ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Лекция 3

ПРИМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

§1. НАХОЖДЕНИЕ РАНГА МАТРИЦЫ

- Пусть ***A*** - прямоугольная матрица размера ***m***х***n***

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad A=\left\|a_{ij}\right\|_{m\times n}.$$

- Пусть в матрице ***A*** произвольным образом выбраны ***l*** строк и ***l*** столбцов, где ***l*** ≤ ***min(m;n)***. Элементы, стоящие на пересечении этих строк и столбцов образуют квадратную матрицу ***l*** -го порядка, определители которой называются минорами ***l*** -го порядка матрицы ***A***.
- ***Рангом матрицы A*** (обозначение - ***r(A)***или ***rangA***) называется максимальный порядок миноров данной матрицы, не равных нулю. Минор, определяющий ранг матрицы, называется ***базисным***.
- У матрицы базисный минор определяется неоднозначно.

Пример 1. Определить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Поскольку у матрицы $\boldsymbol{A}$ два нулевых столбца, то все миноры 3-го порядка равны нулю. Существует минор 2-го порядка, стоящий на пересечении 1-ой и 2-ой строк и 2-го и 3-го столбцов, неравный нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Поэтому, ***rangA=2***. Данный минор является одним из базисных.

Из определения ранга матрицы следуют его ***свойства***:

1. ***rangA*** $\le$ ***min(m;n)***, т.е. ранг матрицы не превосходит меньшего из ее размеров.

- 2. ***rangA***=0 тогда и только тогда, когда ***A*** - нулевая матрица.
- 3. Ранг матрицы не изменится, если из нее вычеркнуть все нулевые строки и столбцы.
- 4. Ранг матрицы не изменится при её транспонировании.
- 5. Элементарные преобразования матрицы не меняют её ранга.
- Пример 2. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Решение. В результате элементарных преобразований и применения свойств ранга получаем каноническую матрицу вида

$$A\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

поэтому, ранг матрицы ***A*** равен ***rangA* = 2.**

- ***§2. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА И ЕЕ НАХОЖДЕНИЕ***
- Пусть дана квадратная матрица порядка ***n*** : $A = \left\| a_{ij} \right\|_{n\times n}$
- Квадратная матрица $\boldsymbol{A^{-1}}$ порядка ***n*** называется обратной к матрице ***A***, если выполняется условие: $\boldsymbol{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E}$,

  где ***E*** - единичная матрица ***n*** -ого порядка.
- Матрица ***A*** называется ***вырожденной*** (***особенной***), если её определитель равен нулю. Иначе, матрица ***A*** называется ***невырожденной***.
- ***Присоединенной матрицей*** или матрицей ***союзной*** к матрице ***A***, называется матрица вида:

$$A^{V} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{A_{ij}}$ - алгебраические дополнения элементов $\boldsymbol{a_{ij}}$ матрицы ***A***.

- ***Теорема 1.*** Для того, чтобы у матрицы $\boldsymbol{A}$ существовала обратная, необходимо и достаточно, чтобы исходная матрица $\boldsymbol{A}$ была невырожденная.
- Доказательство необходимости. Пусть матрица $\boldsymbol{A}$ имеет обратную матрицу $\boldsymbol{A}^{-1}$,
- т.е. справедливо равенство $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$.
- Применим к данному равенству свойство 11 определителей.
- Имеем $|\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{E}| = 1$, отсюда вытекает, что $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ и $|\boldsymbol{A}^{-1}| \neq 0$.
- Доказательство достаточности.
- Для доказательства используем присоединенную матрицу.
- Не теряя общности, докажем теорему для случая $\boldsymbol{n} = 3$. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ где по условию } \det A \neq 0 .$$

- Присоединенная матрица $\boldsymbol{A^V}$ имеет вид:

$$A^V = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

- Вычислим их произведение $\boldsymbol{A \cdot A^V}$**:**

$$A \cdot A^V = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} & \cdots & a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} & \cdots & a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} & \cdots & a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det A \cdot E.$$

- Тогда имеем: $\boldsymbol{A \cdot A^V = det\, A \cdot E}$. Аналогично рассуждая, получаем что $\boldsymbol{A^V \cdot A = det\, A \cdot E}$.
- Полученные равенства представим в виде:

$$A \cdot \frac{A^V}{\det A} = E\ , \quad \frac{A^V}{\det A} \cdot A = E.$$

- Тогда имеем, что

$$A^{-1} = \frac{A^V}{\det A}, \text{или } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

- Что и требовалось доказать.
- <u>Пример1</u>. Найти матрицу $\boldsymbol{A}^{-1}$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$
- <u>Решение.</u> Имеем $\boldsymbol{det\, A} = -4$. Найдем алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы $\boldsymbol{A}$:

Очевидно:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6.$$

Составим присоединенную матрицу

$$A^{V} = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix}.$$ Тогда $$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{V} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 7/4 & -9/4 & 5/4 \\ 3/2 & -5/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

§3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТРИЦ

В качестве примера, рассмотрим некоторые экономические задачи, использующие понятие матрицы.

- Пример 1. Фирма выпускает ежедневно пять видов продукции, основные экономические показатели которых

Вид продукции	Количество изделий	Расход сырья, кг/изд.	Норма времени изготовления, ч/изд.	Цена изделия, ден. ед./изд.
1	10	7	6	35
2	15	2	2	20
3	25	8	4	15
4	30	4	5	35
5	40	5	3	15

- Требуется определить следующие ежедневные показатели: расход сырья S, затраты рабочего времени T и стоимость P выпускаемой продукции предприятия.

Вид продукции	Количество изделий	Расход сырья, кг/изд.	Норма времени изготовления, ч/изд.	Цена изделия, ден. ед./изд.
1	10	7	6	35
2	15	2	2	20
3	25	8	4	15
4	30	4	5	35
5	40	5	3	15

Решение. Используя таблицу, составим четыре вектора-строки, полностью характеризующие производственный цикл:

$\boldsymbol{q} = (10,15,25,30,40)$ - вектор ассортимента;

$\boldsymbol{s} = (7,2, 8,4,5)$ - вектор расхода сырья;

$\boldsymbol{t} = (6,2, 4,5,3)$ - вектор затрат рабочего времени;

$\boldsymbol{p} = (35,20,15,35,15)$ – вектор цен.

Тогда искомые величины будут представлять собой соответствующие произведения вектора-строки ассортимента $\boldsymbol{q}$ на три других вектора-столбца:

$$S = \overline{q}\,\overline{s}^T = 70 + 30 + 200 + 120 + 200 = 620 \text{ кг},$$

$$T = \overline{q}\,\overline{t}^T = 60 + 30 + 100 + 150 + 120 = 460 \text{ часов},$$

$$P = \overline{q}\,\overline{p}^T = 350 + 300 + 450 + 1050 = 2150 \text{ денежных единиц}.$$

<u>Пример 2.</u> Компания выпускает четыре вида изделий, используя четыре вида сырья, нормы расхода которого даны как элементы матрицы $\boldsymbol{A}$:

$$\begin{array}{cc} & \text{Вид сырья} \\ & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \quad \text{Вид изделия} \end{array}$$

Определить затраты сырья каждого вида при плане выпуска каждого вида изделия: соответственно 30, 20, 40 и 50 ед.

- Решение. Составим вектор-план выпуска продукции

$\boldsymbol{q}$ = (30,20,40,50).

- Решение задачи дается вектором затрат, координаты которого и являются величинами затрат сырья по каждому виду изделия: этот вектор вычисляется как произведение вектора $\boldsymbol{q}$ на матрицу $\boldsymbol{A}$:

$$\bar{q}A = (30,20,40,50)\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120+100+200+150 \\ 90+120+120+200 \\ 60+60+40+250 \\ 30+80+240+150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 470 \\ 530 \\ 410 \\ 500 \end{pmatrix}.$$