



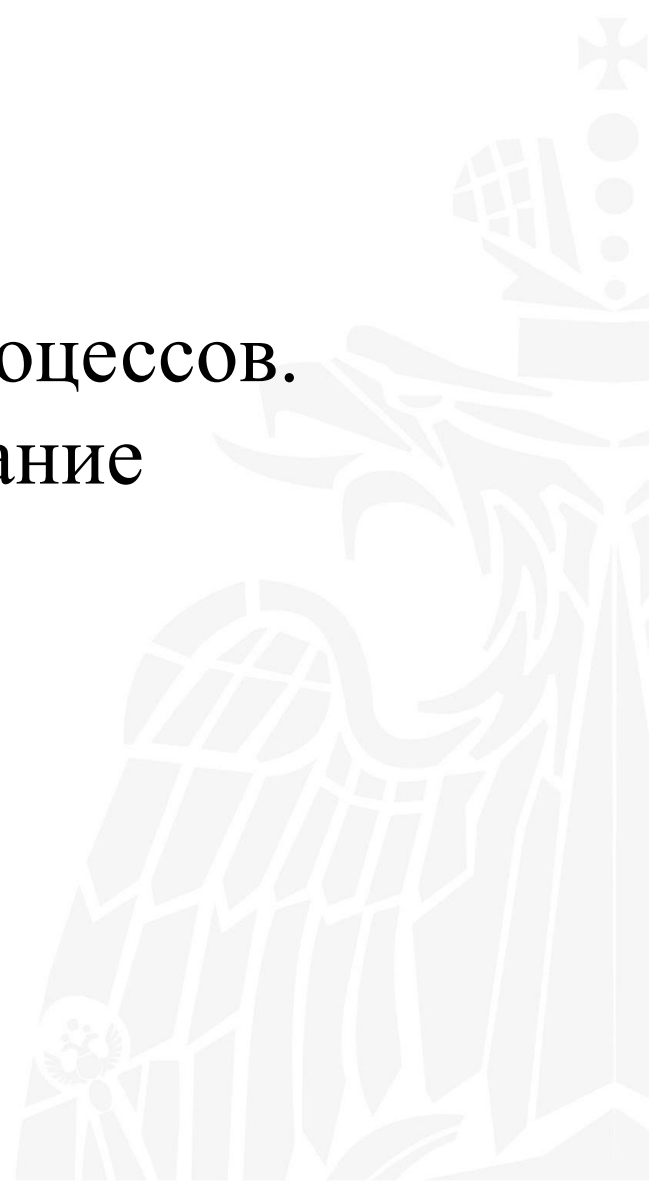
# Теория оптимальной фильтрации и управления

Лекция № 7 (3/2)

«Основы статистического моделирования»



# Учебные вопросы

1. Понятие статистического моделирования случайных процессов.
  2. Статистическое моделирование случайных величин.
- 



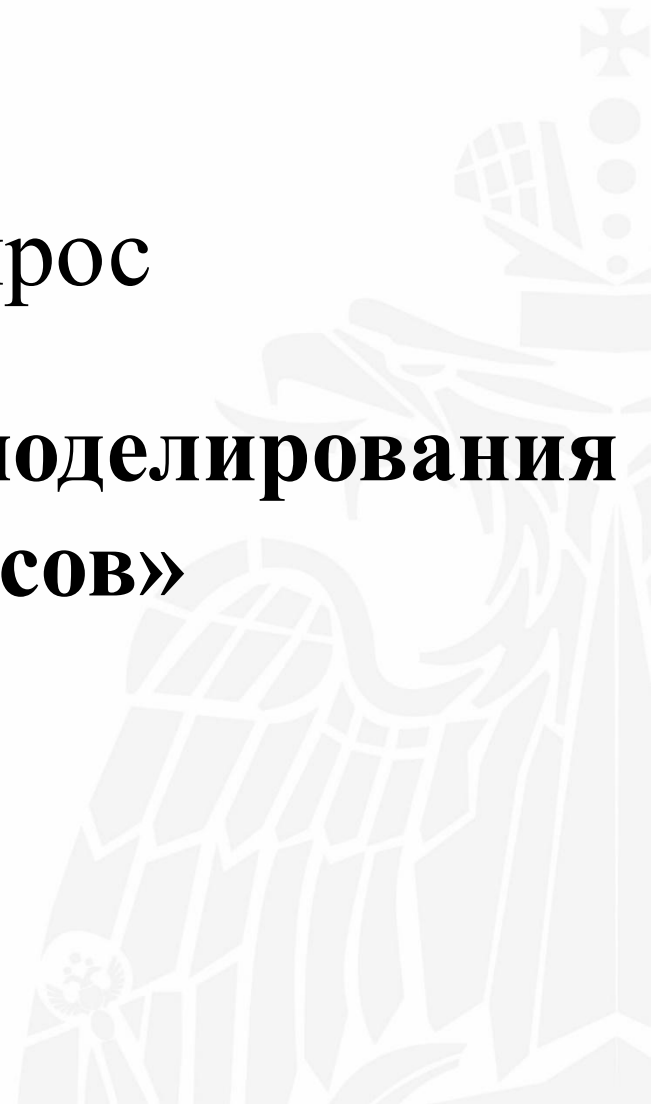
# Литература

1. Асанин А.В., Войцеховский В.Ф. Основы теории оптимальной фильтрации: Учебное пособие. Химки. АГЗ, 2020.
2. Войцеховский В.Ф., Григорьева Е.Д. Основы теории оптимальной фильтрации: Учебное пособие. Химки. АГЗ, 2017.
3. Войцеховский В.Ф. Основы статистической теории радиоэлектронных систем: Учебное пособие. Химки. АГЗ, 2013.



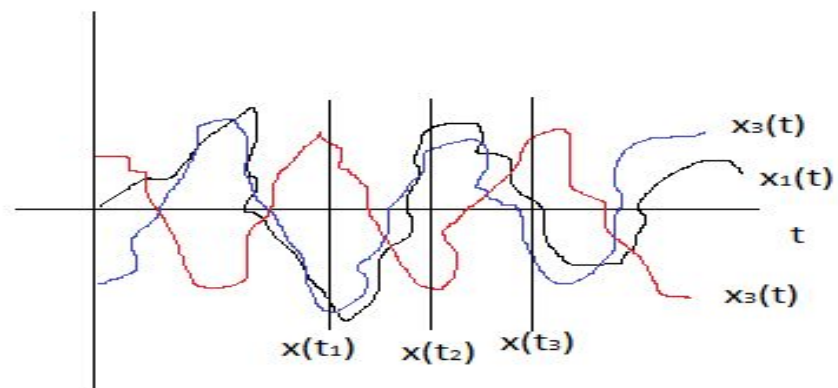
1-ый учебный вопрос

**«Понятие статистического моделирования случайных процессов»**




## Понятие статистического моделирования случайных процессов.

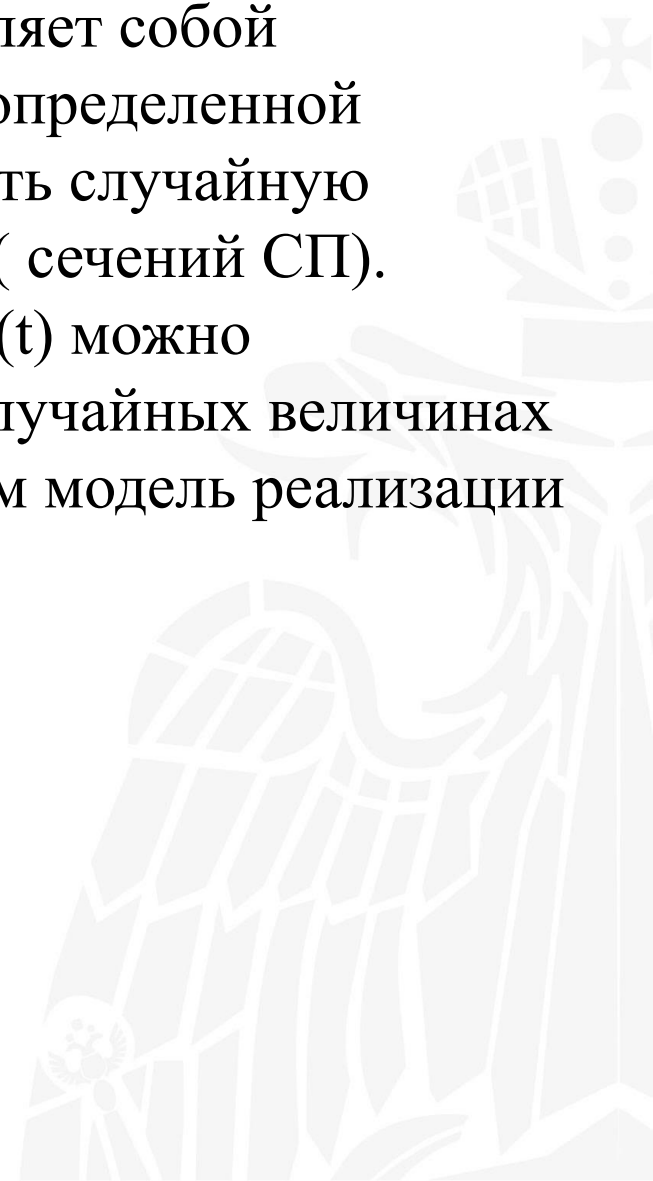
Пусть наблюдается случайный процесс  $X(t)$  который представлен набором реализаций  $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ , где  $x_i(t)$  – реализация случайного процесса (см. Рис 7.1)




Сечения случайного процесса (сл. величины  $X \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ )



Сечение случайного процесса представляет собой случайную величину появляющуюся с определенной вероятностью, т.е. мы можем представить случайную величину в виде определенных этапов ( сечений СП). Моделирование случайного процесса  $X(t)$  можно осуществить методом моделирования случайных величинах на каждом этапе. Совокупность дает нам модель реализации случайного процесса.

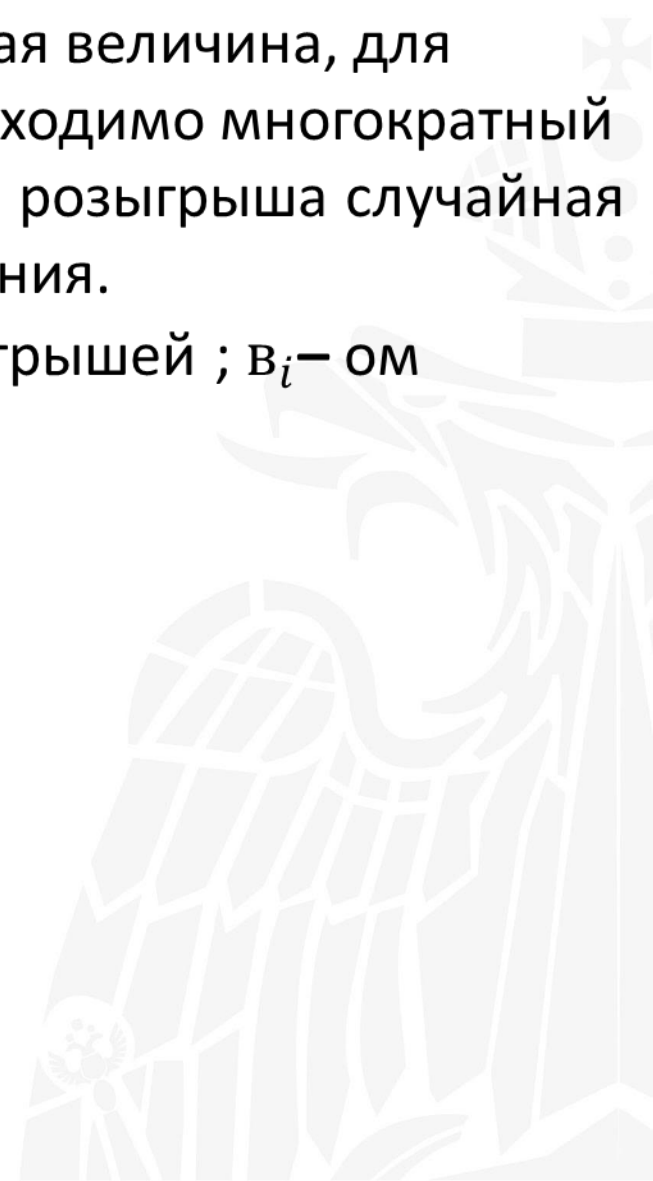




Результат одного розыгрыша – это случайная величина, для выявления закономерностей которой необходимо многократный розыгрыш. Часто для получения результата розыгрыша случайная величина  $X$ , мы используем метод усреднения.

$x_1 = x(t_1) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j(t_1)$  , где  $n$  – число розыгрышей ;  $v_i$  – ом сечении.

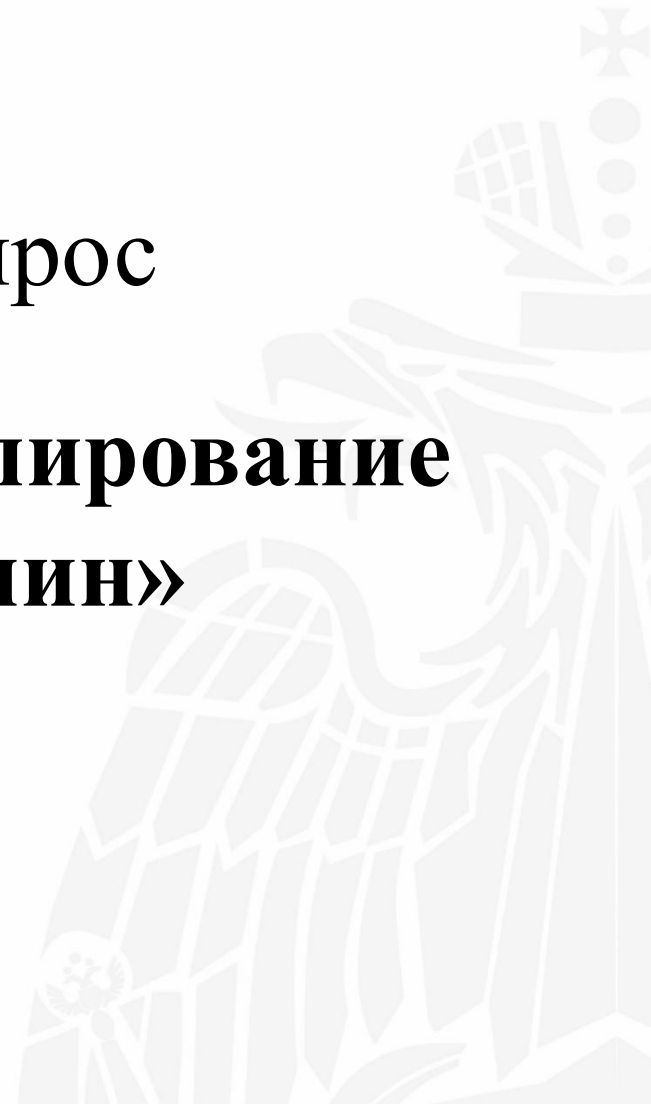
В общем виде запишем:

$$x_i = x(t_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j(t_i) \quad (7.1)$$




2-ой учебный вопрос

**«Статистическое моделирование  
случайных величин»**








# Статистическое моделирование случайных величин

Так как сечения случайного процесса представляют собой случайные величины то очевидно моделирование каждого этапа, это моделирование случайной величины. В качестве инструмента моделирования используют генераторы (датчики) случайных чисел.

Рассмотрим пример розыгрыша случайной величины, которая задана рядом вероятностей. (см.Табл1)



Дано:  $X \in (x_1, x_2, x_3, x_4)$


Ряд вероятностей

Таблица 1

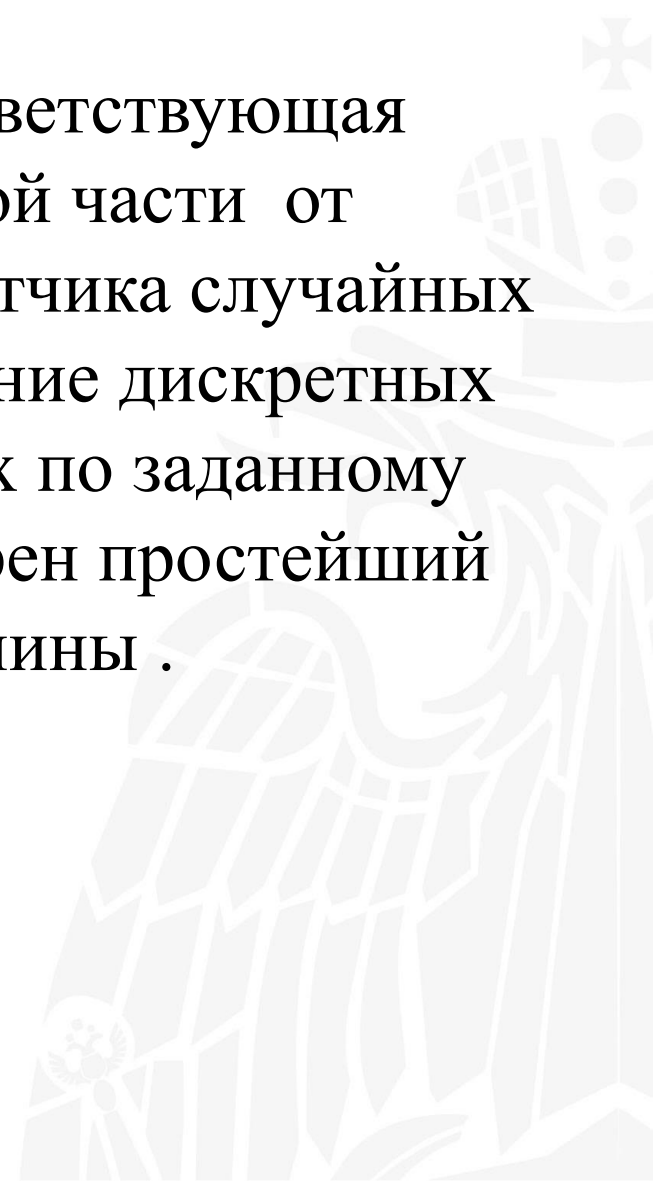
$x_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$P_i$	0.5	0.25	0.125	0.125


Причем  $P_i$ - соответствующая вероятности появления возможных значений случайной величины  $x_i$

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1$$



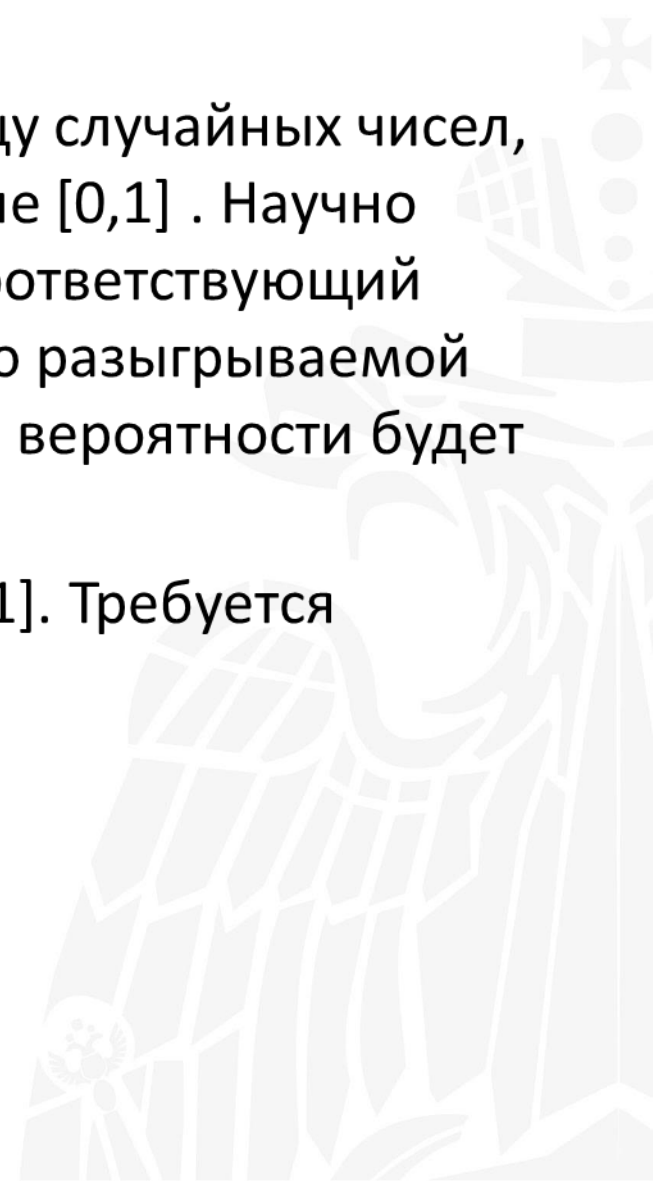
Можно использовать круг , где соответствующая площадь соответствует определенной части от общей площади. На основе этого датчика случайных чисел, можно получить, распределение дискретных случайных величин распределенных по заданному закону. В данном примере рассмотрен простейший способ розыгрыша случайной величины .

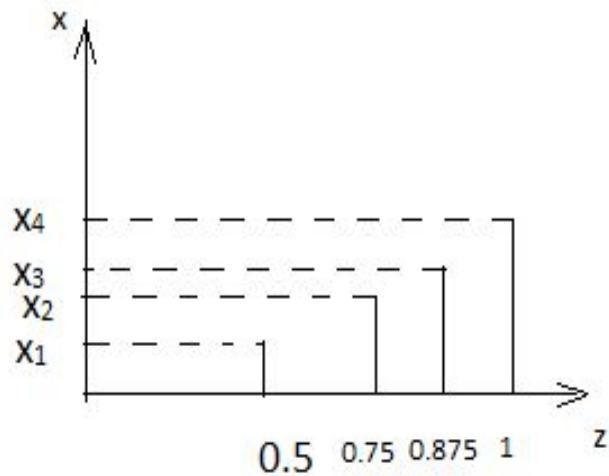




В этом случае можно использовать таблицу случайных чисел, распределенных равномерно на интервале  $[0,1]$ . Научно выбирается число  $z_i$  и при попадании в соответствующий интервал  $a_i$ , это соответствует значению разыгрываемой случайной величины  $x_i$ . Соответствующие вероятности будут задаваться интервалами на оси  $z$ .

Пусть  $Z$  – распределение на интервале  $[0;1]$ . Требуется получить модель случайной величины  $X$





$$P\{x^* = x_1\} = P\{z = a_n\} = P_n = P\{x = x_n\}$$

$$0 \leq a_1 \leq 0.5 \quad z \in a_1 \quad x = x_1$$

$$0,5 \leq a_2 \leq 0,75 \quad z \in a_2 \quad x = x_2$$

$$0,75 \leq a_3 \leq 0,875 \quad z \in a_3 \quad x = x_3$$

$$0,875 \leq a_4 \leq 1 \quad z \in a_4 \quad x = x_4$$

# Моделирование непрерывной СВ . (преобразование равномерного закона распределения в заданный)

Дано:  $X$  – непрерывная СВ с известным законом распределения.  
Требуется разыграть эту случайную величину  $X$  с заданным законом распределения,  $p(x)$  на основе преобразование случайных чисел  $Z$ , распределенных равномерно, на интервале от 0 до 1.

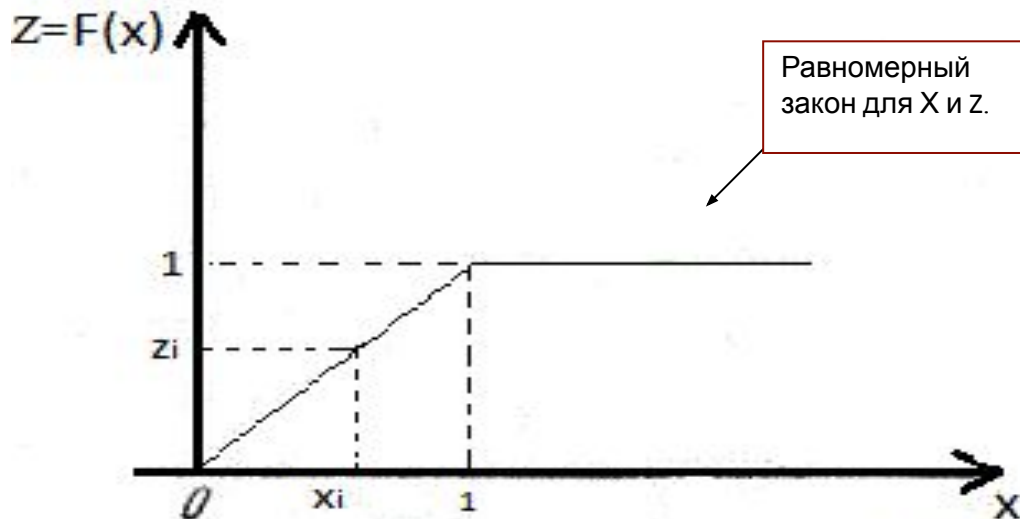



Рис 2 Плотность вероятностей случайной величины  $z$  .

1. Запишем функцию распределения случайной величины  $X$   $F_{\xi}(x)$

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx,$$

$0 \leq F(x) \leq 1$ . (см.Рис 3 )

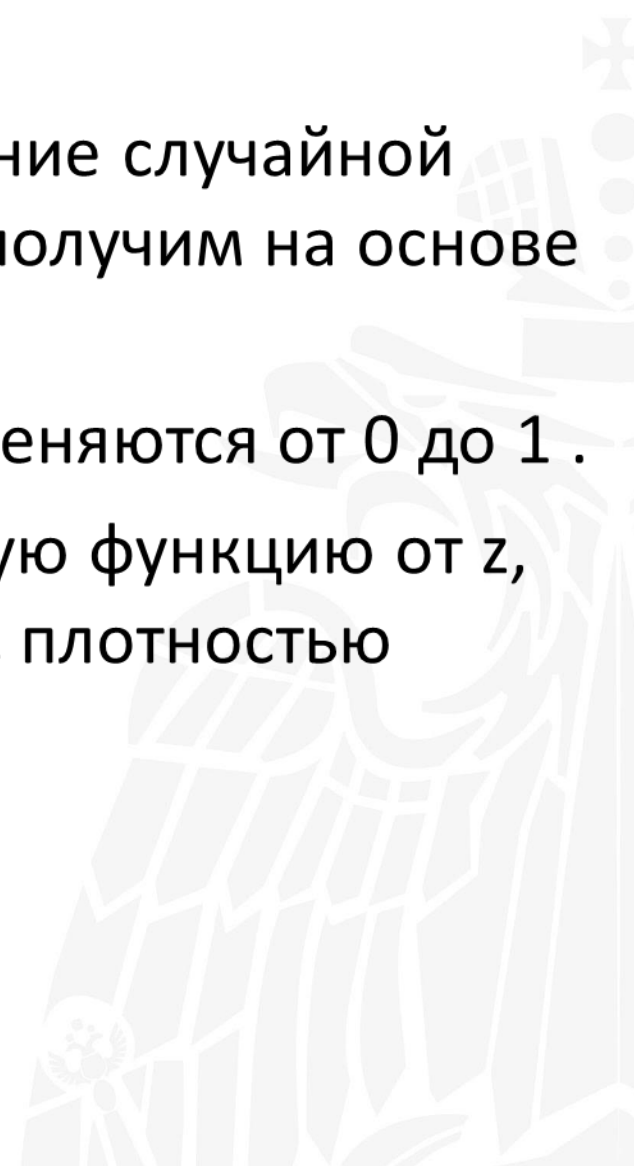




2)  $z \in [0;1]$  – равномерное распределение случайной величины  $Z$  (на интервале от 0 до 1.) получим на основе датчика случайных чисел;

3) Получим  $z = F(x)$ , т.к.  $z$  и  $F(x)$  - изменяются от 0 до 1.

4)  $x = F^{-1}(z_i)$  – Находим  $X$  как обратную функцию от  $z$ , тем самым производим розыгрыш  $X$  с плотностью вероятностей  $p(x)$ .





# Пример

• Требуется смоделировать случайную величину  $X$ ,  
распределенную по экспоненциальному закону .

Плотность вероятностей имеет вид  $p(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ,

где  $\lambda$  – постоянная величина .  $M[x] = \frac{1}{\lambda}$  .

# Решение

$$1. F(x) = \int_0^x p(x) dx = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} = 1 - e^{-\lambda x} = z$$

$$2. x = F^{-1}(z) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - z).$$

3. Так как  $z$  распределена равномерно на интервале  $[0, 1]$ , то можно записать алгоритм моделирования случайной величины  $X$  в виде .

$$X = \frac{1}{\lambda} \exp(1 - z)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \exp \frac{1}{z}. \quad (7.2)$$