) и двигающейся со скоростью V определяется формулой

$$K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = m_0 c^2 + \frac{m_0 V^2}{2} + \frac{3 m_0 V^4}{8 c^2} + \cdots$$

Разложение в ряд Маклорена.

7. Импульс свободной частицы

$$p = \frac{m_0 V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = m_0 V + \frac{m_0 V^3}{2c^2} + \frac{3 m_0 V^5}{8c^4} + \cdots.$$

Получено много других формул, написаны большие книги по следствиям СТО. Между тем возникают простые вопросы на которые нет ответа. Перечислим некоторые из них.

1. Почему нет объемной СТО? Во всех учебниках и статьях есть одномерный вариант.

2. Почему нет кинематики вращательного движения? Линейная скорость вращательного движения есть

$$v = r \cdot \omega.$$

При любой угловой скорости, пусть $\omega. = 1$рад/сек **, можно подобрать такой радиус, чтобы линейная ско-**

рость была больше скорости света c. При $r = 400\,000$ км $= 4 \cdot 10^8$м линейная скорость

$$v = 4 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{сек}} > c = 4 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{сек}}.$$

Среднее расстояние до Луны 384 440 км, как раз такого порядка.

3. Как быть с другими волновыми уравнениями

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

В акустике, гидродинамике, колебаниях гитарной струны, теории упругости? Если потребовать к ним применения преобразований Лоренца, то получится, что скорость звука в воздухе $a =$331 м/с самая наибольшая в природе и скорость гравитационных волн равна именно этой величине.

4. Как быть с принципом автофазировки, который не работает при проектировании больших ускорителей?

5. Какова природа черенкового излучения. В книге Ландау и Лифшица «Электродинамика сплошных сред» говорится, что излучает среда, а в статье нобелевского лауреата по этому вопросу академика Франца говорится, что излучает сверхсветовой электрон. И это при том, что он летит с постоянной скоростью. Где принцип сохранения энергии? Подробной теории этого излучения нет.

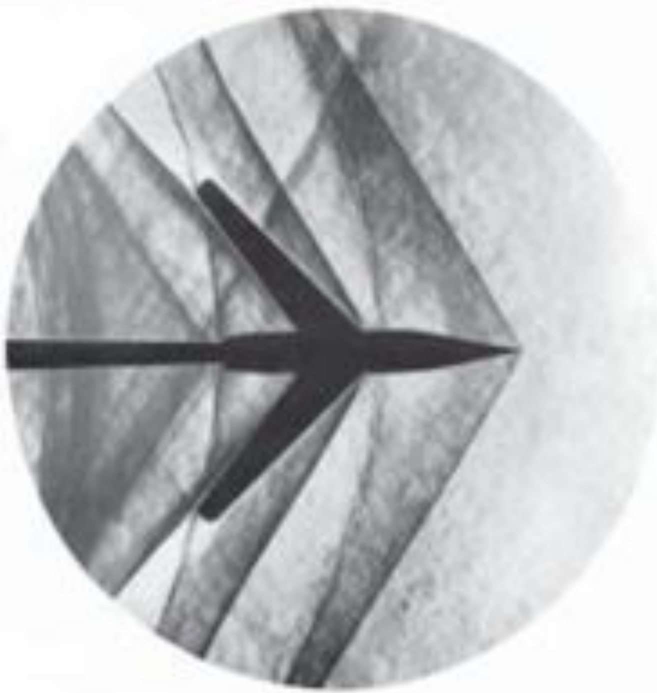
6. Почему массы протона, входящие в энергию и в импульс в современных ускорителях отличаются почти в 1,5 раза, хотя по СТО должны быть одинаковыми?

7. Почему такое огромное количество экспериментов, в которых обнаружена сверхсветовая скорость?

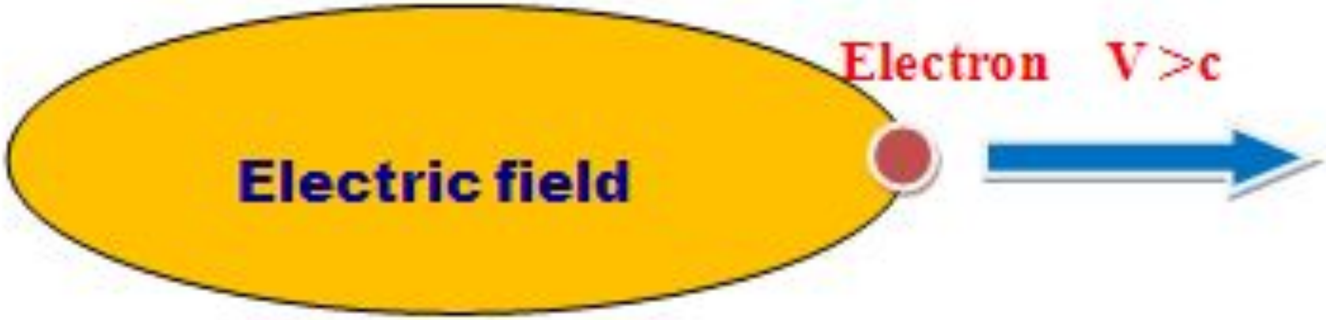
Вопросов возникает очень много, и на них нет ответа.

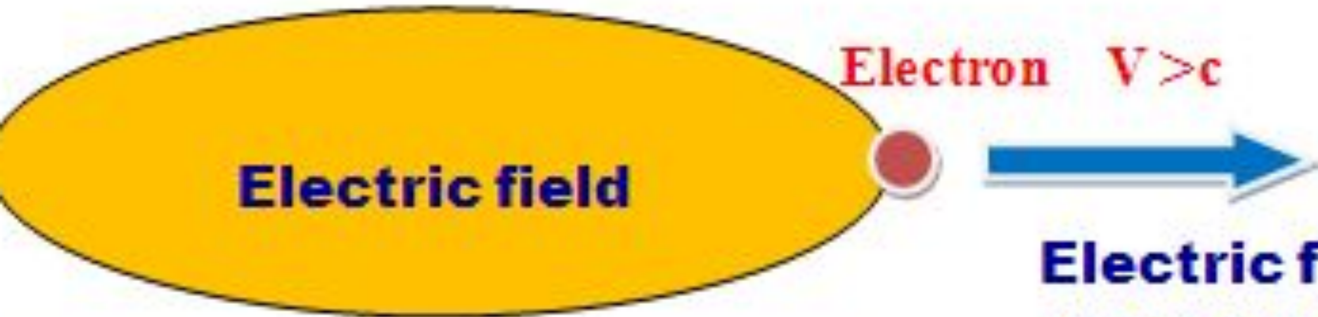
We cannot measure superlight velocity V > c with help location electromagnetic wave.

Example. Let the aero plan has super sound velocity V > c.



He create blow wave. We close our eyes. We measure velocity aero plan only with ears. To earth signal came as weak blow wave with velocity of sound. Because we think that aero plan has velocity of sound but not super sound.





Electric field is behind the electron.
Between electrons there are not Colon interaction and they made Cherenkov radiation or radiation Heaviside-Somerfield.

Насколько известно автору доклада подтверждением сокращения временных интервалов по СТО является распад космических μ- мезонов в лабораторных условиях. Время жизни μ- мезонов $\Delta t = 2,2 \cdot 10^{-6}$с. Мезон пролетает 30 км со скоростью близкой к скорости света, и его время жизни в неподвижной системе отчета возрастает до $\Delta t = 10^{-4}$с. Однако, это доказательство чисто умозрительное, так как никто не мерил скорость этой частицы.

Странно, что не поставлен соответствующий эксперимент в синхрофазотронах. В них протоны летят со скоростями близкими к **с**. Например, в БАКе $\sqrt{1-\beta^2} \approx 10^{-4}$. Это значит, что время жизни возрастает в 10000 раз. Если запустить ядро ${}^{8}_{3}\mathrm{Li}$ с временем полураспада $\Delta t = 0,8$ с, то его Δt возрастет до 2,2 часа.

The analysis of these transformations gives somewhat different formulas for velocity addition, time delay, reduction of size, total energy, etc., but generally, unusual conclusions of ASTR remain.

При расчете ускорителей применяют СТО и эти ускорители хорошо работают. Неясно почему, но расчет $\sqrt{1-\beta^2}$ для Большого адронного коллайдера (БАК) по двум позициям различается в 1,55 раза. Вначале по энергии

$$\sqrt{1-\beta^2}=\frac{m_p c^2}{7\ \text{ТэВ}}=\frac{0{,}939\cdot 10^9}{7\cdot 10^{12}}=1{,}34\cdot 10^{-4}$$

По частоте вращения $\omega=\frac{c}{R}=\frac{3\cdot 10^8}{4245}=7{,}06\cdot 10^4$

$$\omega_H=\frac{eH}{mc}=\frac{4{,}8\cdot 10^{-10}\cdot 8\cdot 10^4}{1{,}67\cdot 10^{-24}\cdot 3\cdot 10^{10}}=7{,}66\cdot 10^8 \quad H=0{,}8\cdot 10^5\text{Гс}$$

$$\sqrt{1-\beta^2}=\frac{\omega}{\omega_H}=\frac{7{,}06\cdot 10^4}{8{,}12\cdot 10^8}=0{,}922\cdot 10^{-4}$$

Таблица синхрофазотронов

Синхро фазотрон	E, Гэв	H, кэ	R, м	$\sqrt{1-\beta^2}$ ω	$\sqrt{1-\beta^2}$ E	$\dfrac{\sqrt{1-\beta^2}\ ,E}{\sqrt{1-\beta^2}\ ,\omega}$
ИАЭ СССР	7,3	8,5	20	0,217	0,129	1,057
Дубна	10	13	28	0,0941	0,101	0,932
ZGS США	12,5	21,5	22,3	0,077	0,075	0,974
AZS США	30	13	128,5	0,022	0,031	1,4
ЦЕРН	30	14,1	100	0,0262	0,031	1,15
Протвино	70	12	236	0,0134	0,0134	1,03
БАК	7000	80	4245	$0{,}92\cdot10^{-4}$	$1{,}34\cdot10^{-4}$	1,45

The author find other new four transformations of time - coordinates also conserving metric of pseudo-Euclidean space for three new alternative special theories of relativity:

$$x = x'\cdot\sqrt{1+\beta^2} + \beta\cdot c\cdot t'; \qquad t = t'\cdot\sqrt{1+\beta^2} + \beta\cdot x'/c;$$

$$x = x'\cdot \operatorname{ch}\beta + c\cdot t' \operatorname{sh}\beta; \qquad t = t' \operatorname{ch}\beta + (x' \operatorname{sh}\beta)/c;$$

$$x = x'\cdot\sqrt{\operatorname{ch}(\sqrt{2}\beta)} + \cdot c\cdot t'\sqrt{\operatorname{ch}(\sqrt{2}\beta) - 1};$$

$$t = t'\cdot\sqrt{\operatorname{ch}(\sqrt{2}\beta)} + \cdot x'\sqrt{\operatorname{ch}(\sqrt{2}\beta) - 1}\ /c$$

$$x = x'\cdot\sqrt{1+\operatorname{sh}(\beta^2)} + \cdot c\cdot t'\sqrt{\operatorname{sh}(\beta^2)};$$

$$t = t'\cdot\sqrt{1+\operatorname{sh}(\beta^2)} + \cdot x'\sqrt{\operatorname{sh}(\beta^2)}\ /c$$

$$x = x'\cdot\sqrt{1+\operatorname{tg}(\beta^2)} + \cdot c\cdot t'\sqrt{\operatorname{tg}(\beta^2)}, \ldots$$

$$t = t'\cdot\sqrt{1+\operatorname{tg}(\beta^2)} + \cdot x'\sqrt{\operatorname{tg}(\beta^2)}\ /c$$

Lorenz-Poincare-Einstein special theory of relativity (**STR**) (**СТО**) is based on Lorenz transformations

$$x = \frac{x' + V \cdot t'}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

$$t = \frac{t' + (\beta \cdot x'/c))}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Дружинин analyzed the other new transformations conserving this invariant. Let us consider one of them (**ASTR**) (**АСТО**)

$$x = x' \cdot \sqrt{e^{\beta^2}} + c \cdot t' \cdot \sqrt{e^{\beta^2} - 1};$$

$$t = t' \cdot \sqrt{e^{\beta^2}} + x' \cdot \frac{1}{c} \sqrt{e^{\beta^2} - 1}.$$

Here β = V/c, V is inertial system velocity (IS(V)) along OX-axis with variables x' and t'.

c is the velocity of light in vacuum, c ≈ $3 \cdot 10^8$ м/с.

Velocity addition in is given by:

$$v = dx/dt = (dx/dt')(dt/dt')^{-1}$$

STR (CTO)

$$v = \frac{(v' + V)}{1 + \frac{v' \cdot V}{c^2}}$$

ASTR (ACTO)

$$v = \frac{v' \cdot \sqrt{e^{\beta^2}} \cdot + c \cdot \sqrt{e^{\beta^2} - 1}}{\sqrt{e^{\beta^2}} + (v' \cdot \sqrt{e^{\beta^2} - 1})\,/c}$$

At $V \ll c$ formula ASTR goes into STR formula $v = (v' + V)/(1 + (v' \cdot V)/c^2)$, in approximation $e^{\beta^2} \approx 1 + \beta^2$.

According to ASTR the velocity of light in all IS moving with the velocity either less or equal, or higher than the velocity of light, is the same.

Size of bodies' slowdown

STR

$$\Delta x = \frac{\Delta x^{/}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

The result of STR at $\beta \ll 1$

$$\Delta x = \Delta x^{/} / \sqrt{1-\beta^2} \approx$$
$$\approx \Delta x^{/} \cdot (1 + \beta^2/2)$$

ASTR

$$\Delta x = \Delta x^{/} \cdot \sqrt{e^{\beta^2}}$$

The result of ASTR at $\beta \ll 1$

$$\Delta x = x^{/} \cdot \sqrt{e^{\beta^2}}$$
$$\approx \Delta x^{/} \cdot (1 + \beta^2/2)$$

In ASTR at $\beta = 1$, $\Delta x = \Delta x^{/} \cdot \sqrt{e} \approx 1{,}648 \cdot \Delta x^{/}$,

i. e. the size is slowed down as much as 1,6 ,

while in STR $\Delta x^{/} \Rightarrow 0$ size is completely non.