АКАДЕМИЯ
ГРАЖДАНСКОЙ ЗАЩИТЫ
МЧС РОССИИ

Теория оптимальной фильтрации и управления

Лекция № 7 (3/2)
«Основы статистического моделирования»

Учебные вопросы

1. Понятие статистического моделирования случайных процессов.
2. Статистическое моделирование случайных величин.

Литература

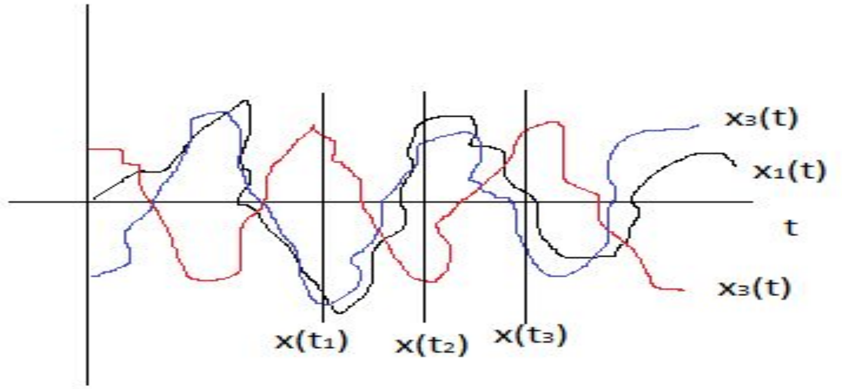
1. Асанин А.В., Войцеховский В.Ф. Основы теории оптимальной фильтрации: Учебное пособие. Химки. АГЗ, 2020.
2. Войцеховский В.Ф., Григорьева Е.Д. Основы теории оптимальной фильтрации: Учебное пособие. Химки. АГЗ, 2017.
3. Войцеховский В.Ф. Основы статистической теории радиоэлектронных систем: Учебное пособие. Химки. АГЗ, 2013.

1-ый учебный вопрос

«Понятие статистического моделирования случайных процессов»

Понятие статистического моделирования случайных процессов.

Пусть наблюдается случайный процесс X(t) который представлен набором реализаций $\{x_1(\mathrm{t}), x_2(t), \ldots x_n(t)\}$, где x_i (t) – реализация случайный процесса(см.Рис7.1)



Сечения случайного процесса(сл. величины Х$\in\{x_1, x_2 .. x_n\}$

Сечение случайного процесса представляет собой случайную величину появляющуюся с определенной вероятностью, т.е. мы можем представить случайную величину в виде определенных этапов (сечений СП). Моделирование случайного процесса X(t) можно осуществить методом моделирования случайных величинах на каждом этапе. Совокупность дает нам модель реализации случайного процесса.

Результат одного розыгрыша – это случайная величина, для выявления закономерностей которой необходимо многократный розыгрыш. Часто для получения результата розыгрыша случайная величина X, мы используем метод усреднения.

$\boldsymbol{x_1 = x(t_1) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j(t_1)}$, где **n –** число розыгрышей ; $\mathrm{в}_i$**–** ом сечении.

В общем виде запишем:

$$\boldsymbol{x_i = x(t_i) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j(t_i)} \quad \textbf{(7.1)}$$

2-ой учебный вопрос

«Статистическое моделирование случайных величин»

Статистическое моделирование случайных величин

Так как сечения случайного процесса представляют собой случайные величины то очевидно моделирование каждого этапа, это моделирование случайной величины. В качестве инструмента моделирования используют генераторы (датчики) случайных чисел.

Рассмотрим пример розыгрыша случайной величины, которая задана рядом вероятностей. (см.Табл1)

Дано: $X \epsilon (x_1, x_2, x_3, x_4,)$

Ряд вероятностей Таблица 1

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4
P_i	0.5	0.25	0.125	0.125

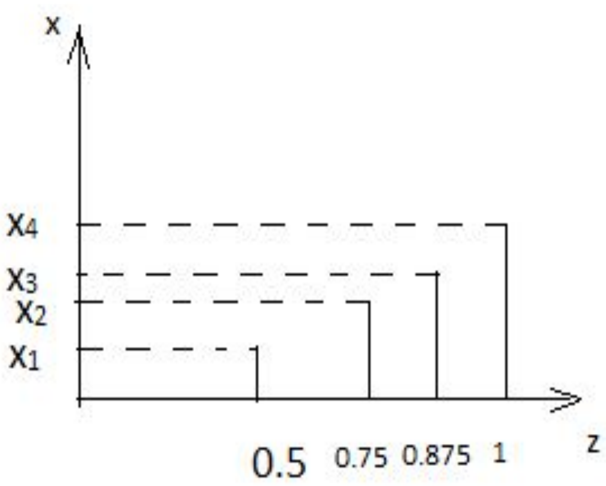
Причем P_i- соответствующая вероятности появления возможных значений случайной величины x_i

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$

Можно использовать круг , где соответствующая площадь соответствует определенной части от общей площади. На основе этого датчика случайных чисел, можно получить, распределение дискретных случайных величин распределенных по заданному закону. В данном примеры рассмотрен простейший способ розыгрыша случайной величины .

В этом случае можно использовать таблицу случайных чисел, распределенных равномерно на интервале [0,1] . Научно выбирается число z_i и при попадании в соответствующий интервал a_i, это соответствовать значению разыгрываемой случайной величины x_i. Соответствующие вероятности будет задаваться интервалами на оси z.

Пусть Z – распределение на интервале [0;1]. Требуется получить модель случайной величины X



$$P\{x^* = x_1\} = P\{z{=}a_n\} = P_n = P\{x{=}x_n\}$$

$0 \leq a_1 \leq 0.5$ $z \in a_1$ $x = x_1$

$0{,}5 \leq a_2 \leq 0.75$ $z \in a_2$ $x = x_2$

$0{,}75 \leq a_3 \leq 0.875$ $z \in a_3$ $x = x_3$

$0{,}875 \leq a_4 \leq 0.1$ $z \in a_4$ $x = x_4$

Моделирование непрерывной СВ .
(преобразование равномерного закона распределения в заданный)

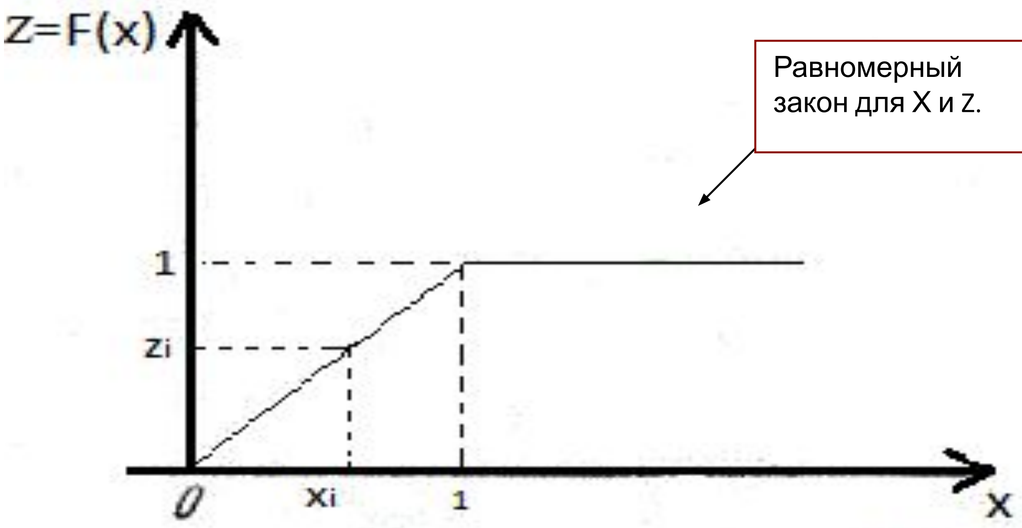
Дано: X – непрерывная СВ с известным законом распределения.

Требуется разыграть эту случайную величину X с заданным законом распределения, p(x) на основе преобразование случайных чисел Z, распределенных равномерно, на интервале от 0 до 1.

Рис 2 Плотность вероятностей случайной величины z .

1. Запишем функцию распределения случайной величины X $F_{\xi}(x)$

$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx$, 0≤F(x)≤1. (см.Рис 3)



Равномерный закон для X и Z.

2) $z \epsilon$ [0;1] – равномерное распределение случайной величины Z(на интервале от 0 до 1.)получим на основе датчика случайных чисел;

3) Получим z = F (x) , т.к. z и F(x) - изменяются от 0 до 1 .

4) x = $F^{-1}(z_i)$ – Находим X как обратную функцию от z, тем самым производим розыгрыш X с плотностью вероятностей *p(x)*.

Пример

- Требуется смоделировать случайную величину X , распределенную по экспоненциальному закону . Плотность вероятностей имеет вид $p(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, где λ – постоянная величина . $M[x]=\frac{1}{\lambda}$.

Решение

- 1.$F(x)=\int_0^x p(x)dx= \int_0^x \lambda e^{-\lambda x}$dx = $-e^{-\lambda x}$= 1-$e^{-\lambda x}$= z

2.$x = F^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda} ln(1-x)$.

3.Так как z распределена равномерно на интервале [0,1], то можно записать алгоритм моделирования случайной величины X в виде .

X=$\frac{1}{\lambda}\exp(1-z)^{-1}$= $\frac{1}{\lambda}\exp\frac{1}{z}$. (7.2)