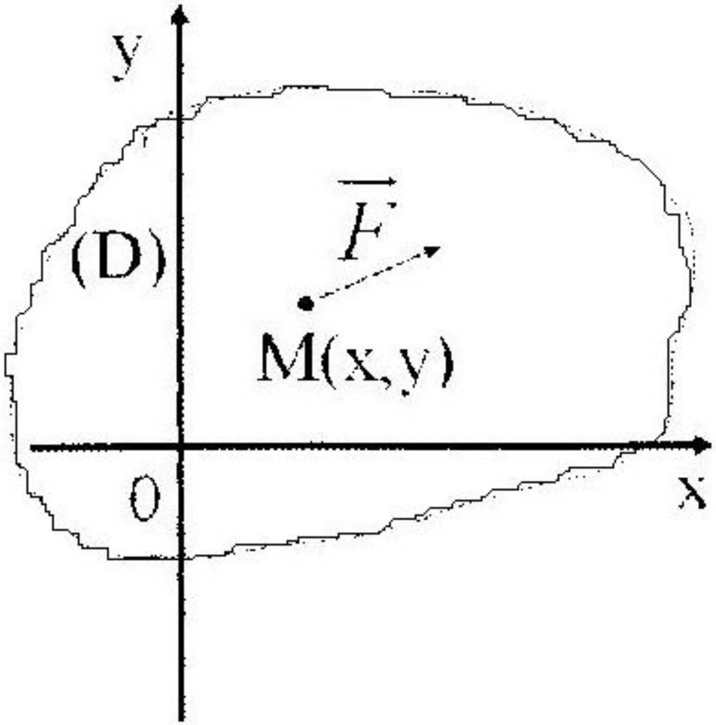
Глава 3. Криволинейные интегралы

3.1. Задача о работе плоского силового поля

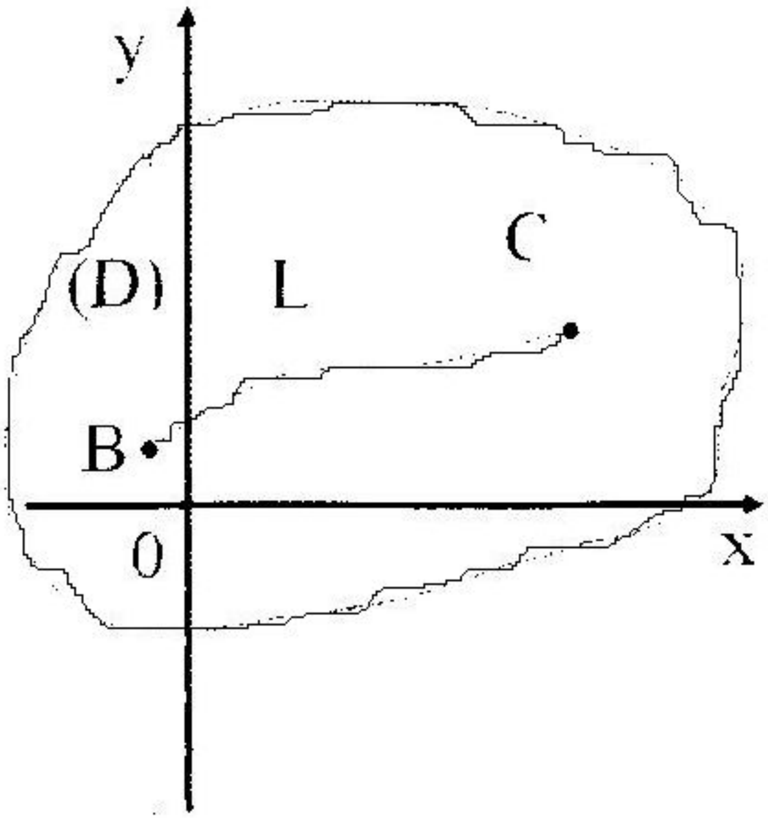
Пусть на координатной плоскости XOY дана некоторая замкнутая область (D) и пусть с каждой точкой $M(x, y)$



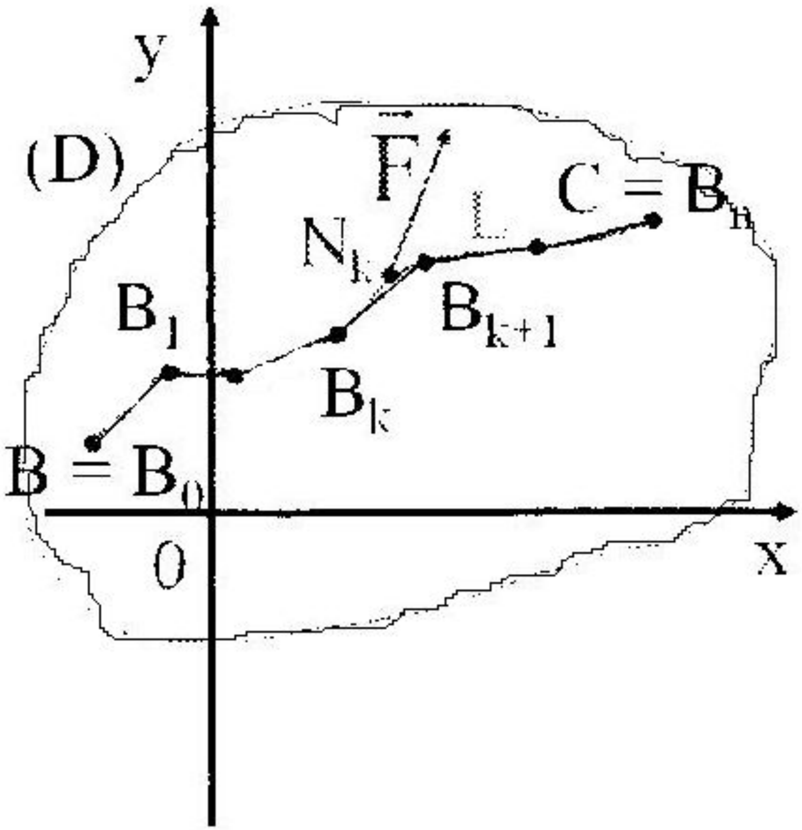
области (D) связан вектор $\bar{\mathrm{F}} = \bar{\mathrm{F}}(x, y)$, величина и направление которого зависят от координат точки M, представляющий силу, действующую на находящуюся в точке M массу.

В таком случае говорят, что в области D задано плоское силовое поле $\bar{\mathrm{F}}(x, y)$.

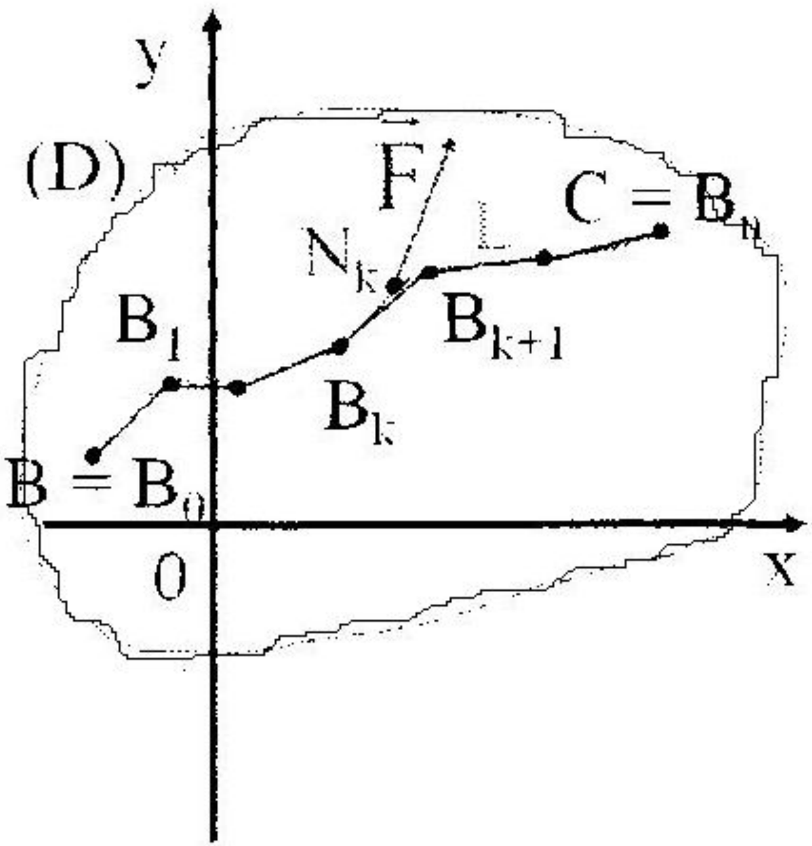
Пусть далее под действием силы поля материальная



точка движется по некоторой спрямляемой кривой L, расположенной в области (D). Требуется вычислить работу A данного силового поля при перемещении материальной точки по линии L из точки B в точку C.



На каждой дуге $B_k B_{k+1}$ возьмем произвольную т. $N_k(\xi_k, \eta_k)$. Допустим, что участок пути $B_k B_{k+1}$ прямолинеен (т.е. дугу $B_k B_{k+1}$ заменим хордой $[B_k B_{k+1}]$) и условимся считать, что при движении точки по отрезку $[B_k B_{k+1}]$ на нее действует постоянная сила, равная силе, приложенной в т. $N_k(\xi_k, \eta_k)$: $\bar{F}_k = \bar{F}(\xi_k, \eta_k)$.



Тогда работа ΔA_k силы

$\vec{F}_k$ на отрезке $[B_k B_{k+1}]$

будет равна

(1) $\Delta A_k = \left|\vec{F}_k\right| \cdot \left|\overrightarrow{B_k B_{k+1}}\right| \cdot \cos\varphi$,

где φ - угол между векторами

$\vec{F}$ и $\overrightarrow{B_k B_{k+1}}$, или

$\Delta A_k = (\vec{F}_k \cdot \overrightarrow{B_k B_{k+1}})$.

Обозначим проекции силы $\vec{F}$ на координатные оси OX и OY соответственно $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, тогда $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ и, следовательно $\vec{F}(\xi_k, \eta_k) = P(\xi_k, \eta_k)\vec{i} + Q(\xi_k, \eta_k)\vec{j}$.

Проекции вектора $\overrightarrow{B_k B_{k+1}}$ соответственно на оси OX и OY равны.........

Так как проекции вектора $\overrightarrow{B_k B_{k+1}}$ на оси OX и OY соответственно равны

$x_{k+1} - x_k = \Delta x_k$, $y_{k+1} - y_k = \Delta y_k$,

то $\overrightarrow{B_k B_{k+1}} = \Delta x_k \vec{i} + \Delta y_k \vec{j}$.

Тогда $\Delta A_k = (\vec{F}_k \cdot \overrightarrow{B_k B_{k+1}}) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\Delta A_k = (\vec{F}_k \cdot \overrightarrow{B_k B_{k+1}}) = P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k.$$

Для работы A_n силового поля вдоль ломаной $B_0 B_1 B_2 \ldots B_n$ имеем выражение

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta A_k = \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k. \quad (2)$$

Естественно ожидать, что сумма A_n будет тем точнее выражать работу A силового поля $\vec{F}(x, y)$, чем меньше будут длины частичных дуг $B_k B_{k+1}$.

Будем теперь неограничено увеличивать число n

делений дуги BC так, чтобы λ наибольшая

из длин частичных дуг $\overrightarrow{B_k B_{k+1}}$ стремилась к нулю.

Если существует $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} (P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k)$

и независит от выбранного способа разбиения дуги

AB на частичные и от выбора точек $N_k(\xi_k, \eta_k)$ на

частичных дугах, то этот предел примем за работу

силового поля $\vec{F}(x, y)$ при перемещении материальной

точки по дуге от точки B до точки C.

Итак, по определению, полагаем

$$(3)\ A = \lim_{\lambda \to 0} A_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \left(P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k \right)$$

В тех случаях, когда $Q(x, y) = 0$ или $P(x, y) = 0$, вместо суммы (3) будем иметь суммы

$$(4)\ \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k \text{ или } \sum_{k=0}^{n-1} Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k \quad (5)$$

К вычислению пределов сумм (2), (4), (5) приводит решение большого числа других важных задач теоретического и прикладного характера. Поэтому возникает задача изучить подобные суммы, отвлекаясь от конкретного содержания, и установить удобные способы вычисления пределов этих сумм.

3.2. Понятие криволинейного интеграла (по координатам)

Пусть вдоль спрямляемой кривой AB, лежащей в плоской области, определена функция $P(x, y)$. Разобьем дугу AB на n частичных дуг точками $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$. Обозначив через x_k, y_k координаты точки A_k и взяв на каждой частичной дуге $A_k A_{k+1}$ произвольно точку $N_k(\xi_k, \eta_k)$, вычислим значение функции P в этой точке $P(\xi_k, \eta_k)$ и умножим на величину проекции дуги $A_k A_{k+1}$ на ось OX, то есть на $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$.

Найдем сумму всех таких произведений

$$(1)\ \sigma = \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k.$$

Эта сумма называется интегральной суммой для функции $P(x, y)$ вдоль дуги AB по координате x.

Определение.

Криволинейным интегралом от функции $P(x,y)$ вдоль дуги AB по координате x называется предел, к которому стремится интегральная сумма σ, когда наибольшая из длин λ дуг $A_k A_{k+1}$ стремится к нулю, при условии, что этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения дуги AB на частичные, ни от выбора точек $N_k(\xi_k, \eta_k)$ на этих дугах.

Обозначается криволинейный интеграл вдоль дуги AB по координате x:

$$\int\limits_{\cup AB} P(x, y)dx.$$

Итак, $\displaystyle\int\limits_{\cup AB} P(x, y)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k$.

Аналогично определяется криволинейный интеграл вдоль кривой AB по координате y:

$$\int\limits_{\cup AB} P(x, y)dy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k, \text{ где}$$

$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ – проекция дуги AB на ось OY.

Если криволинейный интеграл $\int\limits_{\cup AB} P(x,y)dx$ или $\int\limits_{\cup AB} P(x,y)dy$ существует, то функция P называется интегрируемой вдоль дуги AB по координате соответственно x или y.

Пусть вдоль дуги AB определены две функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ и существуют интегралы $\int\limits_{\smile AB} P(x,y)dx$ и $\int\limits_{\smile AB} Q(x,y)dy$. Сумму этих интегралов обозначают

$\int\limits_{\smile AB} P(x,y)dx + \int\limits_{\smile AB} Q(x,y)dy$ и называют полным криволинейным интегралом (или криволинейным интегралом общего вида) вдоль дуги AB. Итак,

$$\int\limits_{\smile AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\smile AB} P(x,y)dx + \int\limits_{\smile AB} Q(x,y)dy.$$

Замечание 1.

Определение криволинейного интеграла не исключает случая совпадения точек A и B, то есть случая замкнутой кривой. Все предыдущие рассуждения остаются в силе. Только направление обхода замкнутой кривой должно быть каким-либо способом указано. Замкнутую кривую (или замкнутый контур) обычно обозначают какой-либо буквой, например L. Для обозначения криволинейного интеграла по замкнутому контуру употребляют символ

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Замечание 2.

Возвращаясь к задаче о работе силового поля, можно сказать, что в случае существования соответствующего криволинейного интеграла работа A силового поля

$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$

при перемещении материальной точки по дуге BC выражается криволинейным интегралом $A = \int\limits_{\cup BC} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$

3.3. Существование и вычисление криволинейного интеграла

Пусть спрямляемая кривая AB задана параметрически $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$, где функции φ, ψ, φ' непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$, причем значению параметра α соответствует т. A, значению

$t = \beta$ - т. B.

При изменении параметра t от α до β переменная точка описывает кривую AB в направлении от т. A до т. B.

Пусть далее вдоль дуги AB определена и непрерывна функция $P(x, y)$.

Докажем, что при сделанных допущениях существует криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\cup AB} P(x, y)dx.$$

Составим интегральную сумму для функции $P(x, y)$ вдоль дуги AB по координате x: $\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k$.

Обозначим через t_k $(k = \overline{0, n-1})$ значения параметра t, которым соответствуют делящие точки $A_k(x_k, y_k)$, а

через $\tau_k (k = \overline{0, n-1})$ значения параметра t, которыми определяются выбранные на дуге $A_k A_{k+1}$ точки $N_k(\xi_k, \eta_k)$. Таким образом, $x_k = \varphi(t_k)$, $y_k = \psi(t_k)$, $\xi_k = \varphi(\tau_k)$, $\eta_k = \psi(\tau_k)$, $\Delta x_k = \varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)$.

Тогда интегральная сумма будет иметь вид ....?

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k))(\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k))$$

Функция φ на каждом из отрезков $[t_k, t_{k+1}]$

удовлетворяет условиям т. Лагранжа | ПОЧЕМУ???

Следовательно, $\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = \ldots\ldots\ldots$???

$\varphi(t_{k+1})-\varphi(t_k)=\varphi'(\theta_k)\Delta t_k$, где $t_k<\theta_k<t_{k+1}$,

$\Delta t_k=t_{k+1}-t_k$.

Следовательно, интегральная сумма σ принимает

вид $\sigma=\sum\limits_{k=0}^{n-1}P(\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k))\cdot\varphi'(\theta_k)\Delta t_k$.

Эта сумма напоминает интегральную сумму

для функции $P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)$ одной

переменной на отрезке $[\alpha,\beta]$, однако таковой

не является. ПОЧЕМУ???

В силу того, что в каждом слагаемом этой суммы функции $P(\varphi(t),\psi(t))$ и $\varphi'(\mathrm{t})$ вычислены не в одной и той же точке отрезка $[t_k, t_{k+1}]$, а в различных: τ_k и θ_k (τ_k выбирается произвольно на $[t_k, t_{k+1}]$, а θ_k определяется т. Лагранжа).

Преобразуем сумму σ. Обозначим через

$\gamma_k = \varphi'(\theta_k) - \varphi'(\tau_k) \quad (k = \overline{0, n-1})$.

Тогда $\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k))\varphi'(\tau_k)\Delta t_k +$

$$+\sum_{k=0}^{n-1} P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k))\gamma_k \Delta t_k \quad (1)$$

Первая сумма в правой части равенства (1) есть интегральная сумма для функции $P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)$ на $[\alpha;\beta]$. В силу непрерывности $P(x,y),\varphi(t),\psi(t)$, $\varphi'(t)$ функция $P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)$ непрерывна на $[\alpha;\beta]$, следовательно существует предел этой суммы когда λ- наибольшая из длин дуг $A_k A_{k+1}$ стремится к нулю, а значит и $\Delta t_k \to 0$ и равен

$$\int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt.$$

Итак, $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=0}^{n-1} P(\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k))\varphi'(\tau_k)\Delta t_k =$

$$= \lim_{\Delta t_k\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} P(\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k))\varphi'(\tau_k)\Delta t_k =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)dt.$$

Покажем, что вторая сумма в правой части (1) стремится к нулю при $\lambda \to 0$. Действительно, функция $P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)$ непрерывна на $[\alpha; \beta]$, поэтому ограничена на $[\alpha; \beta]$, то есть существует $k>0$ такое, что при любом $t \in [\alpha; \beta]$

$$|P(\varphi(t), \psi(t))| < k \qquad (2).$$

В силу непрерывность $\varphi'(t)$ на $[\alpha;\beta]$ она равномерно непрерывна на $[\alpha;\beta]$, следовательно

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \theta, \tau \in [\alpha; \beta])$$

$$\left(|\theta - \tau| < \delta \Rightarrow |\varphi'(\theta) - \psi'(\tau)| < \frac{\varepsilon}{k(\beta - \alpha)} \right).$$

Осуществим разбиение дуги AB на части $A_k A_{k+1}$ такие, чтобы все разности Δt_k удовлетворяли условиям $|\Delta t_k| < \delta$, тогда и подавно $|\theta_k - \tau_k| < \delta$. Следовательно,

$$|\gamma_k| = |\varphi'(\theta_k) - \varphi'(\tau_k)| < \frac{\varepsilon}{k|\beta - \alpha|} \qquad (3)$$

В силу неравенств (2) и (3) $\left|\sum_{k=0}^{n-1} P(\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k))\gamma_k \Delta t_k\right| \leq$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left|P(\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k))\right|\left|\gamma_k\right|\left|\Delta t_k\right| < k\frac{\varepsilon}{k\,|\,\beta-\alpha\,|}\cdot|\,\beta-\alpha\,|=\varepsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} P(\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k))\gamma_k \Delta t_k =$

$$= \lim_{\Delta t_k\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} P(\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k))\gamma_k \Delta t_k = 0.$$

Итак, $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$ – существует, значит существует

$\int\limits_{\cup AB} P(x, y)dx = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k$. Но как доказано

последний предел равен $\int\limits_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)dt$.

Следовательно,

$$\int\limits_{\cup AB} P(x, y)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (4)$$

Замечание 1.

Можно показать, что найденный предел не зависит от способа параметризации дуги кривой AB, лишь бы выполнялись условия, наложенные на функции φ и ψ.

Замечание 2.

Аналогично доказывается, что если функция $y=\psi(t)$ имеет непрерывную производную на $[\alpha;\beta]$ и функция $Q(x,y)$ непрерывна во всех точках дуги AB, то криволинейный интеграл $\int\limits_{\cup AB} Q(x,y)dy$ существует и имеет место равенство

$$\int\limits_{\cup AB} Q(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)dt. \qquad (5)$$

Замечание 3.

Если кривая AB гладкая и, следовательно, обе функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны на $[\alpha;\beta]$ вместе со своими производными $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, то криволинейный интеграл $\int\limits_{\cup AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ существует и справедливо равенство

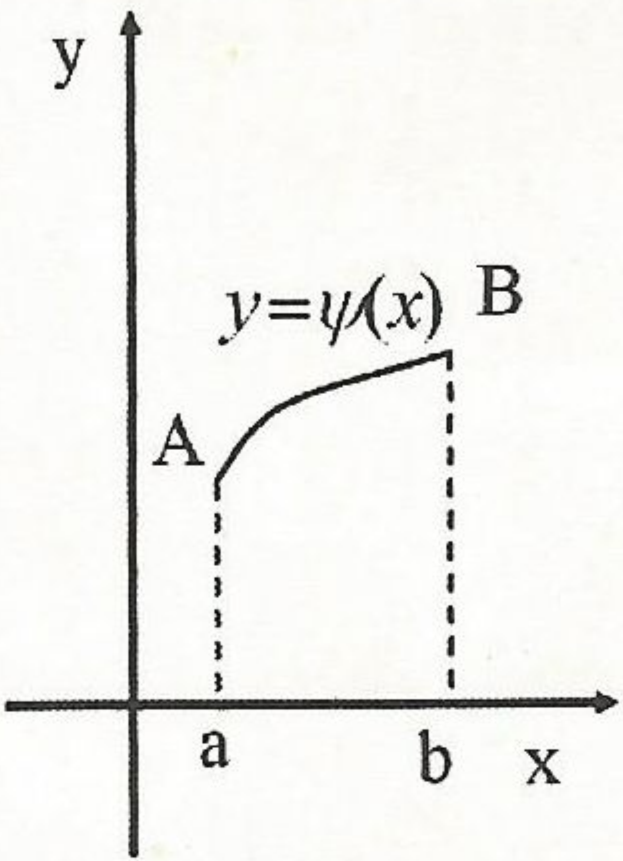
$$\int\limits_{\cup AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big(P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t) \Big) dt \qquad (6)$$

Замечание 4.

Формула (6) остается в силе и в случае замкнутого контура интегрирования при условии, что этот контур соответствует монотонному изменению параметра от α до β, такому, при котором каждая точка контура получается только при одном значении параметра t(исключая крайние значения параметра t).

Пусть теперь кривая AB задана явным уравнением $y = \psi(x)$, причем перемещению по этой кривой из точки A в точку B



соответствует изменение x от a до b.

Пусть функция ψ непрерывна во всех точках дуги AB. Данную кривую легко параметризировать.

Принимая за параметр t переменную x, то есть полагая $t = x$, получим

следующие параметрические уравнения дуги AB.......

$$\begin{cases} x = x \\ y = \psi(x) \end{cases} \qquad a \le x \le b.$$

Заметив, что $dx = x'dx$, применив формулу (4) получим

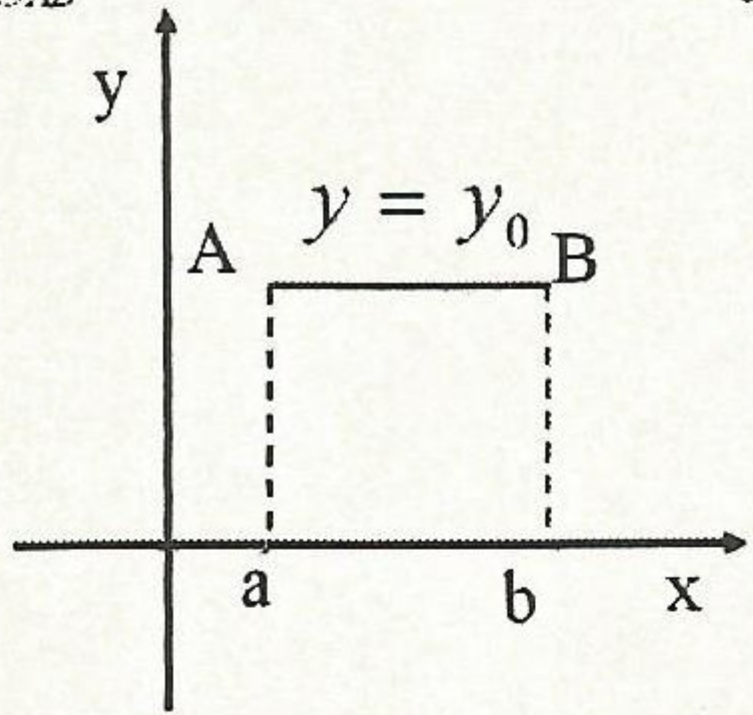
$$\int\limits_{\cup AB} P(x, y)dx = \int\limits_a^b P(x, \psi(x))dx.$$

Предполагая, что функция ψ имеет на отрезке $[a;b]$ непрерывную производную, а функция $Q(x, y)$ непрерывна вдоль дуги AB, согласно (5) получаем

$$\int\limits_{\cup AB} Q(x, y)dy = \int\limits_a^b Q(x, \psi(x))\psi'(x)dx.$$

Наконец,

$$\int\limits_{\smile AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_a^b\left(P(x,\psi(x))+Q(x,\psi(x))\psi'(x)\right)dx \qquad (7)$$



В частности, если кривая AB есть отрезок $y=y_0$, то $dy=0$ и $\int\limits_{\smile AB} Q(x,y)dy=0,$

поэтому $\int\limits_{\smile AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_a^b P(x,y_0)dx.$

Задание.

Получить формулу для вычисления

$$\int\limits_{\cup AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

если интегрирование ведется вдоль дуги, заданной уравнением $x = \varphi(y) \quad (c \le y \le d)$, где φ непрерывно дифференцируема на $[c;d]$.

(8) $$\int\limits_{\cup AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{c}^{d} \big(P(\varphi(y),y)\varphi'(y) + Q(\varphi(y),y)\big)\,dy.$$

Пример.

Вычислим $I = \int\limits_L (2 + xy^2)dx - (3 - x^2 y)dy$

вдоль прямой, содержащей точки $A(0;-2)$

и $B(1;0)$.

Уравнение прямой: $\dfrac{x-0}{1-0} = \dfrac{y+2}{0+2} \Rightarrow y = 2x - 2.$

$$I = \int\limits_0^1 \left(2 + x(2x-2)^2 - (3 - x^2(2x-2)) \cdot 2\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(8x^3 - 12x^2 + 4x - 4\right)dx = -4.$$

3.4. Основные свойства криволинейного интеграла

Отметим основные свойства криволинейного интеграла, непосредственно вытекающие из его определения. Эти свойства рассмотрим для интеграла $\int\limits_{\cup AB} P(x, y)dx.$

1. Если функция P интегрируема вдоль дуги AB, то функция kP, где $k \in R$, также интегируема вдоль дуги AB, причем

$$\int\limits_{\cup AB} kP(x,y)dx = k \int\limits_{\cup AB} P(x,y)dx$$

2. Если функции P_1 и P_2 интегрируемы вдоль дуги AB, то функция $P_1 \pm P_2$ также интегрируема вдоль дуги AB, причем

$$\int\limits_{\cup AB} (P_1 \pm P_2)(x,y)dx = \int\limits_{\cup AB} P_1(x,y)dx \pm \int\limits_{\cup AB} P_2(x,y)dx$$

3. (свойство аддитивности)

Если некоторой точкой С дуга AB разбита на две дуги AC и СB, и функция P интегрируема вдоль каждой из дуг AC и СB, то она интегрируема вдоль дуги AB, причем

$$\int_{\cup AB} P(x,y)dx = \int_{\cup AC} P(x,y)dx + \int_{\cup CB} P(x,y)dx$$

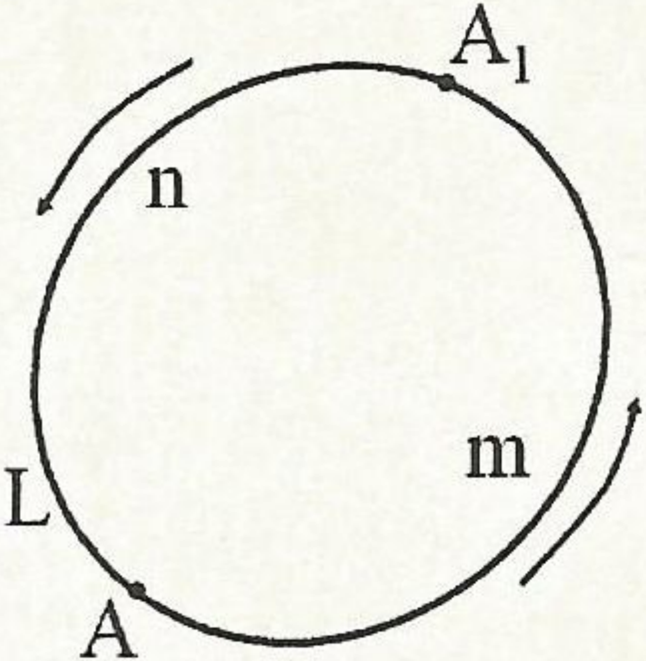
4. Если существует криволинейный интеграл $\int\limits_{\cup AB} P(x,y)dx$, то существует криволинейный интеграл $\int\limits_{\cup BA} P(x,y)dx$, причем $\int\limits_{\cup BA} P(x,y)dx = -\int\limits_{\cup AB} P(x,y)dx$, то есть при изменении направления интегрирования на противоположное, криволинейный интеграл изменяет знак на противоположный.

ДОКАЗАТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО.

5. Если функция P интегрируема по замкнутому контуру L, то величина криволинейного интеграла $\int_L P(x,y)dx$ не зависит от того какую точку контура выбрать за начало интегрирования.

Доказательство.

Пусть A и A_1 - любые две несовпадающие точки



замкнутого контура.

Тогда, рассматривая точку A как начало, а значит и конец контура L в направлении, указанном стрелкой, можно $\oint\limits_L$

представить в виде суммы $$\int\limits_{AmA_1nA} = \int\limits_{AmA_1} + \int\limits_{A_1nA} \qquad (1)$$

На основании чего записано это равенство?

Равенство (1) справедливо в силу свойства аддитивности. Если же рассматривать точку A_1 как начало обхода контура L, то

$$\int\limits_{A_1nAmA_1} = \int\limits_{A_1nA} + \int\limits_{AmA_1}. \quad (2)$$

Из равентсв (1) и (2) находим $\int\limits_{AmA_1nA} = \int\limits_{A_1nAmA_2}$.

Замечание.

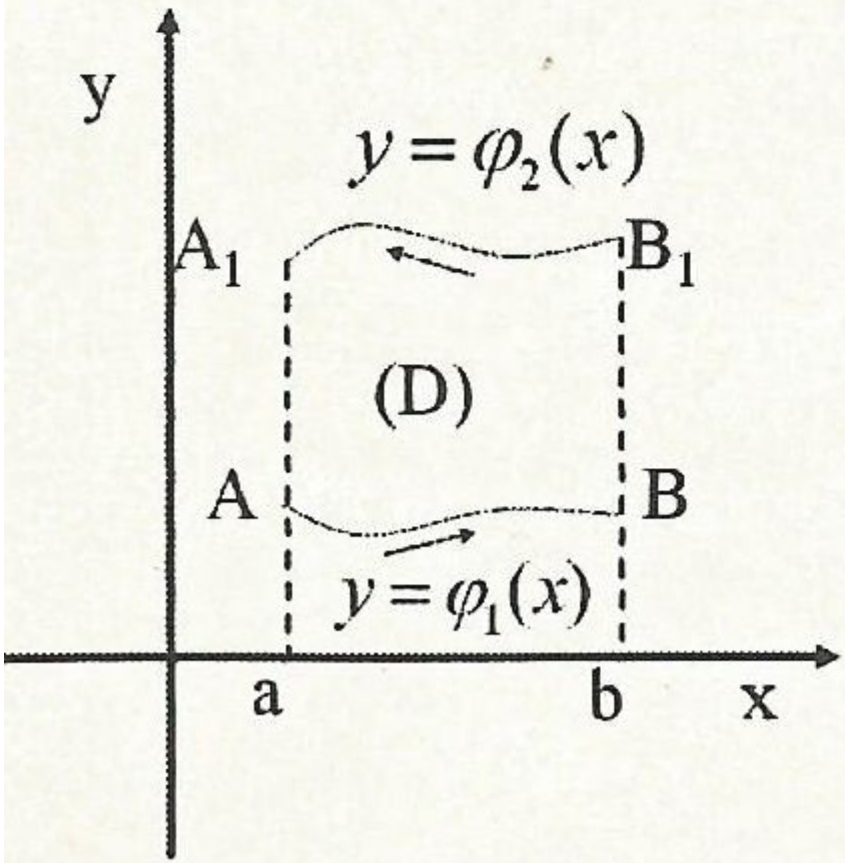
При вычислении криволинейного интеграла вдоль некоторой дуги направление интегрирования указывается порядком написания букв, обозначающих начало и конец этой дуги. Если контур замкнут и не имеет точек самопересечения, указание начальной и совпадающей с ней конечной точки, очевидно, не определяет направления, в котором осуществляется обход контура L.

Условимся называть положительным направление обхода замкнутого контура L то, при котором часть области, ограниченная контуром L, остается слева от наблюдателя. Противоположное этому направление будем называть отрицательным.

3.5. Формула Грина

Между криволинейным интегралом, взятым по замкнутой кривой L, ограничивающей некоторую область (D) и двойным интегралом по этой области существует определенная связь. Выведем формулу устанавливающую эту связь.

Рассмотрим на плоскости XOY замкнутую область (D), ограниченную контуром L, состоящим из кривых

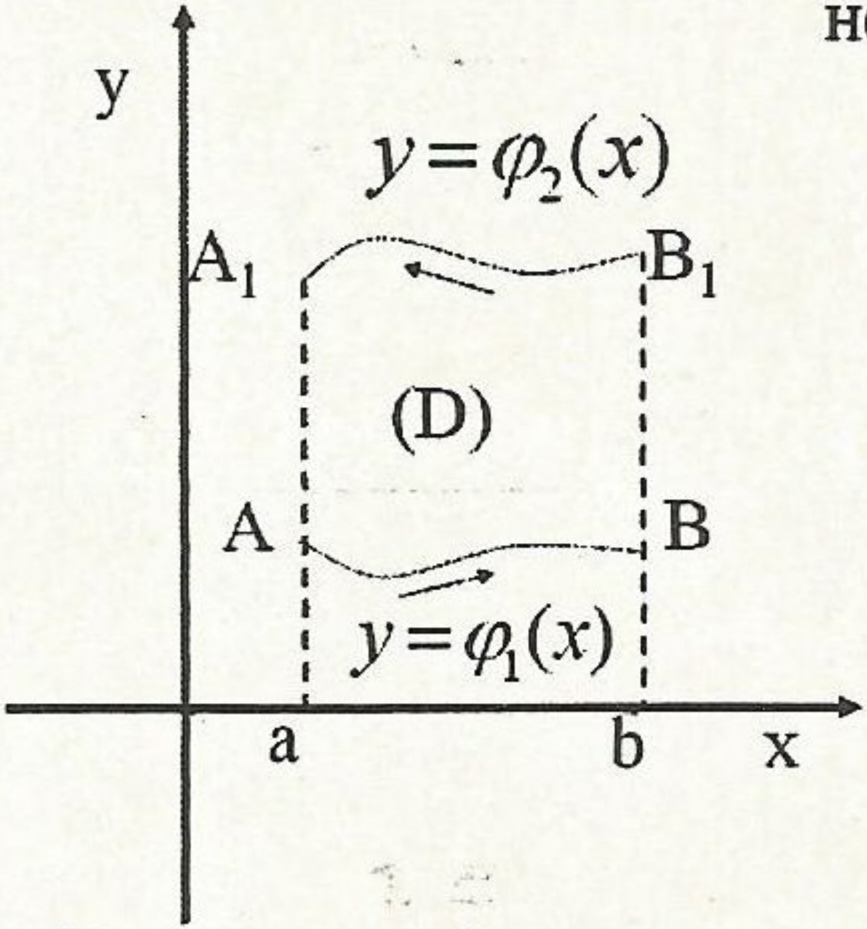


$$(AB):\ y=\varphi_1(x)$$

$$(A_1B_1):\ y=\varphi_2(x),$$

где φ_1 и φ_2 непрерывны на $[a;b]$, и прямых $x=a,\ x=b.$

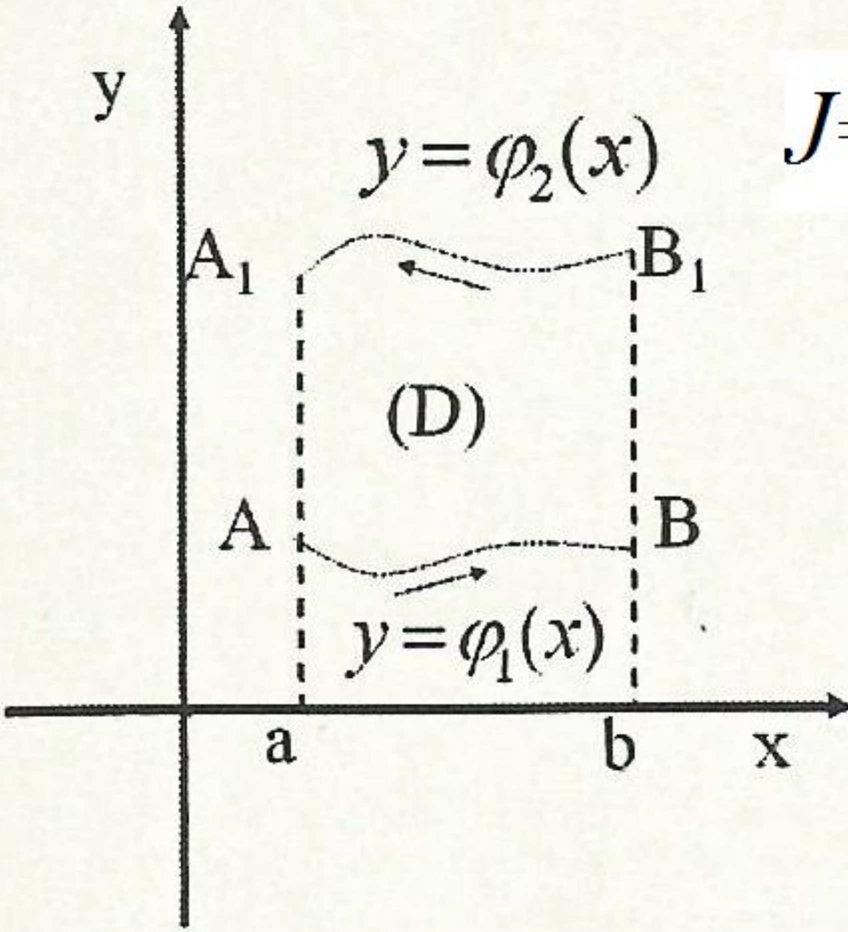
Любая прямая, параллельная оси OY пересекает контур L не более чем в двух точках.



Пусть в области (D) определена и непрерывна вместе со своей частной производной по y функция $P(x;y)$.

Что можно сказать о существовании $\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$?

Двойной интеграл $\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$ существует. Вычислим его.



$$J = \iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy.$$

Внутренний интеграл вычисляется в предположении, что в функции $\frac{\partial P}{\partial y}$ x сохраняет постоянное значение.

При этом условии функция $P(x, y)$ является первообразной для $\frac{\partial P}{\partial y}$.

Тогда $\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int\limits_a^b P(x,y)\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dx =$

$$= \int\limits_a^b \big(P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x))\big) dx = \int\limits_a^b P(x,\varphi_2(x)) dx -$$

$$- \int\limits_a^b P(x,\varphi_1(x)) dx = -\int\limits_b^a P(x,\varphi_2(x)) dx - \int\limits_a^b P(x,\varphi_1(x)) dx.$$

Каждый из интегралов, стоящих в правой части равенства, может быть заменен криволинейным интегралом. ПОЧЕМУ?

На основании формулы (4) из 3.3.

Первый - вдоль дуги B_1A_1, второй - вдоль дуги AB.

Поэтому можем записать

$$\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int\limits_{\cup B_1A_1} P(x, y)dx - \int\limits_{\cup AB} P(x, y)dx. \qquad (1)$$

Заметив, что криволинейные интегралы $\int\limits_{\cup AA_1} P(x,y)dx$

и $\int\limits_{\cup BB_1} P(x,y)dx$ вдоль отрезков BB_1 и AA_1.

перпендикулярных оси OX равны нулю, равенство (1)

заменяем на $\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = -\int\limits_{\cup AB} P(x,y)dx - \int\limits_{\cup BB_1} P(x,y)dx -$

$$- \int\limits_{\cup B_1A_1} P(x,y)dx - \int\limits_{\cup A_1A} P(x,y)dx = -\Bigg[\int\limits_{\cup AB} P(x,y)dx +$$

$$+ \int\limits_{\cup BB_1} P(x,y)dx + \int\limits_{\cup B_1A_1} P(x,y)dx + \int\limits_{\cup A_1A} P(x,y)dx\Bigg] =$$

$$= -\oint\limits_{L} P(x,y)dx.$$

Итак, $\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\oint\limits_{L} P(x, y)dx$ (2)

Полученная формула выражает двойной интеграл по области (D) через криволинейный интеграл по контуру L, ограничивающему область.

Данная формула установлена для случая, когда (D) простейшая область. Нетрудно убедиться, что она остается в силе для области более сложного вида, а именно для любой области, которую можно разбить с помощью нескольких прямых, параллельных оси OY на конечное число областей рассмотренного типа.

Рассмотрим теперь в плоскости XOY простейшую замкнутую область (σ) второго типа, ограниченную замкнутым контуром (L), образованным двумя прямыми $y = c$, $y = d$ и двумя непрерывными на отрезке $[c, d]$ кривыми $x = \psi_1(y)$ и $x = \psi_2(y)$, где для любого $y \in [c, d]$ $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$.

Пусть функция Q(x,y) определена и непрерывна вместе со своей частной производной $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в области (σ). Тогда аналогично предыдущему можно доказать, что $\iint\limits_{(\sigma)} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint\limits_{L} Q(x,y)dy$ (3)

Формула (3) останется верной и для области (σ), которую можно разбить прямыми, параллельными оси OX на конечное число областей второго типа.

Вычитая из равенства (3) равенство (2), получаем формулу:

$$\iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \quad (4)$$

Эта формула, устанавливающая связь между двойным интегралом по области (D) и полным криволинейным интегралом по ее контуру L называется формулой Грина по имени английского математика и физика Д. Грина (1793-1841 гг.)

Пример. Вычислим с помощью формулы Грина

$I = \oint\limits_L xy^2 dy - x^2 y dx$, где L- окружность $x^2 + y^2 = R^2$,

обходимая против часовой стрелки.

$$Q(x, y) = xy^2, \;\; P(x, y) = -x^2 y, \;\; \frac{\partial P}{\partial y} = -x^2, \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2.$$

$$I = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint\limits_D \left(y^2 + x^2 \right) dxdy = \iint\limits_D r^3 dr d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r^3 dr = \frac{R^4}{4} 2\pi = \frac{1}{2} R^4 \pi.$$

3.6. Выражение площади с помощью криволинейного интеграла

Криволинейный интеграл часто удобно использовать при вычислении площади плоской фигуры.

Положим в формуле (2) $\iint\limits_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\oint\limits_{L} P(x,y)dx$

$P(x,y) = y$. Учитывая, что $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$, получим

$\iint\limits_{(D)} dxdy = -\oint\limits_{L} ydx$. так как интеграл $\iint\limits_{(D)} dxdy$

численно равен площади S плоской области (D),

то имеем

$$S = -\int\limits_{L} ydx. \qquad (*)$$

Если положить в формуле (3) $\iint\limits_{(D)} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint\limits_L Q(x,y)dy$

$Q(x,y) = x$, то получим $S = \oint\limits_L xdy.$ (**)

Складывая почленно равенства (*) и (**) и деля обе части полученного равенство на 2, приходим к формуле $\boxed{S = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx.}$ (***)

Пример.

Вычислим площадь фигуры, ограниченной эллипсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ при обходе эллипса в положительном направлении $dx = -a\sin t dt$, $dy = b\cos t dt$. Воспользуемся формулой (***). $S = \dfrac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx$,

получим $S = \dfrac{1}{2}ab\int\limits_0^{2\pi}\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)dt = \pi ab.$

3.7. Криволинейные интегралы, зависящие только от начала и конца пути интегрирования

Пусть в некоторой области (D) плоскости XOY определены и непрерывны функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$.

Возьмем в (D) две точки A и B. Будем их соединять различными кусочно-гладкими кривыми L, целиком лежащими в (D), и вычислять по ним криволинейный интеграл

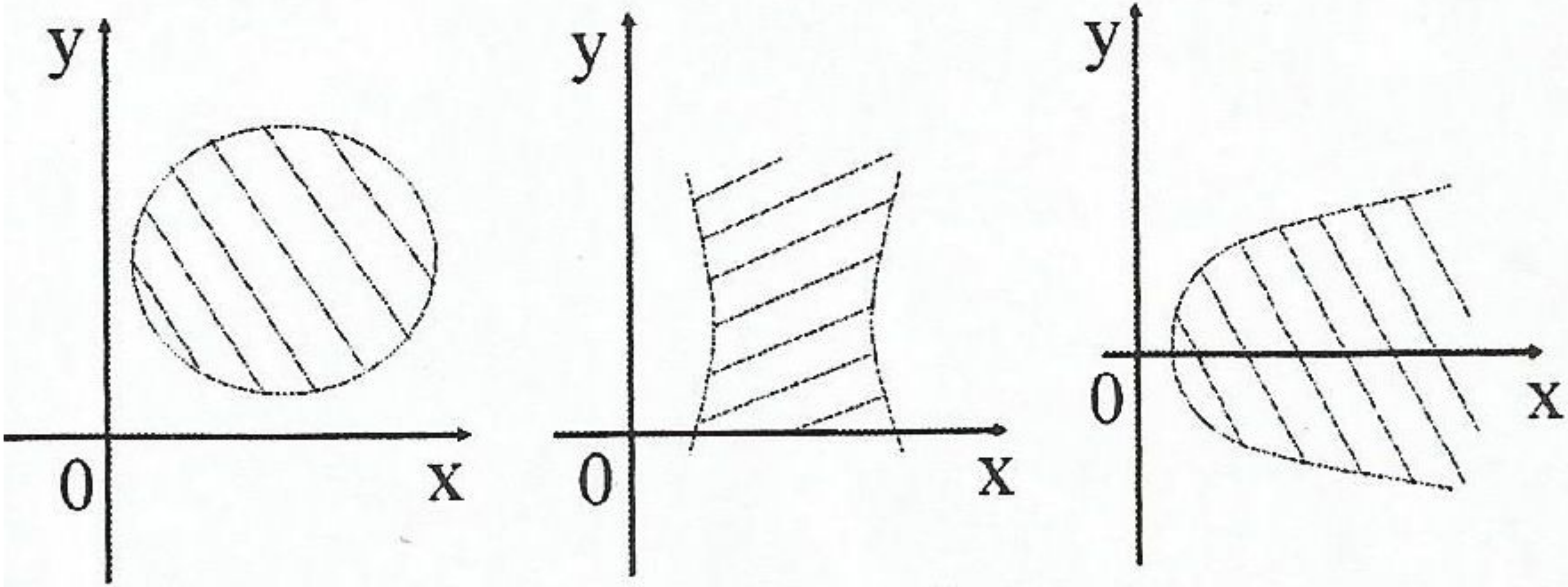
$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy \quad (1).$$

Мы получим, вообще говоря, различные значения интеграла (1). Но в некоторых случаях криволинейный интеграл может иметь одинаковые значения вдоль всех кривых, соединяющих т. A и B. Выясним при каких условиях криволинейный интеграл (1) не зависит от пути интегрирования.

Определение.

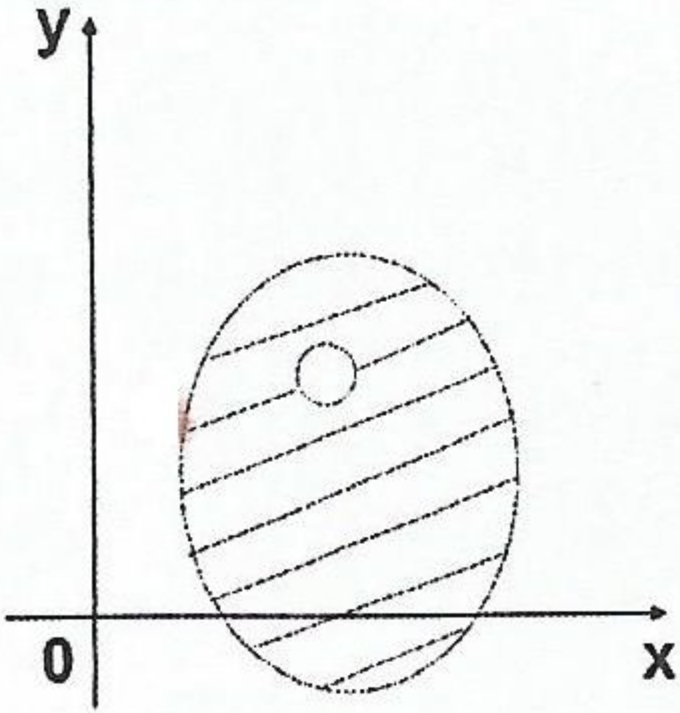
Область (D) называется односвязной, если любой замкнутый контур L, лежащий в (D), принадлежит (D) вместе с областью (σ), ограниченной этим контуром.

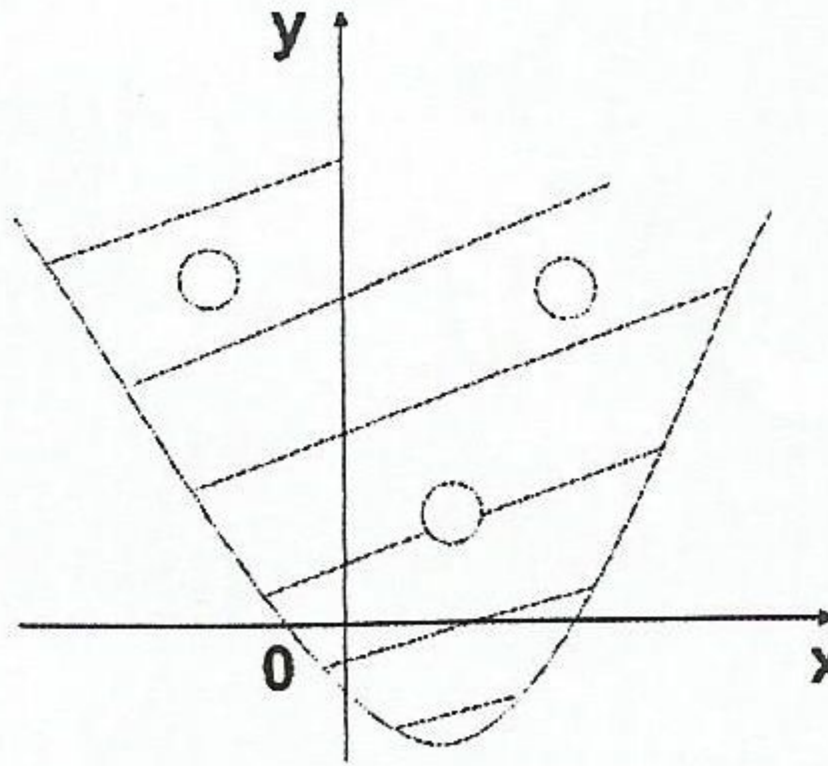
ПРИМЕРЫ



Односвязные области

ПРИМЕРЫ



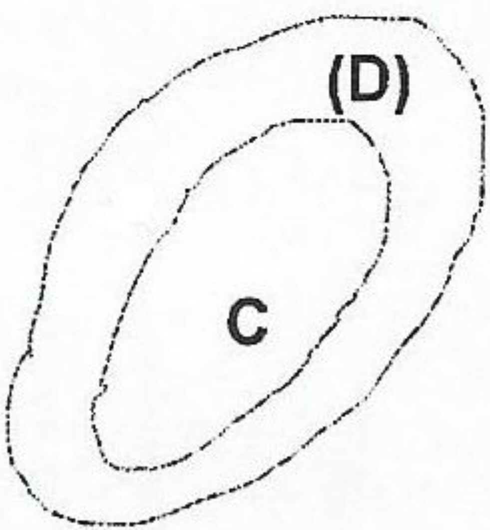


Не односвязные области

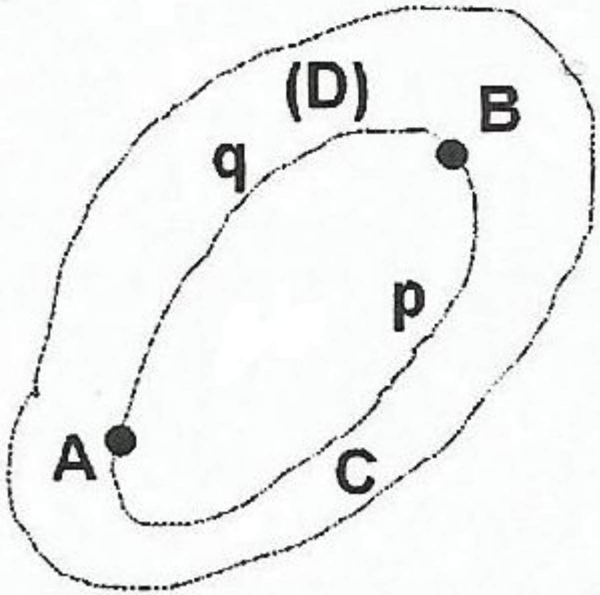
Теорема 1. Для того, чтобы криволинейный интеграл (1) $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не зависел от формы пути интегрирования в области (D) необходимо и достаточно, чтобы он по всякому замкнутому контуру C, не пересекающему себя и целиком лежащему в (D), равнялся нулю.

Доказательство :

I. Необходимость. Пусть значение интеграла (1) не зависит от формы пути интегрирования в некоторой области (D).



Пусть C - любой, не пересекающий себя контур, лежащий в (D).



Возьмем на C две произвольных точки A и B. Они разобьют C на две части AqB и ApB, каждая из которых есть путь, соединяющий т. A с т. B. Согласно допущению

$$\int_{ApB} Pdx + Qdy = \int_{AqB} Pdx + Qdy.$$

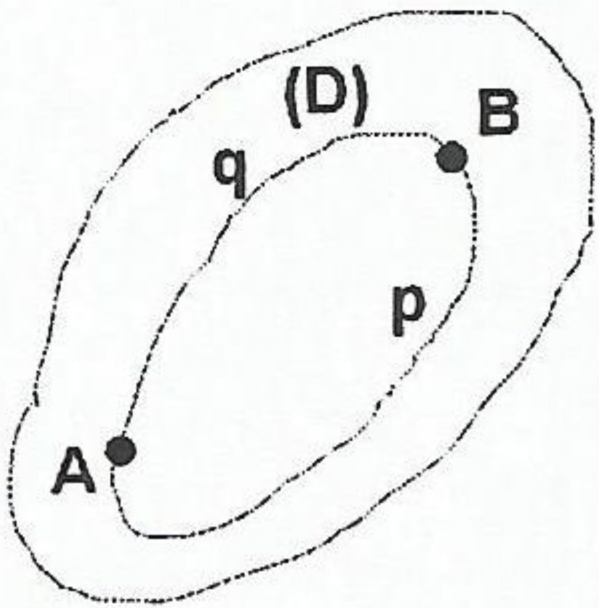
Откуда $\int\limits_{ApB} Pdx + Qdy - \int\limits_{AqB} Pdx + Qdy = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int\limits_{ApB} Pdx + Qdy + \int\limits_{BqA} Pdx + Qdy = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \oint\limits_{C} Pdx + Qdy = 0.$$

?

II. Достаточность. Пусть интеграл (1) по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в (D) равен нулю. Возьмем в (D) две любые точки A и B. Соединим их двумя различными кривыми,



не имеющими общих точек кроме A и B. Эти кривые образуют в совокупности замкнутый контур $ApBqA$. Согласно условию

$$\int\limits_{ApBqA} Pdx + Qdy = 0.$$

Тогда $\int\limits_{ApB} Pdx + Qdy + \int\limits_{BqA} Pdx + Qdy = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int\limits_{ApB} Pdx + Qdy - \int\limits_{AqB} Pdx + Qdy = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_{ApB} Pdx + Qdy = \int\limits_{AqB} Pdx + Qdy.$$

Замечание. Мы предположили, что дуги ApB и AqB не имеют общих точек кроме A и B. Теорема остается в силе и для случая, когда кривые ApB и AqB пересекаются.

Доказанная теорема показывает, что поставленный вопрос об условиях независимости интеграла (1) от пути интегрирования эквивалентен вопросу: при каких условиях данный интеграл обращается в нуль по любому замкнутому контуру, лежащему в (D).

Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

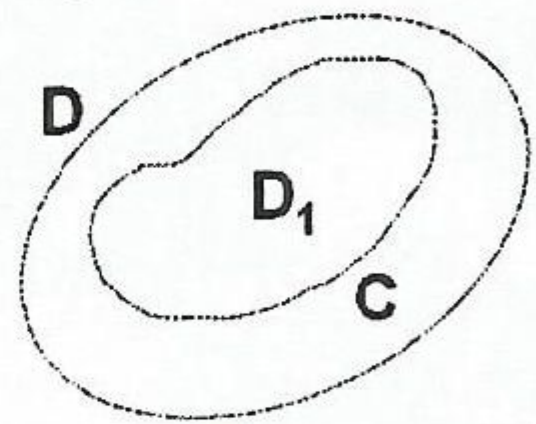
Теорема 2. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой ограниченной односвязной области (D). Тогда для того, чтобы криволинейный интеграл по любому замкнутому кусочно гладкому контуру C, целиком лежащему в (D), был равен нулю $\oint\limits_{C} Pdx + Qdy = 0$ (2), необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области (D) выполнялось условие: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ (3).

Доказательство.

Достаточность. Пусть во всех точках области (D) выполняется условие (3) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, C - произвольный кусочно гладкий контур, лежащий в (D). Обозначим через (D_1) - область, ограниченную контуром C.

Так как по условию D односвязна, то

(D_1) ... (D).| ?



$(D_1) \subset (D)$. Поэтому в (D_1) определены и непрерывны со своими частными производными $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Следовательно в (D_1) можно применить формулу Грина.

ЗАПИШИТЕ ЕЕ!

$$\oint\limits_C P dx + Q dy = \iint\limits_{(D_1)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

В силу условия (3)

$$\iint\limits_{(D_1)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \oint\limits_C P dx + Q dy = 0.$$

Необходимость. Пусть теперь выполняются условия (2). ?

Доказательство проведем методом от противного. Допустим, что хотя бы в одной точке области (D) условия (3) не выполнены,

т.е. $\dfrac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial x} \neq \dfrac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial y}$.

Следовательно в этой точке $\left.\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)} \neq 0$.

Пусть для определенности $\left.\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)} > 0$.

Поскольку $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$, а значит и функция

$f(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ непрерывны в (D), и, в

частности, в т. (x_0, y_0). Следовательно существует

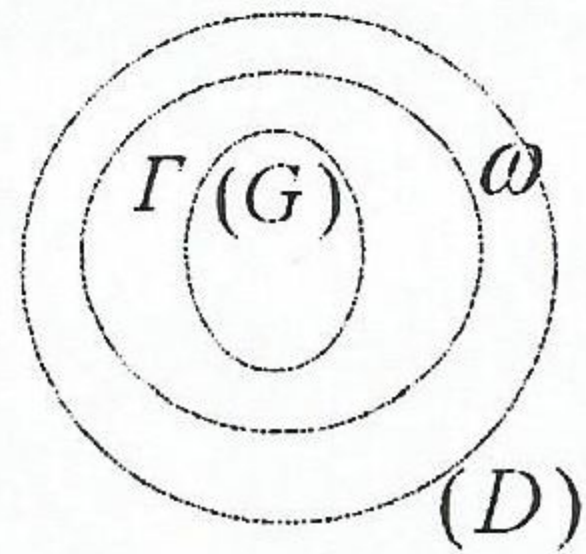
окрестность ω точки (x_0, y_0), во всех точках

которой $f(x, y) > 0$. Возьмем в ω

какой-нибудь кусочно-гладкий

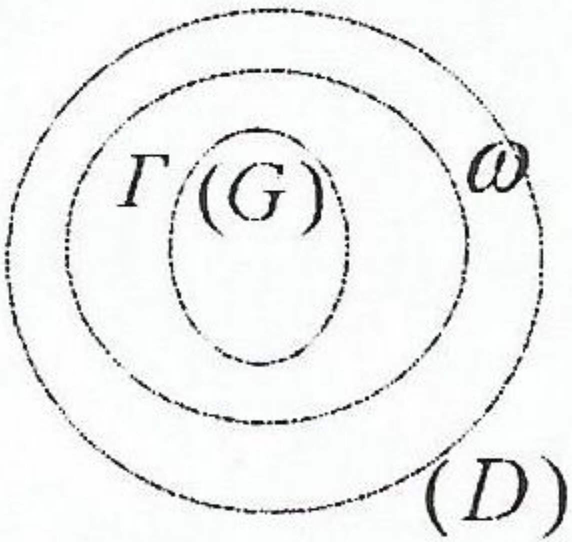
контур Γ. Область, ограниченную

контуром Γ обозначим через (G).



Тогда по формуле Грина имеем:

$$\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{(G)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy \quad (4).$$



К двойному интегралу в правой части применим теорему о среднем значении. ?

Сформулируйте ее!!!

$$\iint\limits_{(G)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = f(\xi,\eta)\cdot s, \text{ где}$$

$(\xi,\eta)\in G$, а s - площадь (G).

Так как $f(\xi,\eta)$ и $s>0$, то $\iint\limits_{(G)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy>0.$

Но тогда из (4) следует, что для выбранного

контура $\int\limits_{\Gamma} Pdx+Qdy \neq 0.$

Получили противоречие. Значит наше

предположение было не верно.

Замечание. Условие односвязности области (D) существенно. Им пользовались при применении формулы Грина. Для многосвязной области **Т.2** не верна.

Следствие. Пусть в замкнутой односвязной области (D) функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда для того, чтобы криволинейный интеграл $\int\limits_L Pdx + Qdy$ не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке области (D) выполнялось равенство $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

3.8. Признак полного дифференциала

В криволинейном интеграле (1) $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ подинтегральное выражение напоминает выражение для полного дифференциала некоторой функции $U(x, y)$ двух переменных $dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$.

Возникает вопрос: служит ли выражение $Pdx+Qdy$ полным дифференциалом некоторой функции двух переменных, т.е. существует ли такая функция $U(x,y)$, полный дифференциал которой равен $dU = Pdx+Qdy$ (2).

Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема: Если функции $P(x, y)$ и Q(x,y) непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в некоторой замкнутой ограниченной односвязной области (D), то для того, чтобы выражение $Pdx + Qdy$ было полным дифференциалом некоторой функции в области (D), необходимо и достаточно, чтобы $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ (3).

Доказательство.

Необходимость. Предположим, что существует такая функция $U(x,y)$, что

$$\left(\forall(x,y)\in(D)\right)\left(dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy=\right.$$

$$\left.=Pdx+Qdy\right).\ (4)$$

Отсюда следует $P=....,\ Q=...???$

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \; Q = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Продифференцировав обе части первого равенства по y, а второго по x, получим $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \; \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$. (5)

Так как по условию $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в (D), то

$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$ непрерывны в (D) и следовательно

выполняется равенство $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$, но тогда из (5)

следует $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то есть в (D) выполняется равенство (3).

Достаточность.

Пусть для выражения (2) $Pdx + Qdy$ выполнено условие (3) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Покажем существование функции $U(x, y)$, для которой выражение (2) является полным дифференциалом.

Действительно, при выполнении условий (3) криволинейный интеграл (1) не зависит от пути интегрирования и вполне определяется заданием начальной и конечной точки пути интегрирования.

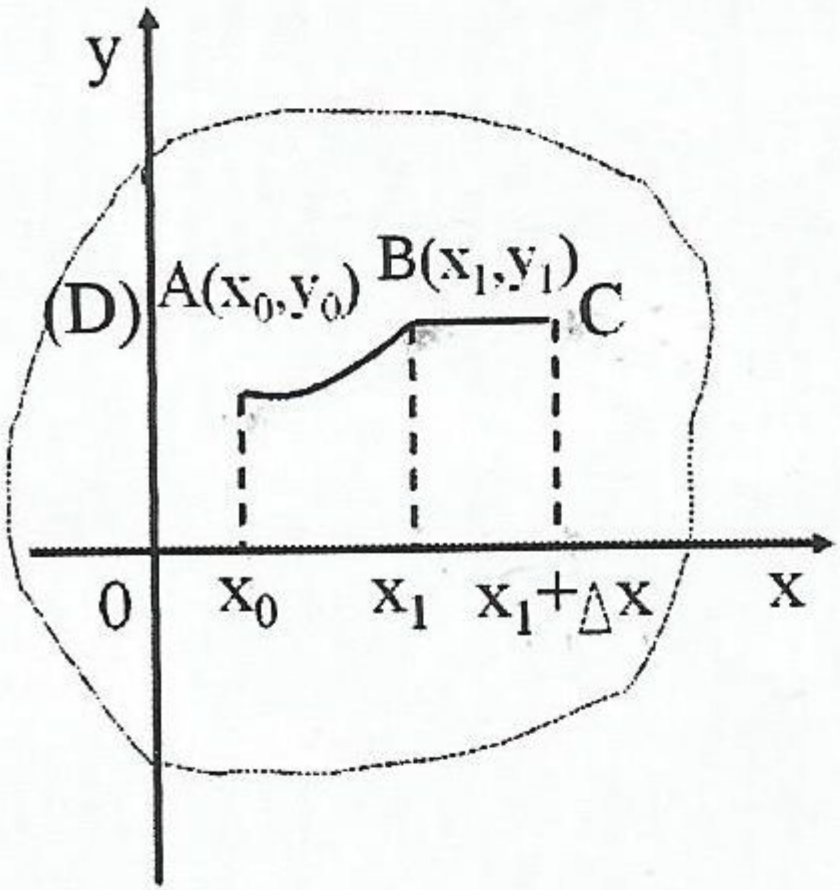
На основании чего сделано такое утверждение?

Зафиксируем начальную точку пути интегрирования $A(x_0, y_0)$, а точку $B(x, y)$ будем считать переменной в области (D).

Тогда криволинейный интеграл (1) будет некоторой функцией от двух переменных x и y, определенной в области (D). Обозначим эту функцию

$$U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Покажем, что функция $U(x, y)$ имеет в области (D) полный дифференциал и найдем его.



Пусть $B(x_1, y_1)$ некоторая фиксированная точка из (D).

Оставляя y_1 без изменения, дадим x_1 приращение Δx такое, чтобы точка С $(x_1 + \Delta x, y_1) \in (D)$.

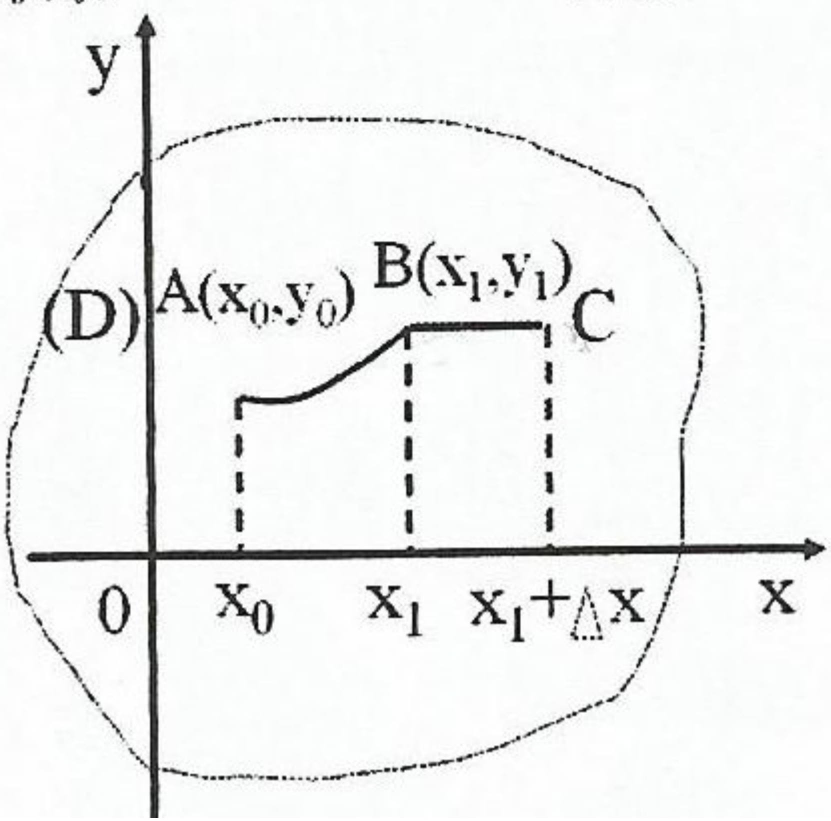
Соответствующее частное приращение функции $U(x, y)$ будет равно

$$\Delta_x U = U(x_1 + \Delta x, y_1) - U(x_1, y_1) =$$

$$= \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1 + \Delta x, y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy - \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

При этом $\Delta_x U = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1+\Delta x,y_1)} Pdx + Qdy - \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} Pdx + Qdy =$

$$= \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} Pdx + Qdy + \int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_1+\Delta x,y_1)} Pdx + Qdy - \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} Pdx + Qdy =$$



$$= \int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_1+\Delta x,y_1)} Pdx + Qdy =$$

$$= \int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_1+\Delta x,y_1)} Pdx + \int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_1+\Delta x,y_1)} Qdy.$$

$$\int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_1+\Delta x,y_1)} Qdy = 0,$$ поскольку на отрезке $[BC]$

значение y постоянно, следовательно $dy = 0$.

Итак,

$$\Delta_x U = \int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_1+\Delta x,y_1)} Pdx = \int\limits_{x_1}^{x_1+\Delta x} P(x,y_1)dx,$$

так как...........

Уравнение BC: $y = y_1$.

Применяя к полученному определенному интегралу теорему о среднем, получим

$$\Delta_x U = P(x_1 + \theta\Delta x, y_1)\Delta x, \text{ где } 0 < \theta < 1.$$

Откуда $\dfrac{\Delta_x U}{\Delta x} = P(x_1 + \theta\Delta x, y_1)$.

Устремим Δx к нулю. В силу непрерывности функции $P(x, y)$ в (D)

$$\lim_{\Delta x \to 0} P(x_1 + \theta \Delta x, y_1) = P(x_1, y_1).$$

Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x U}{\Delta x} = P(x_1, y_1)$ существует, что означает: функция $U(x, y)$ имеет в т. (x_1, y_1) частную производную по x, равную т. (x_1, y_1).

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{(x_1, y_1)} = P(x_1, y_1).$$

Поскольку т. (x_1, y_1) в области (D) выбрана произвольно, то это справедливо для любой точки области (D).

Совершенно аналогично доказывается, что в любой т. (x, y) из (D) $\dfrac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y)$.

Так как $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в (D), то частные призводные $\dfrac{\partial U}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial U}{\partial y}$ непрерывны в (D). Что отсюда вытекает???

Отсюда вытекает, что $U(x, y)$ дифференцируема в (D) и ее полный дифференциал $dU = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.

Замечание. Функцию двух переменных $U(x, y)$, полный дифференциал которой равен подинтегральному выражению $Pdx + Qdy$ (2) называют первообразной для этого выражения. Найденная функция $U(x, y)$ является не единственной первообразной для (2). Такими функциями будут очевидно функции вида $U(x, y) + C$, где C - произвольная постоянная.

Легко убедиться, что $U(x, y) + C$ есть общее выражение, общий вид всех первообразных для выражения $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.

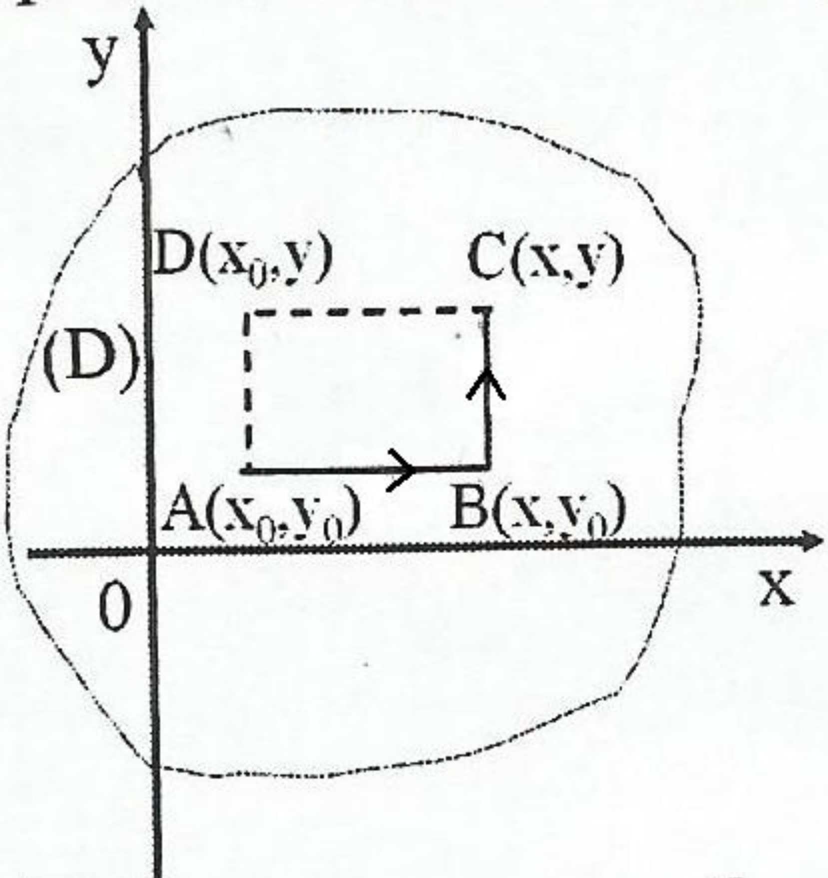
3.9. Восстановление функции по ее полному дифференциалу

Пусть $Pdx+Qdy$ есть полный дифференциал некоторой функции $U(x,y)$ в некоторой замкнутой ограниченной односвязной области. Из 3.8. следует, что для отыскания $U(x,y)$ достаточно выбрав какую-либо точку $(x_0,y_0)\in D$, вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}$ Pdx+Qdy по любой линии, соединяющей точки (x_0,y_0) и (x,y).

Формула $U(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy + C,$

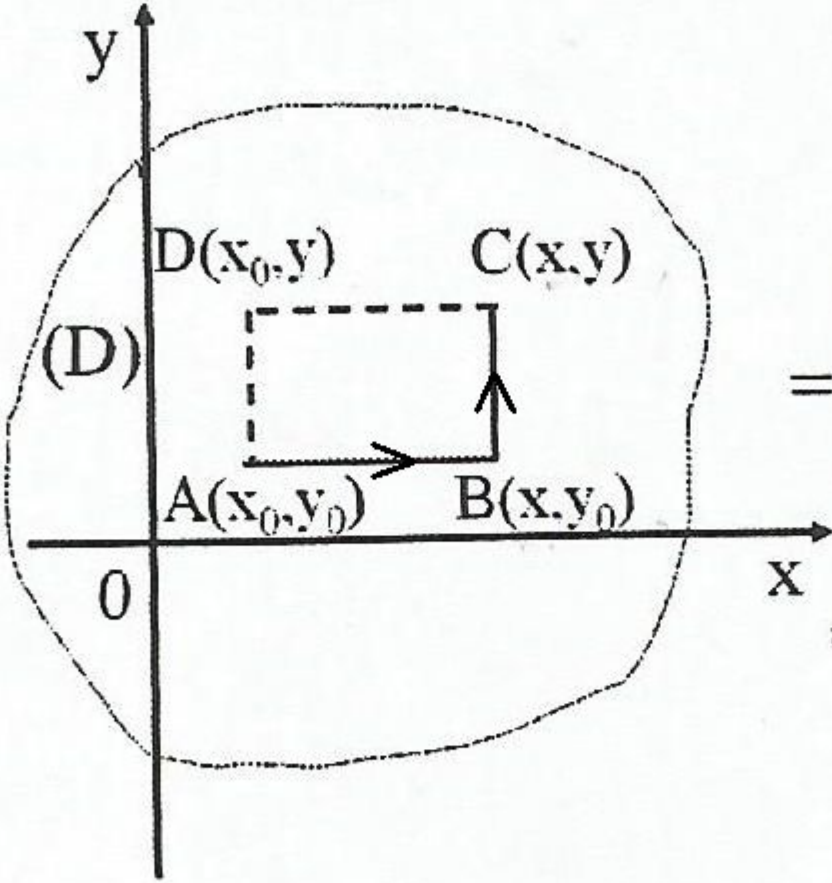
где C-произвольная постоянная, дает возможность определить множество всех функций, имеющих подынтегральное выражение своим полным дифференциалом.

Криволинейный интеграл легко вычислить,



если в качестве пути интегрирования взять ломаную, звенья которой параллельны координатным осям, например, ломаную

ABC, лежащую в области (D).



$[AB]: y = y_0, dy = 0,$

$[BC]: x - const, dx = 0.$

Тогда $\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy =$

$$= \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} Pdx + Qdy + \int\limits_{(x,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C.$$

Итак, $U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx +$

$$+ \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C.$$

<u>Замечание.</u> Можно было бы интегрировать по ломаной ADC. В этом случае получим

$$U(x,y)=\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy+\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx+C.$$

Пример.

Найти функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу

$dU(x, y) = (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy.$

Решение.

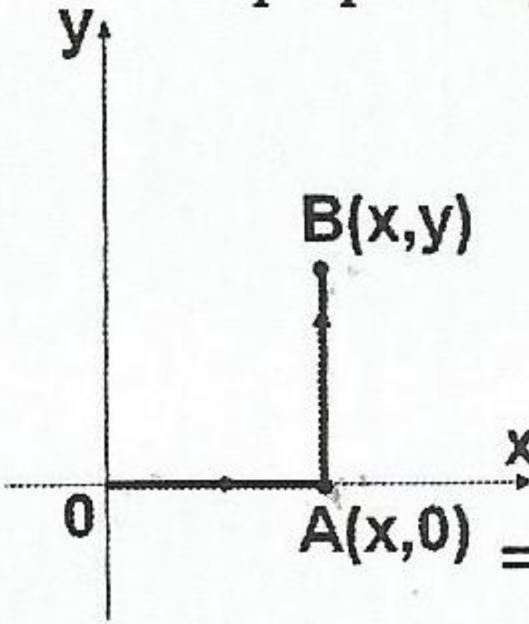
В этом случае $P(x, y) = x^2 + 2xy - y^2, Q(x, y) = x^2 - 2xy - y^2$

непрерывны и имеют непрерывные производные

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2y, \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 2y,$ удовлетворяющие условию

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 2y.$ Значит $Pdx + Qdy$ полный дифференциал.

Для нахождения $U(x, y)$ примем за начало интегрирования т. $(0,0)$, за конечную (x, y). Интегрирование будем вести вдоль ломаной OAB.



$$[OA]: y=0, dy=0, 0 \le x \le x.$$

$$[AB]: x - const, dx=0, 0 \le y \le y.$$

$$U(x,y)=$$

$$= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy=$$

$$= \int_0^x x^2dx + \int_0^y (x^2-2xy-y^2)dy + C = \frac{x^3}{3}\Big|_0^x + \left(x^2y-\frac{2xy^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^y =$$

$$= \frac{x^3}{3}+x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}+C.$$