Применение производной для исследования функций на монотонность

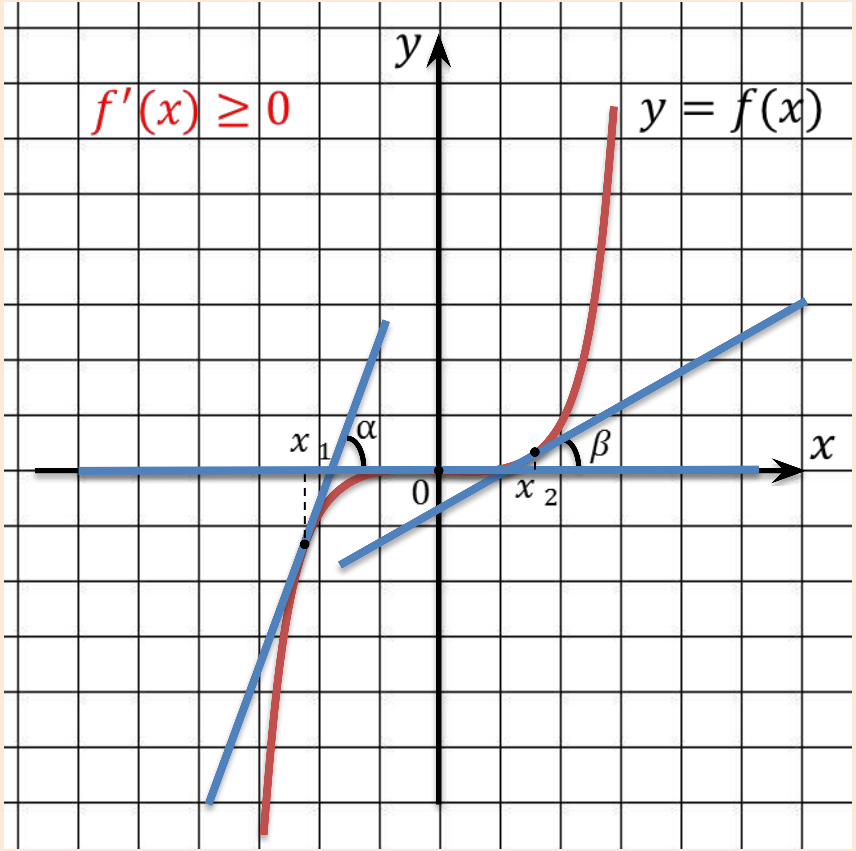
Упражнение:

- Составить уравнения касательных к графикам функций в точке с абсциссой a, если:

$f(x) = x^3 - 3x + 5, \quad a = -1$ $\qquad y = 7$

$f(x) = \sqrt{7 - 2x}, \quad a = 3$ $\qquad y = 4 - x$

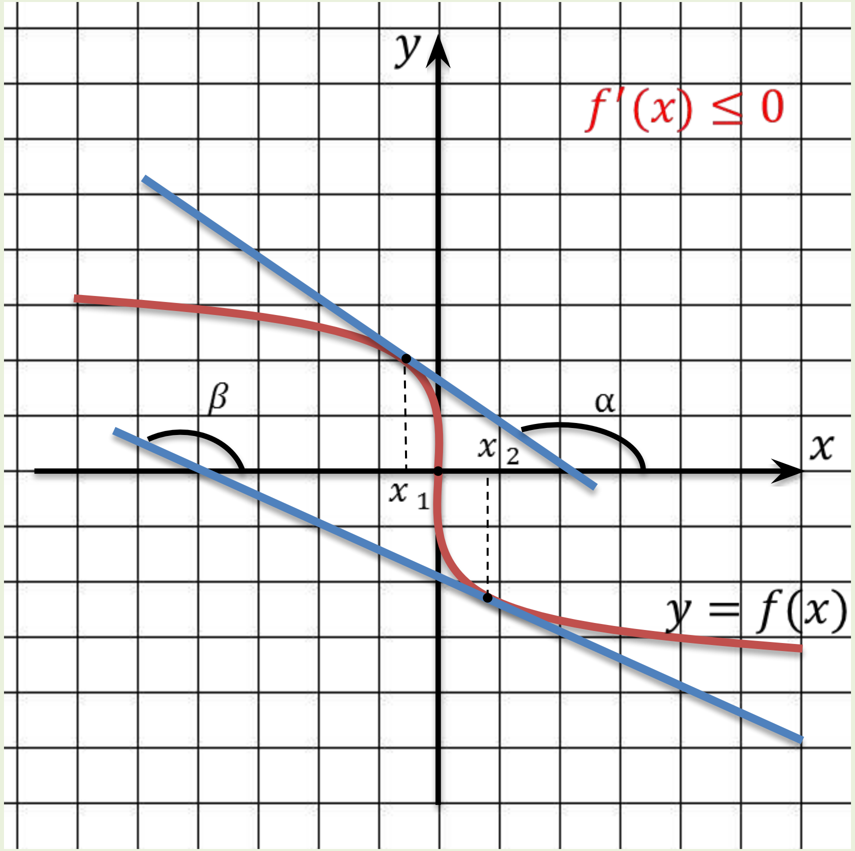
$f(x) = cos\frac{x}{3}, \quad a = 0$ $\qquad y = 1$



$tg\ \alpha > 0 \Rightarrow k > 0 \Leftrightarrow f'(x_1) > 0$

$tg\ \beta > 0 \Rightarrow k > 0 \Leftrightarrow f'(x_2) > 0$

$f'(0) = 0$



$tg\ \alpha < 0 \Rightarrow k < 0 \Leftrightarrow f'(x_1) < 0$

$tg\ \beta < 0 \Rightarrow k < 0 \Leftrightarrow f'(x_2) < 0$

- Если функция возрастает на промежутке и имеет на нем производную, то производная неотрицательна; если функция убывает на промежутке и имеет на нем производную, то производная неположительна.

Теорема 1. Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \geq 0$ (причем $f'(x) = 0$ либо не выполняется, либо выполняется лишь в конечном множестве точек), то функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке X.

Теорема 2. Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \leq 0$ (причем $f'(x) = 0$ либо не выполняется, либо выполняется лишь в конечном множестве точек), то функция $y = f(x)$ убывает на промежутке X.

$s = s(t)$

$v(t) > 0 \Rightarrow s(t)$ – возрастает

$v(t) < 0 \Rightarrow s(t)$ – убывает

$v(t) = s'(t)$

Пример:

- Доказать, что функция $y = cos\,x + 2x$ возрастает на всей числовой прямой.

Решение:

$y' = -\,sin\,x + 2$

$$-1 \leq sin\,x \leq 1$$

$$1 \geq -\,sin\,x \geq -1$$

$$-1 + 2 \leq -\,sin\,x + 2 \leq 1 + 2$$

$$1 \leq -\,sin\,x + 2 \leq 3$$

$y'(x) > 0$

Пример:

- Докажите, что функция $y = x^5 + 6x^3 - 7$ монотонна на всей числовой прямой; укажите характер монотонности.

Решение:

$y' = 5x^4 + 18x^2$

$x^n \geq 0$, если n – четное $\Rightarrow 5x^4 \geq 0, 18x^2 \geq 0$

$y' \geq 0$

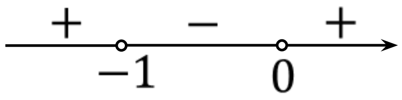
$y = x^5 + 6x^3 - 7$ – возрастает на всей числовой прямой

Пример:

- Исследовать на монотонность и построить график функции $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$.

Решение:

$y' = 6x^2 + 6x$



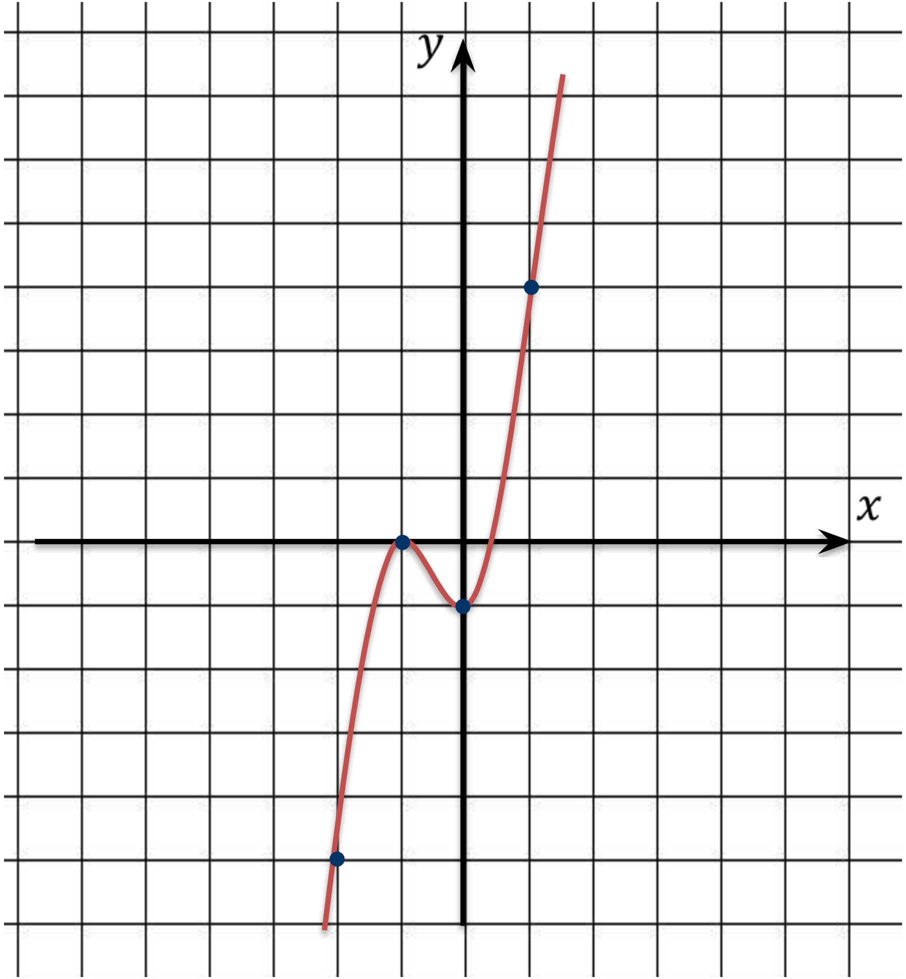
$6x^2 + 6x = 0$

$6x(x+1) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0$ или $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ или $x = -1$

$y' > 0$, при $x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$ функция возрастает

$y' < 0$, при $x \in (-1; 0)$ функция убывает

Функция возрастает при $x \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$, функция убывает при $x \in [-1; 0]$



На промежутке X:

		$y' > 0$		
		$y' < 0$		

Если $y' = 0$, то $y = C$

Теорема 3. Если во всех точках открытого промежутка X выполняется равенство $f'(x) = 0$, то функция $y = f(x)$ постоянна на X.

Теорема 1. Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \geq 0$ (причем $f'(x) = 0$ либо не выполняется, либо выполняется лишь в конечном множестве точек), то функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке X.

Теорема 2. Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \leq 0$ (причем $f'(x) = 0$ либо не выполняется, либо выполняется лишь в конечном множестве точек), то функция $y = f(x)$ убывает на промежутке X.

Теорема 3. Если во всех точках открытого промежутка X выполняется равенство $f'(x) = 0$, то функция $y = f(x)$ постоянна на X.