

# ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Лекция 3

ПРИМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

## §1. НАХОЖДЕНИЕ РАНГА МАТРИЦЫ

- Пусть  $A$  - прямоугольная матрица размера  $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad A = \|a_{ij}\|_{m \times n}.$$

- Пусть в матрице  $A$  произвольным образом выбраны  $l$  строк и  $l$  столбцов, где  $l \leq \min(m; n)$ . Элементы, стоящие на пересечении этих строк и столбцов образуют квадратную матрицу  $l$ -го порядка, определители которой называются минорами  $l$ -го порядка матрицы  $A$ .
- Рангом матрицы  $A$**  (обозначение -  $r(A)$  или  $\text{rang} A$ ) называется максимальный порядок миноров данной матрицы, не равных нулю. Минор, определяющий ранг матрицы, называется **базисным**.
- У матрицы базисный минор определяется неоднозначно.

Пример 1. Определить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Поскольку у матрицы  $A$  два нулевых столбца, то все миноры 3-го порядка равны нулю. Существует минор 2-го порядка, стоящий на пересечении 1-ой и 2-ой строк и 2-го и 3-го столбцов, неравный нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Поэтому,  $\mathit{rang}A=2$ . Данный минор является одним из базисных.

Из определения ранга матрицы следуют его *свойства*:

1.  $\mathit{rang}A \leq \min(m;n)$ , т.е. ранг матрицы не превосходит меньшего из ее размеров.

- 2.  $\text{rang}A=0$  тогда и только тогда, когда  $A$  - нулевая матрица.
- 3. Ранг матрицы не изменится, если из нее вычеркнуть все нулевые строки и столбцы.
- 4. Ранг матрицы не изменится при её транспонировании.
- 5. Элементарные преобразования матрицы не меняют её ранга.

- Пример 2. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Решение. В результате элементарных преобразований и применения свойств ранга получаем каноническую матрицу вида

поэтому, ранг матрицы  $A$  равен  $\text{rang}A = 2$ .

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- **§2. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА И ЕЕ НАХОЖДЕНИЕ**

- Пусть дана квадратная матрица порядка  $n$  :  $A = \left\| a_{ij} \right\|_{n \times n}$
- Квадратная матрица  $A^{-1}$  порядка  $n$  называется обратной к матрице  $A$ , если выполняется условие:  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ , где  $E$  - единичная матрица  $n$ -ого порядка.
- Матрица  $A$  называется **вырожденной (особенной)**, если её определитель равен нулю. Иначе, матрица  $A$  называется **невырожденной**.
- **Присоединенной матрицей** или матрицей **союзной** к матрице  $A$ , называется матрица вида:

где  $A_{ij}$  - алгебраические дополнения элементов  $a_{ij}$  матрицы  $A$ .

$$A^v = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

- **Теорема 1.** Для того, чтобы у матрицы  $A$  существовала обратная, необходимо и достаточно, чтобы исходная матрица  $A$  была невырожденная.
- Доказательство необходимости. Пусть матрица  $A$  имеет обратную матрицу  $A^{-1}$ ,
- т.е. справедливо равенство  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ .
- Применим к данному равенству свойство 11 определителей.
- Имеем  $|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |E| = 1$ , отсюда вытекает, что  $|A| \neq 0$  и  $|A^{-1}| \neq 0$ .
- Доказательство достаточности.
- Для доказательства используем присоединенную матрицу.
- Не теряя общности, докажем теорему для случая  $n = 3$ . Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ где по условию } \det A \neq 0.$$

- Присоединенная матрица  $A^V$  имеет вид:

$$A^V = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

- Вычислим их произведение  $A \cdot A^V$ :

$$A \cdot A^V = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} & \cdots & a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} & \cdots & a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} & \cdots & a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det A \cdot E.$$

- Тогда имеем:  $A \cdot A^V = \det A \cdot E$ . Аналогично рассуждая, получаем что  $A^V \cdot A = \det A \cdot E$ .
- Полученные равенства представим в виде:

$$A \cdot \frac{A^V}{\det A} = E, \quad \frac{A^V}{\det A} \cdot A = E.$$

- Тогда имеем, что

$$A^{-1} = \frac{A^V}{\det A}, \text{ или } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

- Что и требовалось доказать.

- Пример1. Найти матрицу  $A^{-1}$ , если  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ .

- Решение. Имеем  $\det A = -4$ . Найдем алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы  $A$ :



Очевидно:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6.$$

Составим присоединенную матрицу

$$A^v = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix}. \quad \text{Тогда } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^v = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 7/4 & -9/4 & 5/4 \\ 3/2 & -5/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

### §3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТРИЦ

В качестве примера, рассмотрим некоторые экономические задачи, использующие понятие матрицы.

• Пример 1. Фирма выпускает ежедневно пять видов продукции, основные экономические показатели которых

Вид продукции	Количество изделий	Расход сырья, кг/изд.	Норма времени изготовления, ч/изд.	Цена изделия, ден. ед./изд.
1	10	7	6	35
2	15	2	2	20
3	25	8	4	15
4	30	4	5	35
5	40	5	3	15

• Требуется определить следующие ежедневные показатели: расход сырья  $S$ , затраты рабочего времени  $T$  и стоимость  $P$  выпускаемой продукции предприятия.

Вид продукции	Количество изделий	Расход сырья, кг/изд.	Норма времени изготовления, ч/изд.	Цена изделия, ден. ед./изд.
1	10	7	6	35
2	15	2	2	20
3	25	8	4	15
4	30	4	5	35
5	40	5	3	15

Решение. Используя таблицу, составим четыре вектора-строки, полностью характеризующие производственный цикл:

$q = (10, 15, 25, 30, 40)$  - вектор ассортимента;

$s = (7, 2, 8, 4, 5)$  - вектор расхода сырья;

$t = (6, 2, 4, 5, 3)$  - вектор затрат рабочего времени;

$p = (35, 20, 15, 35, 15)$  – вектор цен.

Тогда искомые величины будут представлять собой соответствующие произведения вектора-строки ассортимента  $q$  на три других вектора-столбца:

$$S = \overline{\overline{qs}}^T = 70 + 30 + 200 + 120 + 200 = 620 \text{ кг,}$$

$$T = \overline{\overline{qt}}^T = 60 + 30 + 100 + 150 + 120 = 460 \text{ часов,}$$

$$P = \overline{\overline{qp}}^T = 350 + 300 + 450 + 1050 = 2150 \text{ денежных единиц.}$$

Пример 2. Компания выпускает четыре вида изделий, используя четыре вида сырья, нормы расхода которого даны как элементы матрицы  $A$ :

Вид сырья						
		1	2	3	4	
$A =$	(	2	1	2	1	) 1 2 3 4
	5	5	2	3	Вид изделия	
	1	2	3	3		
	2	3	4	5		

Определить затраты сырья каждого вида при плане выпуска каждого вида изделия: соответственно 30, 20, 40 и 50 ед.

- Решение. Составим вектор-план выпуска продукции  $q = (30, 20, 40, 50)$ .
- Решение задачи дается вектором затрат, координаты которого и являются величинами затрат сырья по каждому виду изделия: этот вектор вычисляется как произведение вектора  $q$  на матрицу  $A$ :

$$\bar{q}A = (30, 20, 40, 50) \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 + 100 + 200 + 150 \\ 90 + 120 + 120 + 200 \\ 60 + 60 + 40 + 250 \\ 30 + 80 + 240 + 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 470 \\ 530 \\ 410 \\ 500 \end{pmatrix}.$$