



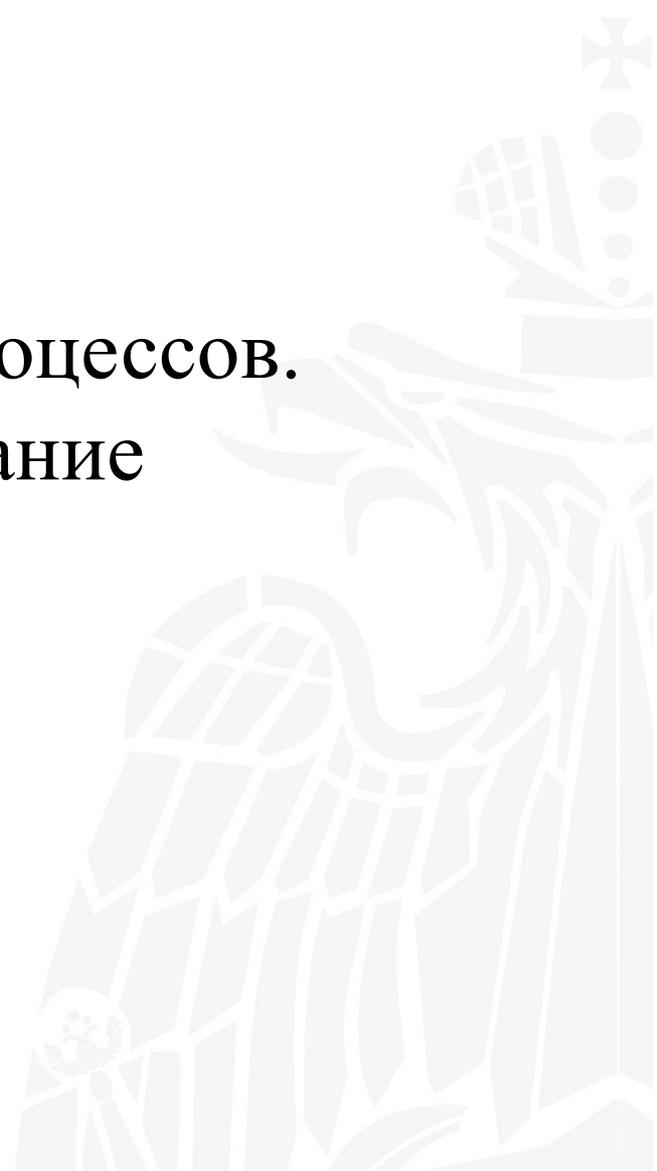
Теория оптимальной фильтрации и управления

Лекция № 7 (3/2)

«Основы статистического моделирования»



Учебные вопросы

1. Понятие статистического моделирования случайных процессов.
 2. Статистическое моделирование случайных величин.
- 



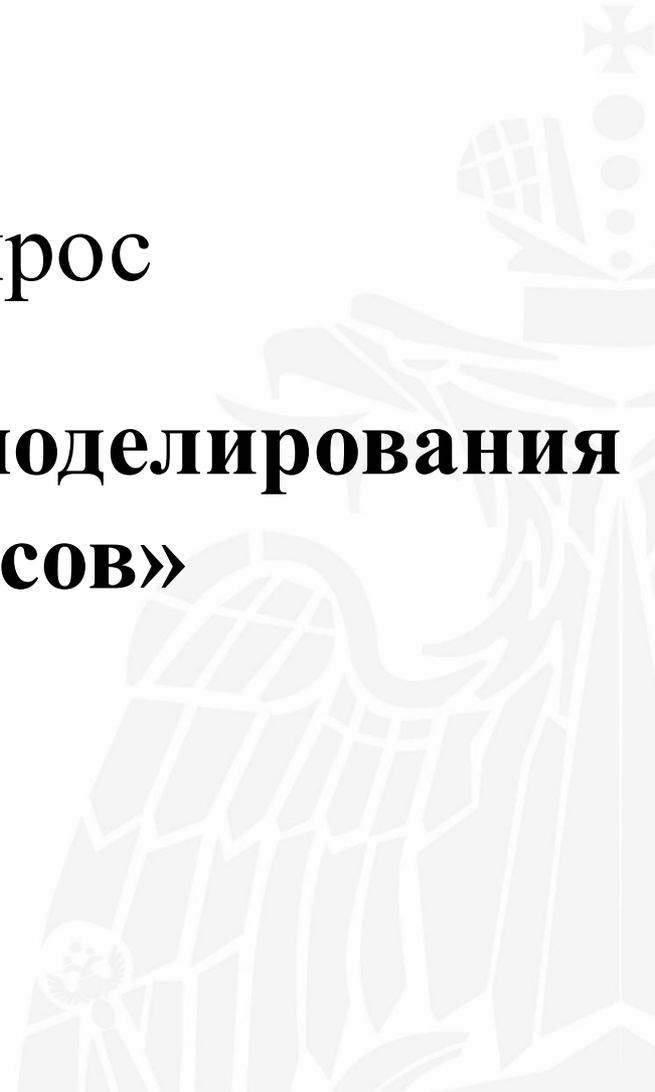
Литература

1. Асанин А.В., Войцеховский В.Ф. Основы теории оптимальной фильтрации: Учебное пособие. Химки. АГЗ, 2020.
2. Войцеховский В.Ф., Григорьева Е.Д. Основы теории оптимальной фильтрации: Учебное пособие. Химки. АГЗ, 2017.
3. Войцеховский В.Ф. Основы статистической теории радиоэлектронных систем: Учебное пособие. Химки. АГЗ, 2013.



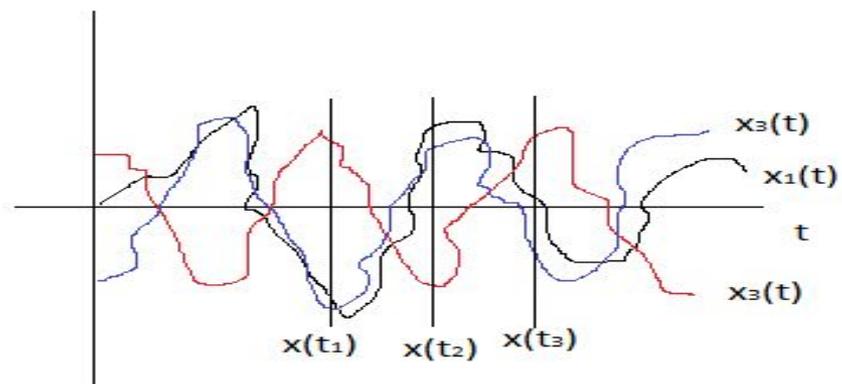
1-ый учебный вопрос

«Понятие статистического моделирования случайных процессов»



Понятие статистического моделирования случайных процессов.

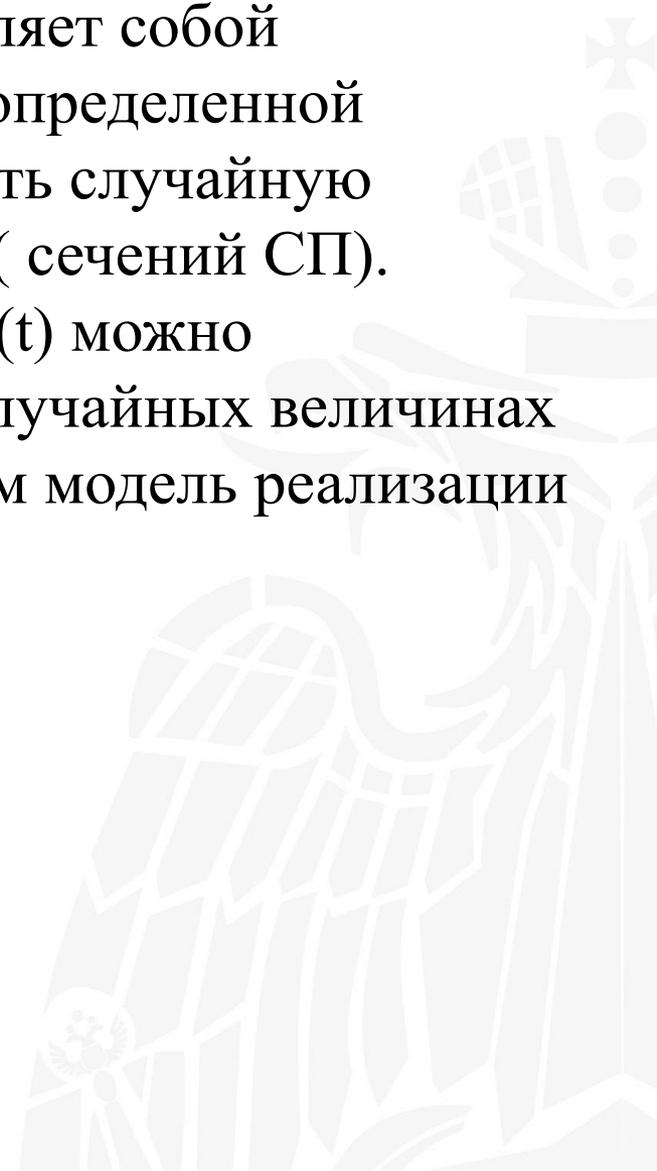
Пусть наблюдается случайный процесс $X(t)$ который представлен набором реализаций $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$, где $x_i(t)$ – реализация случайного процесса (см. Рис 7.1)



Сечения случайного процесса (сл. величины $X \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$)



Сечение случайного процесса представляет собой случайную величину появляющуюся с определенной вероятностью, т.е. мы можем представить случайную величину в виде определенных этапов (сечений СП). Моделирование случайного процесса $X(t)$ можно осуществить методом моделирования случайных величинах на каждом этапе. Совокупность дает нам модель реализации случайного процесса.

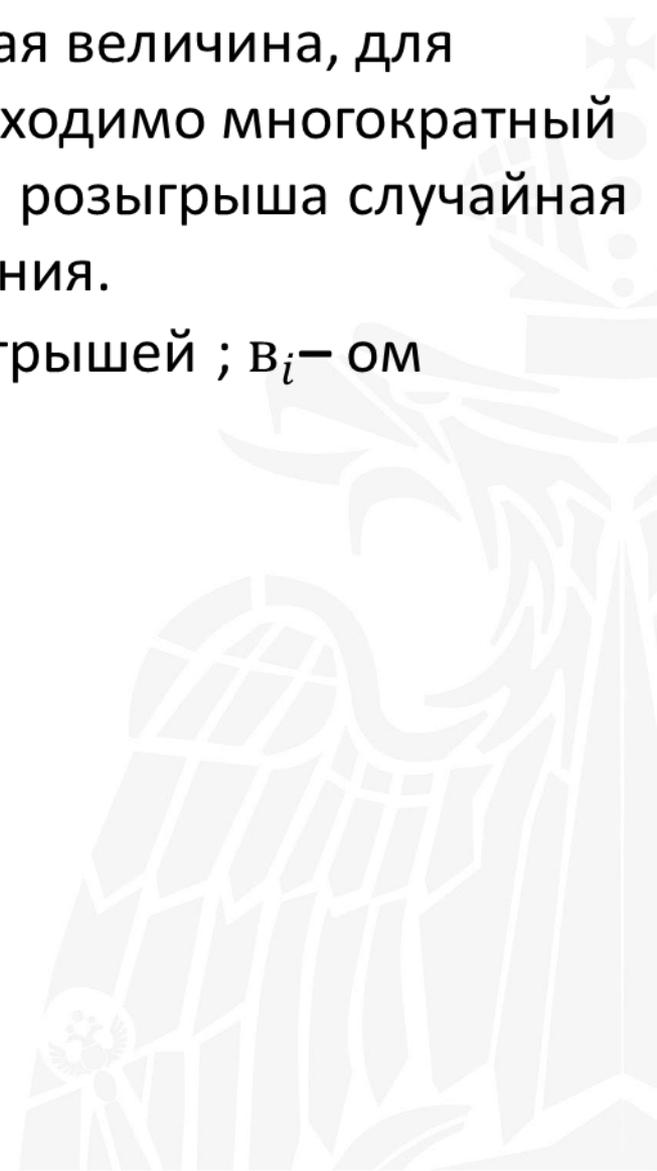




Результат одного розыгрыша – это случайная величина, для выявления закономерностей которой необходимо многократный розыгрыш. Часто для получения результата розыгрыша случайная величина X , мы используем метод усреднения.

$x_1 = x(t_1) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j(t_1)$, где n – число розыгрышей ; t_i – момент сечения.

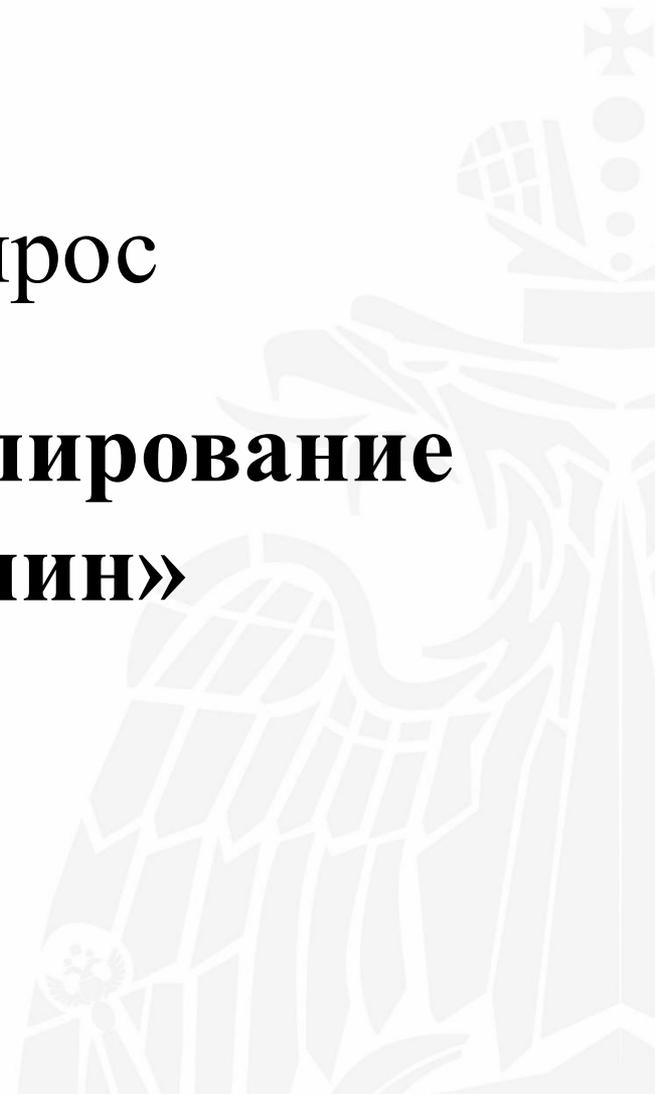
В общем виде запишем:

$$x_i = x(t_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j(t_i) \quad (7.1)$$




2-ой учебный вопрос

**«Статистическое моделирование
случайных величин»**



Статистическое моделирование случайных величин

Так как сечения случайного процесса представляют собой случайные величины то очевидно моделирование каждого этапа, это моделирование случайной величины. В качестве инструмента моделирования используют генераторы (датчики) случайных чисел.

Рассмотрим пример розыгрыша случайной величины, которая задана рядом вероятностей. (см.Табл1)



Дано: $X \in (x_1, x_2, x_3, x_4)$

Ряд вероятностей

Таблица 1

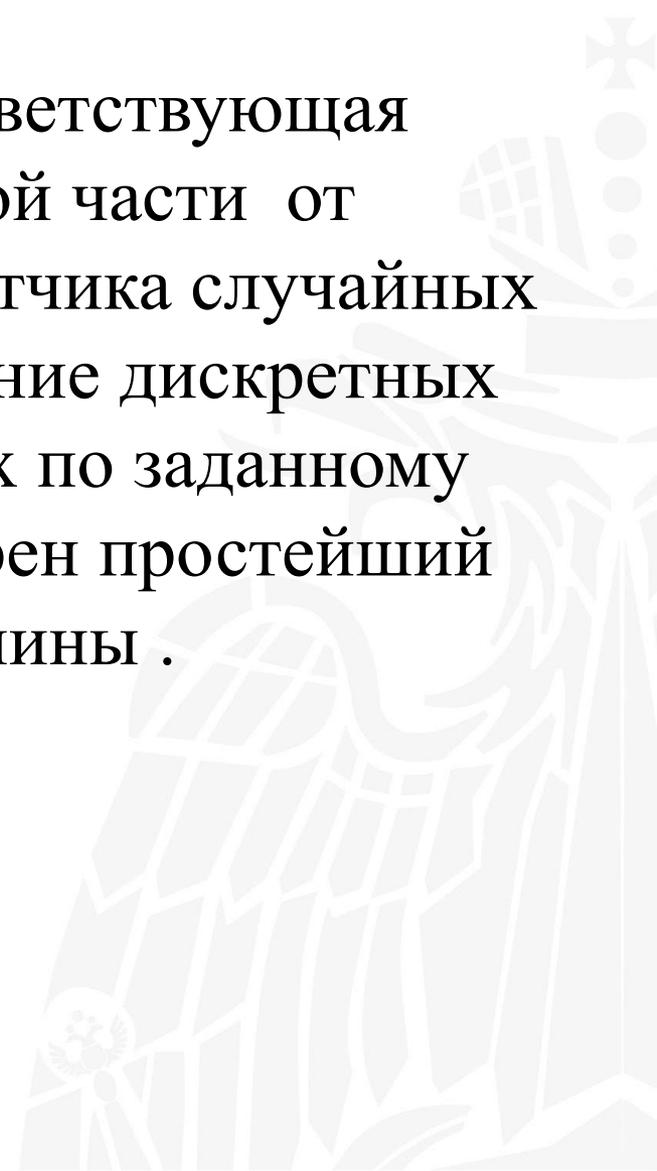
x_i	x_1	x_2	x_3	x_4
P_i	0.5	0.25	0.125	0.125

Причем P_i - соответствующая вероятности появления возможных значений случайной величины x_i

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1$$



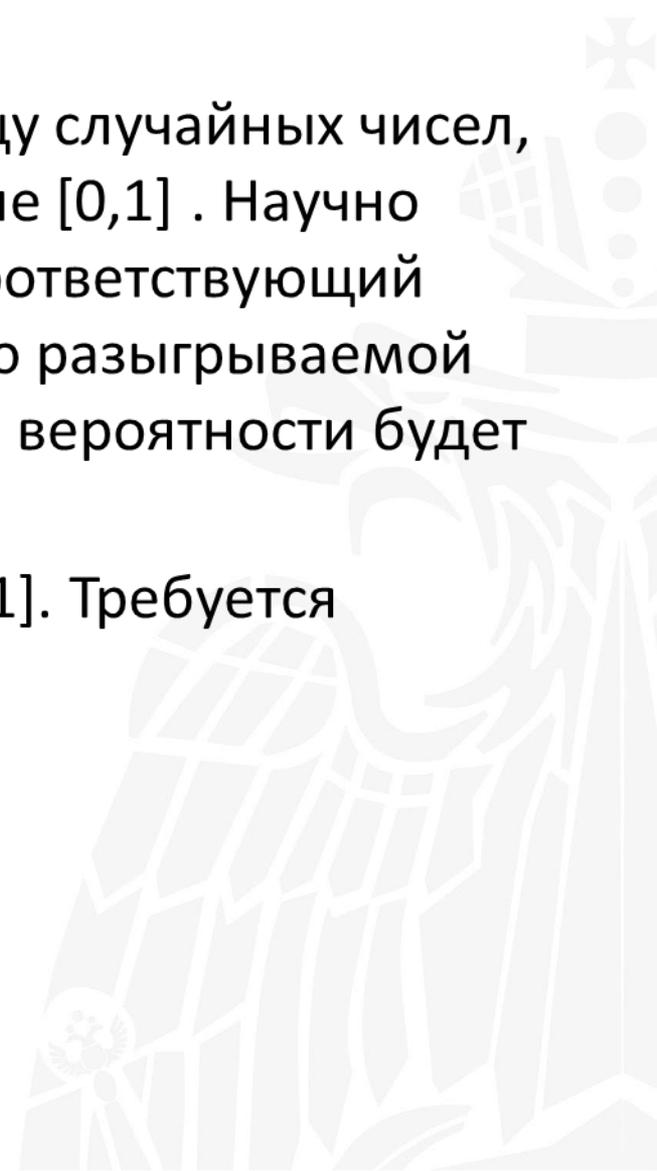
Можно использовать круг , где соответствующая площадь соответствует определенной части от общей площади. На основе этого датчика случайных чисел, можно получить, распределение дискретных случайных величин распределенных по заданному закону. В данном примере рассмотрен простейший способ розыгрыша случайной величины .

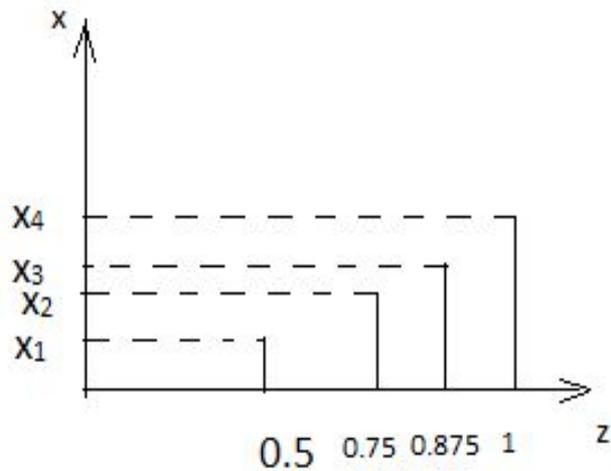




В этом случае можно использовать таблицу случайных чисел, распределенных равномерно на интервале $[0,1]$. Научно выбирается число z_i и при попадании в соответствующий интервал a_i , это соответствовать значению разыгрываемой случайной величины x_i . Соответствующие вероятности будет задаваться интервалами на оси z .

Пусть Z – распределение на интервале $[0;1]$. Требуется получить модель случайной величины X





$$P\{x^* = x_1\} = P\{z = a_n\} = P_n = P\{x = x_n\}$$

$$0 \leq a_1 \leq 0.5 \quad z \in a_1 \quad x = x_1$$

$$0,5 \leq a_2 \leq 0,75 \quad z \in a_2 \quad x = x_2$$

$$0,75 \leq a_3 \leq 0,875 \quad z \in a_3 \quad x = x_3$$

$$0,875 \leq a_4 \leq 1 \quad z \in a_4 \quad x = x_4$$

Моделирование непрерывной СВ . (преобразование равномерного закона распределения в заданный)

Дано: X – непрерывная СВ с известным законом распределения.
Требуется разыграть эту случайную величину X с заданным законом распределения, $p(x)$ на основе преобразование случайных чисел Z , распределенных равномерно, на интервале от 0 до 1.

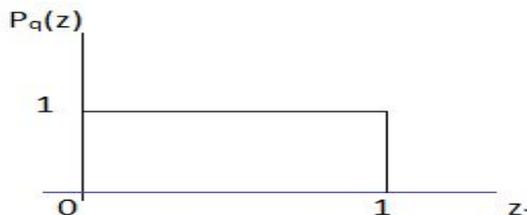
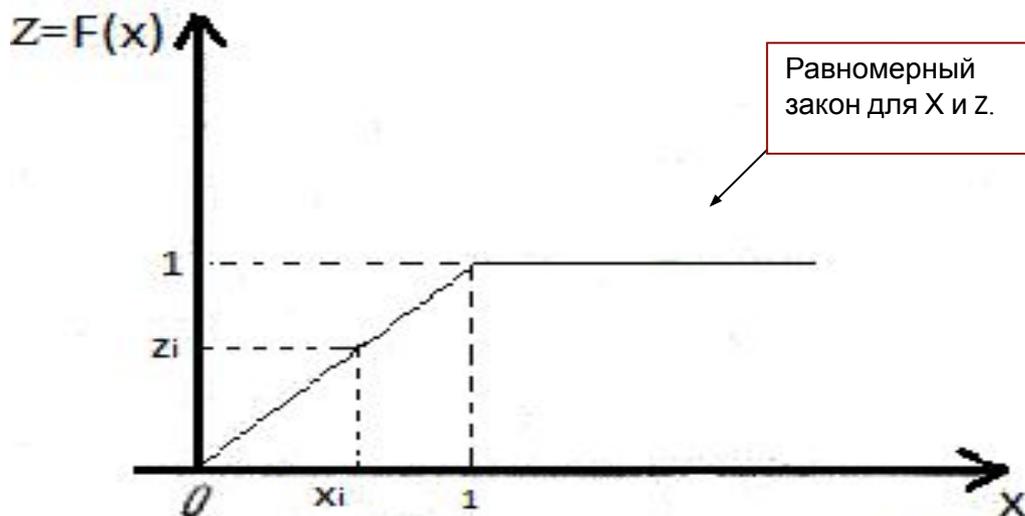


Рис 2 Плотность вероятностей случайной величины z .

1. Запишем функцию распределения случайной величины X $F_{\xi}(x)$

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx,$$

$0 \leq F(x) \leq 1$. (см.Рис 3)

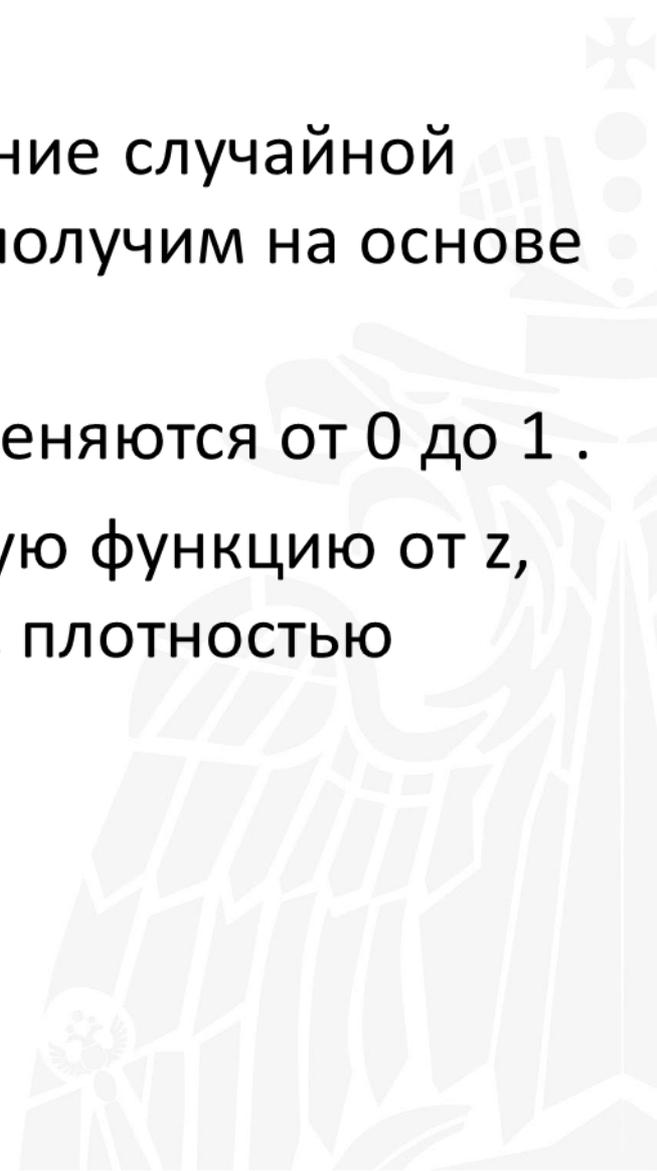




2) $z \in [0;1]$ – равномерное распределение случайной величины Z (на интервале от 0 до 1.) получим на основе датчика случайных чисел;

3) Получим $z = F(x)$, т.к. z и $F(x)$ - изменяются от 0 до 1.

4) $x = F^{-1}(z_i)$ – Находим X как обратную функцию от z , тем самым производим розыгрыш X с плотностью вероятностей $p(x)$.



Пример

• Требуется смоделировать случайную величину X ,
распределенную по экспоненциальному закону .

Плотность вероятностей имеет вид $p(x) = \lambda e^{-\lambda x}$,

где λ – постоянная величина . $M[x] = \frac{1}{\lambda}$.

Решение

$$1. F(x) = \int_0^x p(x) dx = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} = 1 - e^{-\lambda x} = z$$

$$2. x = F^{-1}(z) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - z).$$

3. Так как z распределена равномерно на интервале $[0, 1]$, то можно записать алгоритм моделирования случайной величины X в виде .

$$X = \frac{1}{\lambda} \exp(1 - z)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \exp \frac{1}{z}. \quad (7.2)$$