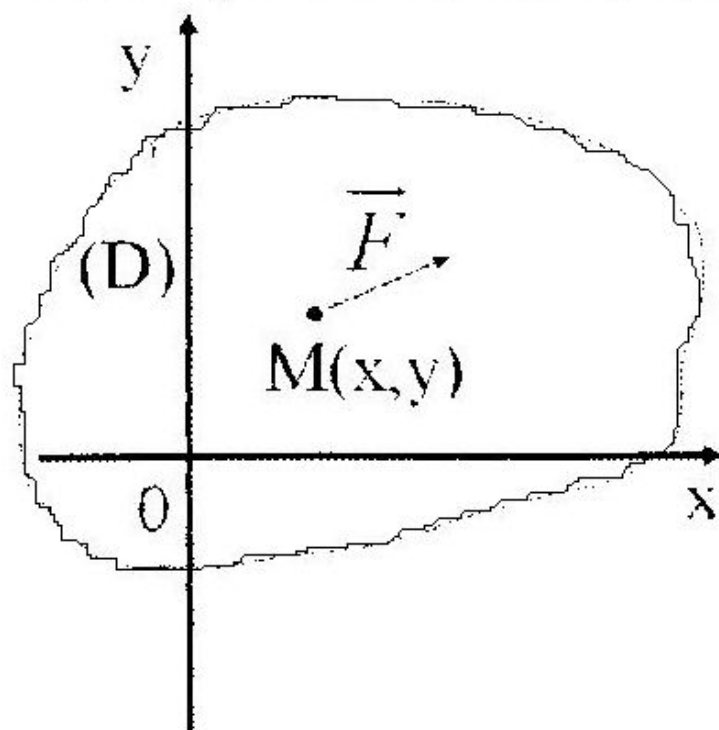


## **Глава 3. Криволинейные интегралы**

### **3.1. Задача о работе плоского силового поля**

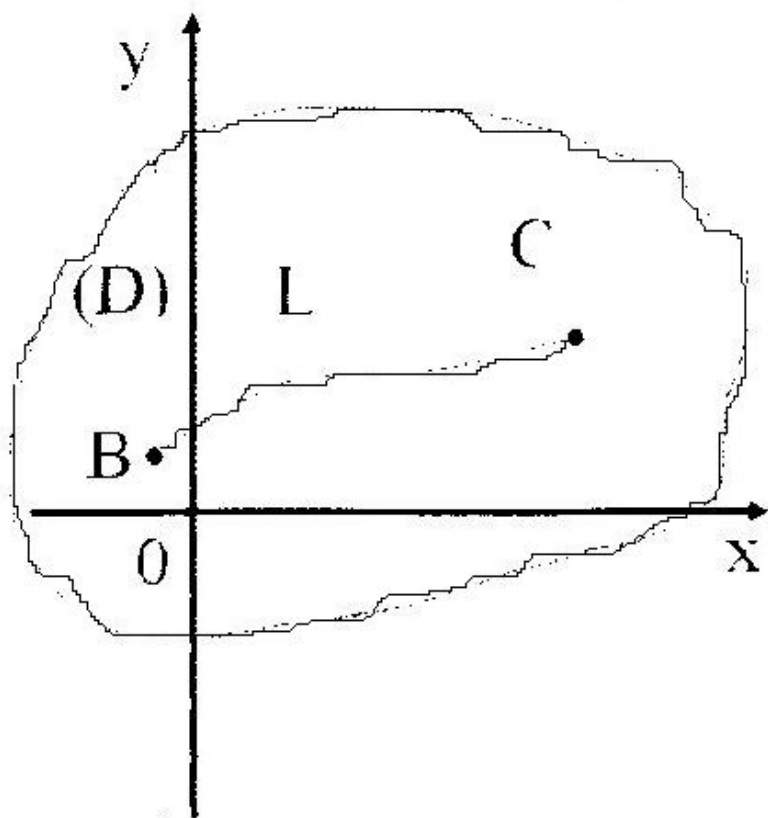
Пусть на координатной плоскости  $XOY$  дана некоторая замкнутая область  $(D)$  и пусть с каждой точкой  $M(x, y)$



области  $(D)$  связан вектор  $\vec{F} = \vec{F}(x, y)$ , величина и направление которого зависят от координат точки  $M$ , представляющий силу, действующую на находящуюся в точке  $M$  массу.

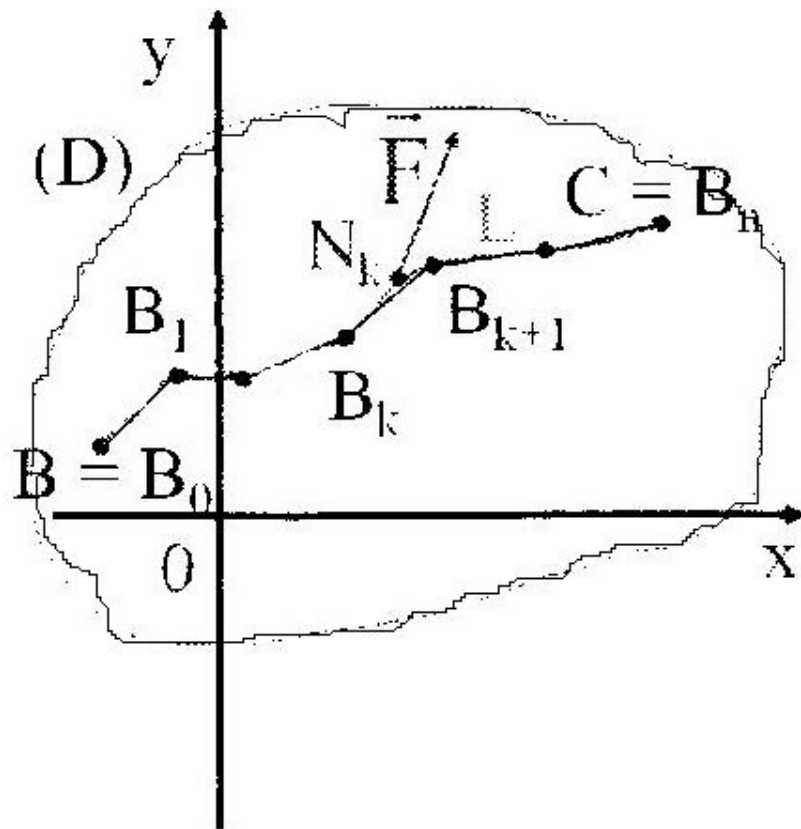
В таком случае говорят, что в области  $D$  задано плоское силовое поле  $\vec{F}(x, y)$ .

Пусть далее под действием силы поля материальная



точка движется по некоторой спрямляемой кривой  $L$ , расположенной в области  $(D)$ . Требуется вычислить работу  $A$  данного силового поля при перемещении материальной точки по линии  $L$  из точки  $B$  в точку  $C$ .





На каждой дуге  $B_k B_{k+1}$  возьмем произвольную т.  $N_k (\xi_k, \eta_k)$ .

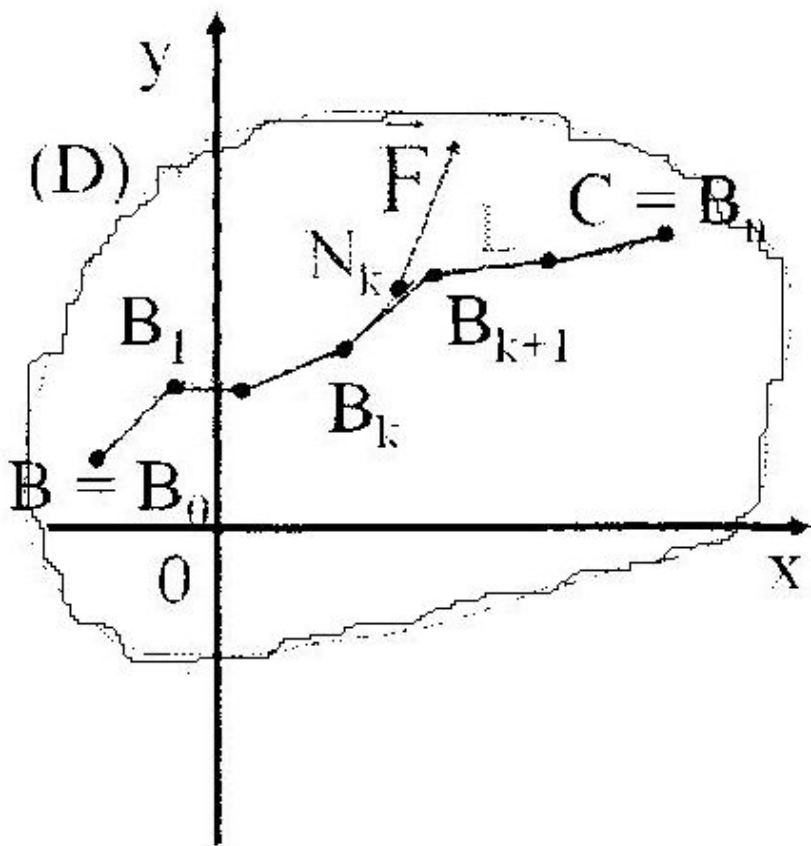
Допустим, что участок пути  $B_k B_{k+1}$  прямолинейен (т.е. дугу  $B_k B_{k+1}$  заменим хордой

$[B_k B_{k+1}]$ ) и условимся считать,

что при движении точки по отрезку  $[B_k B_{k+1}]$  на нее

действует постоянная сила, равная силе, приложенной

в т.  $N_k (\xi_k, \eta_k)$ :  $\vec{F}_k = \vec{F}(\xi_k, \eta_k)$ .



Тогда работа  $\Delta A_k$  силы

$\vec{F}_k$  на отрезке  $[B_k B_{k+1}]$

будет равна

$$(1) \Delta A_k = |\vec{F}_k| \cdot |\overrightarrow{B_k B_{k+1}}| \cdot \cos \varphi,$$

где  $\varphi$  - угол между векторами

$\vec{F}$  и  $\overrightarrow{B_k B_{k+1}}$ , или

$$\Delta A_k = (\vec{F}_k \cdot \overrightarrow{B_k B_{k+1}}).$$

Обозначим проекции силы  $\vec{F}$  на координатные оси  $OX$  и  $OY$  соответственно  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$ , тогда  $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$  и, следовательно  $\vec{F}(\xi_k, \eta_k) = P(\xi_k, \eta_k)\vec{i} + Q(\xi_k, \eta_k)\vec{j}$ .

Проекции вектора  $\overline{B_k B_{k+1}}$  соответственно на оси  $OX$  и  $OY$  равны.....

Так как проекции вектора  $\overrightarrow{B_k B_{k+1}}$  на оси  $OX$  и  $OY$  соответственно равны

$$x_{k+1} - x_k = \Delta x_k, \quad y_{k+1} - y_k = \Delta y_k,$$

$$\text{то } \overrightarrow{B_k B_{k+1}} = \Delta x_k \vec{i} + \Delta y_k \vec{j}.$$

$$\text{Тогда } \Delta A_k = (\vec{F}_k \cdot \overrightarrow{B_k B_{k+1}}) = \dots\dots\dots$$



$$\Delta A_k = (\vec{F}_k \cdot \overrightarrow{B_k B_{k+1}}) = P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k.$$

Для работы  $A_n$  силового поля вдоль ломаной

$B_0 B_1 B_2 \dots B_n$  имеем выражение

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta A_k = \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k. \quad (2)$$

Естественно ожидать, что сумма  $A_n$

будет тем точнее выражать работу  $A$

силового поля  $\vec{F}(x, y)$ , чем меньше

будут длины частичных дуг  $B_k B_{k+1}$ .

Будем теперь неограниченно увеличивать число  $n$  делений дуги  $BC$  так, чтобы  $\lambda$  наибольшая из длин частичных дуг  $\overrightarrow{B_k B_{k+1}}$  стремилась к нулю.

Если существует  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} (P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k)$

и не зависит от выбранного способа разбиения дуги  $AB$  на частичные и от выбора точек  $N_k(\xi_k, \eta_k)$  на частичных дугах, то этот предел примем за работу силового поля  $\vec{F}(x, y)$  при перемещении материальной точки по дуге от точки  $B$  до точки  $C$ .

Итак, по определению, полагаем

$$(3) A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} A_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} (P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k)$$

В тех случаях, когда  $Q(x, y) = 0$  или  $P(x, y) = 0$ ,  
вместо суммы (3) будем иметь суммы

$$(4) \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k \quad \text{или} \quad \sum_{k=0}^{n-1} Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k \quad (5)$$

К вычислению пределов сумм (2), (4), (5) приводит решение большого числа других важных задач теоретического и прикладного характера. Поэтому возникает задача изучить подобные суммы, отвлекаясь от конкретного содержания, и установить удобные способы вычисления пределов этих сумм.

## 3.2. Понятие криволинейного интеграла (по координатам)

Пусть вдоль спрямляемой кривой  $AB$ , лежащей в плоской области, определена функция  $P(x, y)$ . Разобьем дугу  $AB$  на  $n$  частичных дуг точками  $A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$ . Обозначив через  $x_k, y_k$  координаты точки  $A_k$  и взяв на каждой частичной дуге  $A_k A_{k+1}$  произвольно точку  $N_k(\xi_k, \eta_k)$ , вычислим значение функции  $P$  в этой точке  $P(\xi_k, \eta_k)$  и умножим на величину проекции дуги  $A_k A_{k+1}$  на ось  $Ox$ , то есть на  $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ .

Найдем сумму всех таких произведений

$$(1) \sigma = \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k.$$

Эта сумма называется интегральной суммой для функции  $P(x, y)$  вдоль дуги  $AB$  по координате  $x$ .

## Определение.

Криволинейным интегралом от функции  $P(x, y)$  вдоль дуги  $AB$  по координате  $x$  называется предел, к которому стремится интегральная сумма  $\sigma$ , когда наибольшая из длин  $\lambda$  дуг  $A_k A_{k+1}$  стремится к нулю, при условии, что этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения дуги  $AB$  на частичные, ни от выбора точек  $N_k (\xi_k, \eta_k)$  на этих дугах.

Обозначается криволинейный интеграл  
вдоль дуги  $AB$  по координате  $x$ :

$$\int_{\cup AB} P(x, y) dx.$$

Итак, 
$$\int_{\cup AB} P(x, y) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k.$$



Аналогично определяется криволинейный интеграл вдоль кривой  $AB$  по координате  $y$ :

$$\int_{\cup AB} P(x, y) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k, \text{ где}$$

$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$  — проекция дуги  $AB$  на ось  $OY$ .

Если криволинейный интеграл  $\int_{\cup AB} P(x, y) dx$

или  $\int_{\cup AB} P(x, y) dy$  существует, то функция  $P$

называется интегрируемой вдоль дуги  $AB$

по координате соответственно  $x$  или  $y$ .

Пусть вдоль дуги  $AB$  определены две функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  и существуют интегралы  $\int_{\cup AB} P(x, y) dx$

и  $\int_{\cup AB} Q(x, y) dy$ . Сумму этих интегралов обозначают

$\int_{\cup AB} P(x, y) dx + \int_{\cup AB} Q(x, y) dy$  и называют полным

криволинейным интегралом (или криволинейным интегралом общего вида) вдоль дуги  $AB$ . Итак,

$$\int_{\cup AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\cup AB} P(x, y) dx + \int_{\cup AB} Q(x, y) dy.$$

## Замечание 1.

Определение криволинейного интеграла не исключает случая совпадения точек  $A$  и  $B$ , то есть случая замкнутой кривой. Все предыдущие рассуждения остаются в силе. Только направление обхода замкнутой кривой должно быть каким-либо способом указано. Замкнутую кривую (или замкнутый контур) обычно обозначают какой-либо буквой, например  $L$ . Для обозначения криволинейного интеграла по замкнутому контуру употребляют символ

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

## Замечание 2.

Возвращаясь к задаче о работе силового поля, можно сказать, что в случае существования соответствующего криволинейного интеграла работа  $A$  силового поля

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$$

при перемещении материальной точки по дуге  $BC$  выражается криволинейным

$$\text{интегралом } A = \int_{\cup BC} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

### 3.3. *Существование и вычисление криволинейного интеграла*

Пусть спрямляемая кривая  $AB$  задана

параметрически  $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ , где функции  $\varphi, \psi, \varphi'$

непрерывны на отрезке  $[\alpha, \beta]$ , причем значению параметра  $\alpha$  соответствует т.  $A$ , значению

$$t = \beta - \text{т. } B.$$

При изменении параметра  $t$  от  $\alpha$  до  $\beta$  переменная точка описывает кривую  $AB$  в направлении от т.  $A$  до т.  $B$ .

Пусть далее вдоль дуги  $AB$  определена и непрерывна функция  $P(x, y)$ .

Докажем, что при сделанных допущениях существует криволинейный интеграл

$$\int_{\cup AB} P(x, y) dx.$$

Составим интегральную сумму для функции  $P(x, y)$

вдоль дуги  $AB$  по координате  $x$ : 
$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k.$$

Обозначим через  $t_k$  ( $k = \overline{0, n-1}$ ) значения параметра  $t$ , которым соответствуют делящие точки  $A_k(x_k, y_k)$ , а через  $\tau_k$  ( $k = \overline{0, n-1}$ ) значения параметра  $t$ , которыми определяются выбранные на дуге  $A_k A_{k+1}$  точки  $N_k(\xi_k, \eta_k)$ .

Таким образом,  $x_k = \varphi(t_k)$ ,  $y_k = \psi(t_k)$ ,  $\xi_k = \varphi(\tau_k)$ ,

$\eta_k = \psi(\tau_k)$ ,  $\Delta x_k = \varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)$ .

**Тогда интегральная сумма будет иметь вид .....**?



$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) (\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k))$$

Функция  $\varphi$  на каждом из отрезков  $[t_k, t_{k+1}]$

удовлетворяет условиям т. Лагранжа | ПОЧЕМУ???

Следовательно,  $\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = \dots\dots\dots ???$

$$\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = \varphi'(\theta_k) \Delta t_k, \text{ где } t_k < \theta_k < t_{k+1},$$

$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k.$$

Следовательно, интегральная сумма  $\sigma$  принимает

$$\text{вид } \sigma = \sum_{k=0}^{n-1} P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \cdot \varphi'(\theta_k) \Delta t_k.$$

Эта сумма напоминает интегральную сумму

для функции  $P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)$  одной

переменной на отрезке  $[\alpha, \beta]$ , однако таковой

не является. | ПОЧЕМУ???

В силу того, что в каждом слагаемом этой суммы функции  $P(\varphi(t), \psi(t))$  и  $\varphi'(t)$  вычислены не в одной и той же точке отрезка  $[t_k, t_{k+1}]$ , а в различных:  $\tau_k$  и  $\theta_k$  ( $\tau_k$  выбирается произвольно на  $[t_k, t_{k+1}]$ , а  $\theta_k$  определяется т. Лагранжа).

Преобразуем сумму  $\sigma$ . Обозначим через

$$\gamma_k = \varphi'(\theta_k) - \varphi'(\tau_k) \quad (k = \overline{0, n-1}).$$

Тогда  $\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \varphi'(\tau_k) \Delta t_k +$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \gamma_k \Delta t_k \quad (1)$$

Первая сумма в правой части равенства (1) есть интегральная сумма для функции  $P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)$  на  $[\alpha; \beta]$ . В силу непрерывности  $P(x, y)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\varphi'(t)$  функция  $P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)$  непрерывна на  $[\alpha; \beta]$ , следовательно существует предел этой суммы когда  $\lambda$ - наибольшая из длин дуг  $A_k A_{k+1}$  стремится к нулю, а значит и  $\Delta t_k \rightarrow 0$  и равен

$$\int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) dt.$$

Итак,  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \varphi'(\tau_k) \Delta t_k =$

$$= \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \varphi'(\tau_k) \Delta t_k =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Покажем, что вторая сумма в правой части (1) стремится к нулю при  $\lambda \rightarrow 0$ . Действительно, функция  $P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)$  непрерывна на  $[\alpha; \beta]$ , поэтому ограничена на  $[\alpha; \beta]$ , то есть существует  $k > 0$  такое, что при любом  $t \in [\alpha; \beta]$

$$|P(\varphi(t), \psi(t))| < k \quad (2).$$

В силу непрерывности  $\varphi'(t)$  на  $[\alpha; \beta]$   
она равномерно непрерывна на  $[\alpha; \beta]$ ,  
следовательно

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \theta, \tau \in [\alpha; \beta]) \\ \left( |\theta - \tau| < \delta \Rightarrow |\varphi'(\theta) - \psi'(\tau)| < \frac{\varepsilon}{k(\beta - \alpha)} \right).$$



Осуществим разбиение дуги  $AB$  на части  $A_k A_{k+1}$  такие, чтобы все разности  $\Delta t_k$  удовлетворяли условиям  $|\Delta t_k| < \delta$ , тогда и подалвно  $|\theta_k - \tau_k| < \delta$ . Следовательно,

$$|\gamma_k| = |\varphi'(\theta_k) - \varphi'(\tau_k)| < \frac{\varepsilon}{k |\beta - \alpha|} \quad (3)$$

В силу неравенств (2) и (3)  $\left| \sum_{k=0}^{n-1} P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \gamma_k \Delta t_k \right| \leq$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} |P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k))| |\gamma_k| |\Delta t_k| < k \frac{\varepsilon}{k |\beta - \alpha|} \cdot |\beta - \alpha| = \varepsilon.$$

Это означает, что  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \gamma_k \Delta t_k =$

$$= \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \gamma_k \Delta t_k = 0.$$

Итак,  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma$  – существует, значит существует

$$\int_{\cup AB} P(x, y) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k. \text{ Но как доказано}$$

последний предел равен  $\int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt.$

Следовательно,

$$\int_{\cup AB} P(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (4)$$

## Замечание 1.

Можно показать, что найденный предел не зависит от способа параметризации дуги кривой  $AB$ , лишь бы выполнялись условия, наложенные на функции  $\varphi$  и  $\psi$ .

## Замечание 2.

Аналогично доказывается, что если функция  $y = \psi(t)$  имеет непрерывную производную на  $[\alpha; \beta]$  и функция  $Q(x, y)$  непрерывна во всех точках дуги  $AB$ , то криволинейный интеграл

$\int_{\cup AB} Q(x, y) dy$  существует и имеет место равенство

$$\int_{\cup AB} Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt. \quad (5)$$

### Замечание 3.

Если кривая  $AB$  гладкая и, следовательно, обе функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  непрерывны на  $[\alpha; \beta]$  вместе со своими производными  $\varphi'(t)$ ,  $\psi'(t)$ , то

криволинейный интеграл  $\int_{\cup AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

существует и справедливо равенство

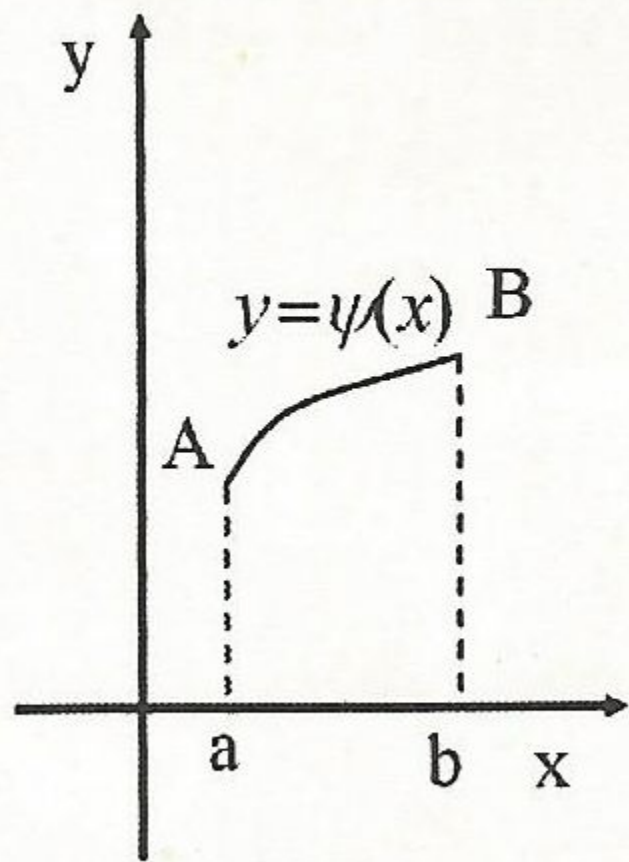
$$\int_{\cup AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$
$$= \int_{\alpha}^{\beta} (P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)) dt \quad (6)$$

#### Замечание 4.

Формула (6) остается в силе и в случае замкнутого контура интегрирования при условии, что этот контур соответствует монотонному изменению параметра от  $\alpha$  до  $\beta$ , такому, при котором каждая точка контура получается только при одном значении параметра  $t$  (исключая крайние значения параметра  $t$ ).

Пусть теперь кривая  $AB$  задана явным уравнением  $y = \psi(x)$ ,  
причем перемещению по этой кривой из точки  $A$  в точку  $B$

соответствует изменение  $x$  от  $a$  до  $b$ .



Пусть функция  $\psi$  непрерывна во всех  
точках дуги  $AB$ . Данную кривую легко  
параметризировать.

Принимая за параметр  $t$  переменную  $x$ ,  
то есть полагая  $t = x$ , получим

следующие параметрические уравнения дуги  $AB$ .....



$$\begin{cases} x = x \\ y = \psi(x) \end{cases} \quad a \leq x \leq b.$$

Заметив, что  $dx = x' dx$ , применив формулу (4) получим

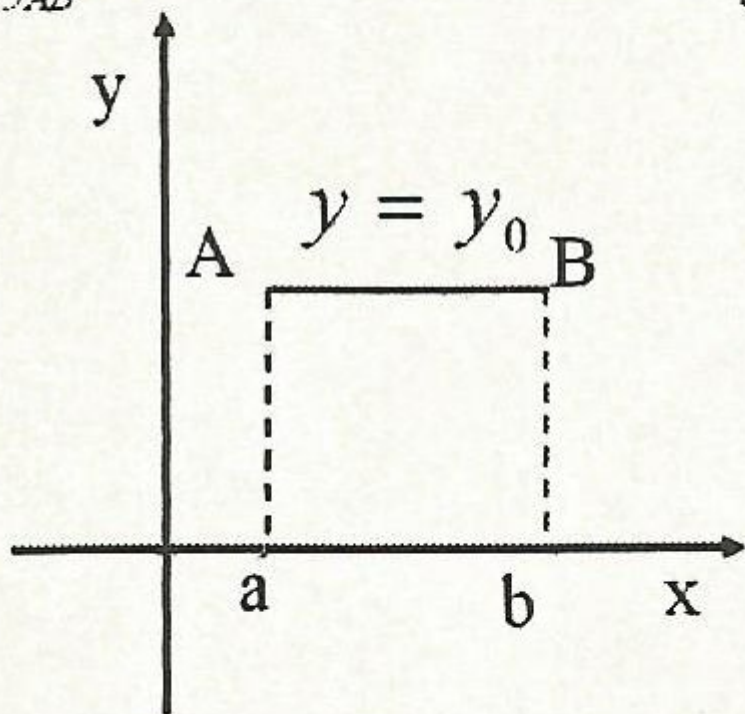
$$\int_{\cup AB} P(x, y) dx = \int_a^b P(x, \psi(x)) dx.$$

Предполагая, что функция  $\psi$  имеет на отрезке  $[a; b]$  непрерывную производную, а функция  $Q(x, y)$  непрерывна вдоль дуги  $AB$ , согласно (5) получаем

$$\int_{\cup AB} Q(x, y) dy = \int_a^b Q(x, \psi(x)) \psi'(x) dx.$$

Наконец,

$$\int_{\cup AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b (P(x, \psi(x)) + Q(x, \psi(x))\psi'(x)) dx \quad (7)$$



В частности, если кривая  $AB$  есть отрезок  $y = y_0$ , то  $dy = 0$  и  $\int_{\cup AB} Q(x, y)dy = 0$ ,

поэтому  $\int_{\cup AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b P(x, y_0)dx.$

## Задание.

Получить формулу для вычисления

$$\int_{\cup AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

если интегрирование ведется вдоль дуги,

заданной уравнением  $x = \varphi(y)$  ( $c \leq y \leq d$ ),

где  $\varphi$  непрерывно дифференцируема на  $[c; d]$ .

$$(8) \quad \int_{\cup AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$

$$= \int_c^d (P(\varphi(y), y)\varphi'(y) + Q(\varphi(y), y))dy.$$

## Пример.

$$\text{Вычислим } I = \int_L (2 + xy^2)dx - (3 - x^2y)dy$$

вдоль прямой, содержащей точки  $A(0; -2)$   
и  $B(1; 0)$ .

$$\text{Уравнение прямой: } \frac{x-0}{1-0} = \frac{y+2}{0+2} \Rightarrow y = 2x - 2.$$

$$I = \int_0^1 (2 + x(2x - 2)^2 - (3 - x^2(2x - 2)) \cdot 2) dx =$$

$$= \int_0^1 (8x^3 - 12x^2 + 4x - 4) dx = -4.$$

## 3.4. Основные свойства криволинейного интеграла

Отметим основные свойства криволинейного интеграла, непосредственно вытекающие из его определения. Эти свойства рассмотрим для

интеграла  $\int_{\cup AB} P(x, y) dx$ .

1. Если функция  $P$  интегрируема вдоль дуги  $AB$ , то функция  $kP$ , где  $k \in \mathbb{R}$ , также интегрируема вдоль дуги  $AB$ , причем

$$\int_{\cup AB} kP(x, y)dx = k \int_{\cup AB} P(x, y)dx$$

2. Если функции  $P_1$  и  $P_2$  интегрируемы вдоль дуги  $AB$ , то функция  $P_1 \pm P_2$  также интегрируема вдоль дуги  $AB$ , причем

$$\int_{\cup AB} (P_1 \pm P_2)(x, y) dx = \int_{\cup AB} P_1(x, y) dx \pm \int_{\cup AB} P_2(x, y) dx$$



### 3. (свойство аддитивности)

Если некоторой точкой  $C$  дуга  $AB$  разбита на две дуги  $AC$  и  $CB$ , и функция  $P$  интегрируема вдоль каждой из дуг  $AC$  и  $CB$ , то она интегрируема вдоль дуги  $AB$ , причем

$$\int_{\cup AB} P(x, y) dx = \int_{\cup AC} P(x, y) dx + \int_{\cup CB} P(x, y) dx$$

4. Если существует криволинейный интеграл

$\int_{\cup AB} P(x, y) dx$ , то существует криволинейный интеграл

$\int_{\cup BA} P(x, y) dx$ , причем  $\int_{\cup BA} P(x, y) dx = - \int_{\cup AB} P(x, y) dx$ ,

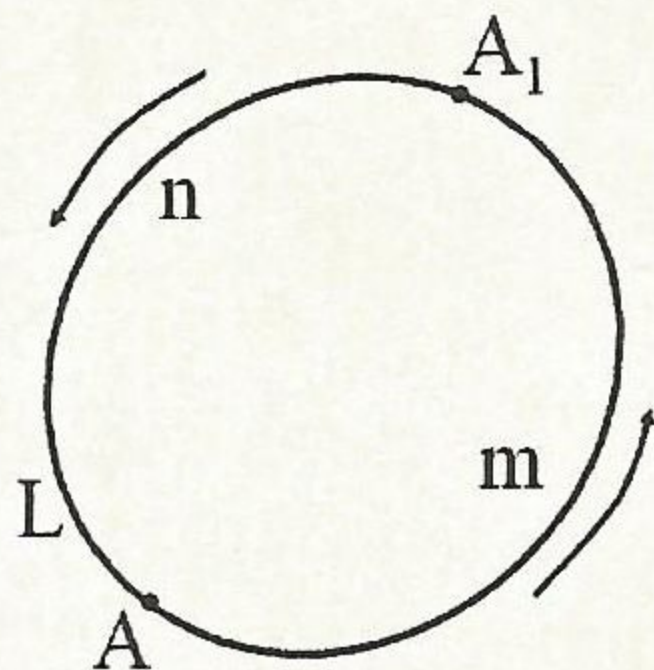
то есть при изменении направления интегрирования на противоположное, криволинейный интеграл изменяет знак на противоположный.

**ДОКАЗАТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО.**

5. Если функция  $P$  интегрируема по замкнутому контуру  $L$ , то величина криволинейного интеграла  $\int_L P(x, y) dx$  не зависит от того какую точку контура выбрать за начало интегрирования.

## Доказательство.

Пусть  $A$  и  $A_1$  - любые две несовпадающие точки замкнутого контура.



Тогда, рассматривая точку  $A$  как начало, а значит и конец контура  $L$  в направлении, указанном стрелкой, можно  $\oint_L$

представить в виде суммы  $\int_{AmA_1nA} = \int_{AmA_1} + \int_{A_1nA}$  (1)

На основании чего записано это равенство?

Равенство (1) справедливо в силу свойства аддитивности. Если же рассматривать точку  $A_1$  как начало обхода контура  $L$ , то

$$\int_{A_1 n A m A_1} = \int_{A_1 n A} + \int_{A m A_1}. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) находим  $\int_{A m A_1 n A} = \int_{A_1 n A m A_2}$ .

## Замечание.

При вычислении криволинейного интеграла вдоль некоторой дуги направление интегрирования указывается порядком написания букв, обозначающих начало и конец этой дуги. Если контур замкнут и не имеет точек самопересечения, указание начальной и совпадающей с ней конечной точки, очевидно, не определяет направления, в котором осуществляется обход контура  $L$ .

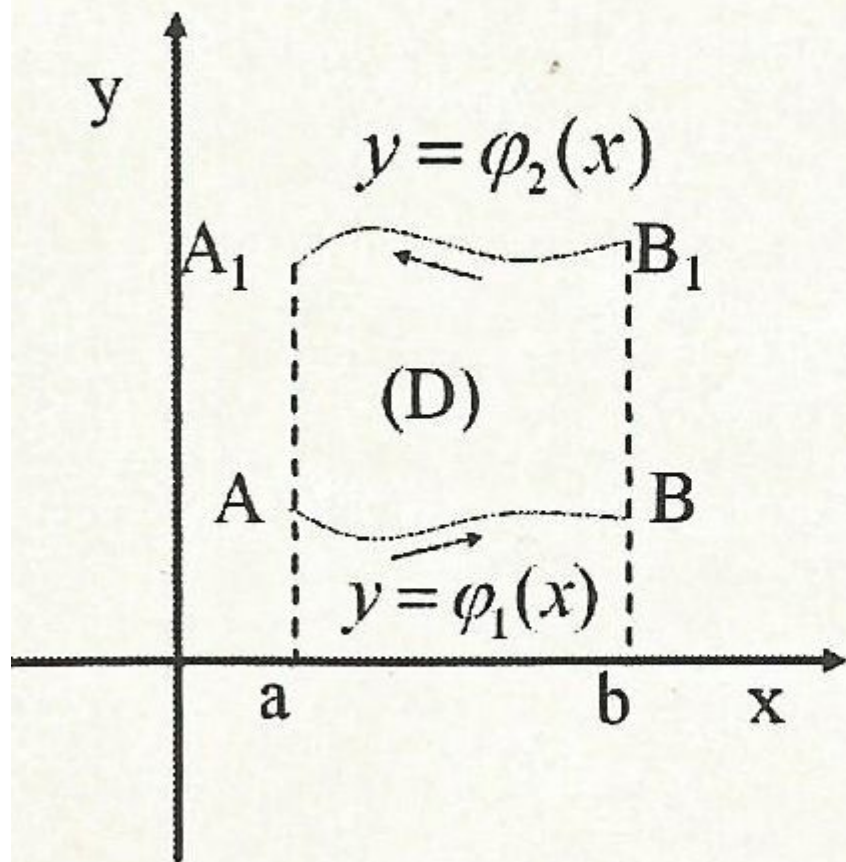
Условимся называть положительным направление обхода замкнутого контура  $L$  то, при котором часть области, ограниченная контуром  $L$ , остается слева от наблюдателя. Противоположное этому направление будем называть отрицательным.

## 3.5. Формула Грина

Между криволинейным интегралом, взятым по замкнутой кривой  $L$ , ограничивающей некоторую область  $(D)$  и двойным интегралом по этой области существует определенная связь. Выведем формулу устанавливающую эту связь.



Рассмотрим на плоскости  $XOY$  замкнутую область  $(D)$ , ограниченную контуром  $L$ , состоящим из кривых

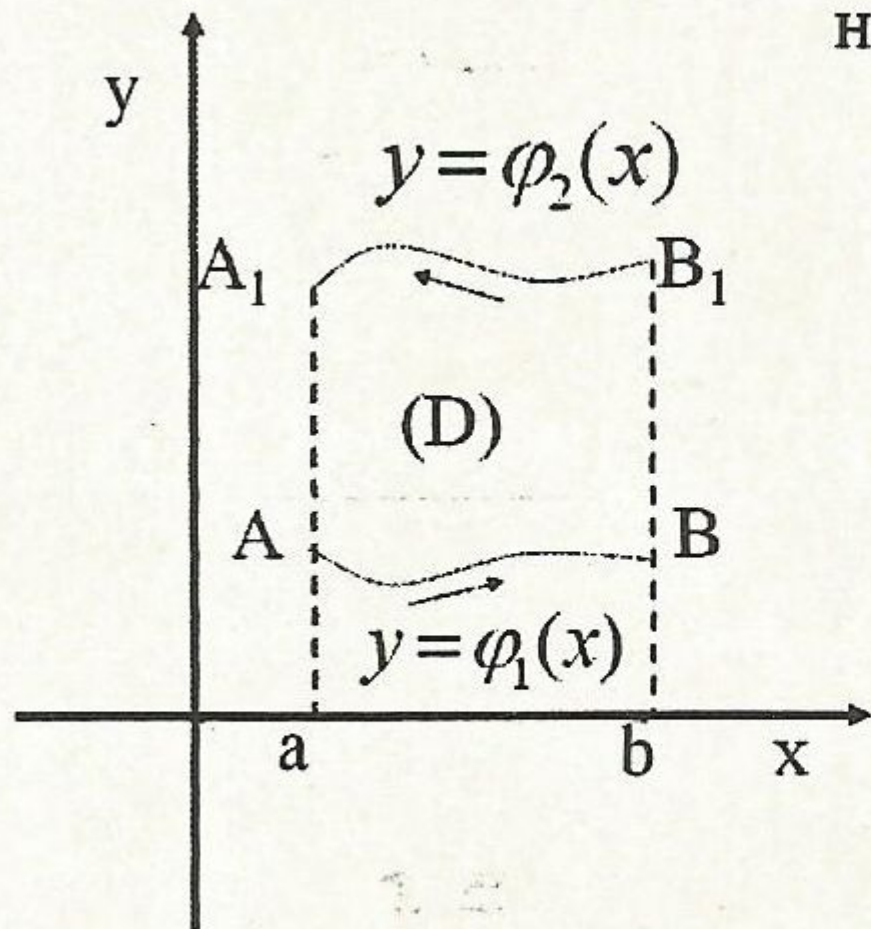


$$(AB): y = \varphi_1(x)$$

$$(A_1B_1): y = \varphi_2(x),$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  непрерывны на  $[a, b]$  и прямых  $x = a$ ,  $x = b$ .

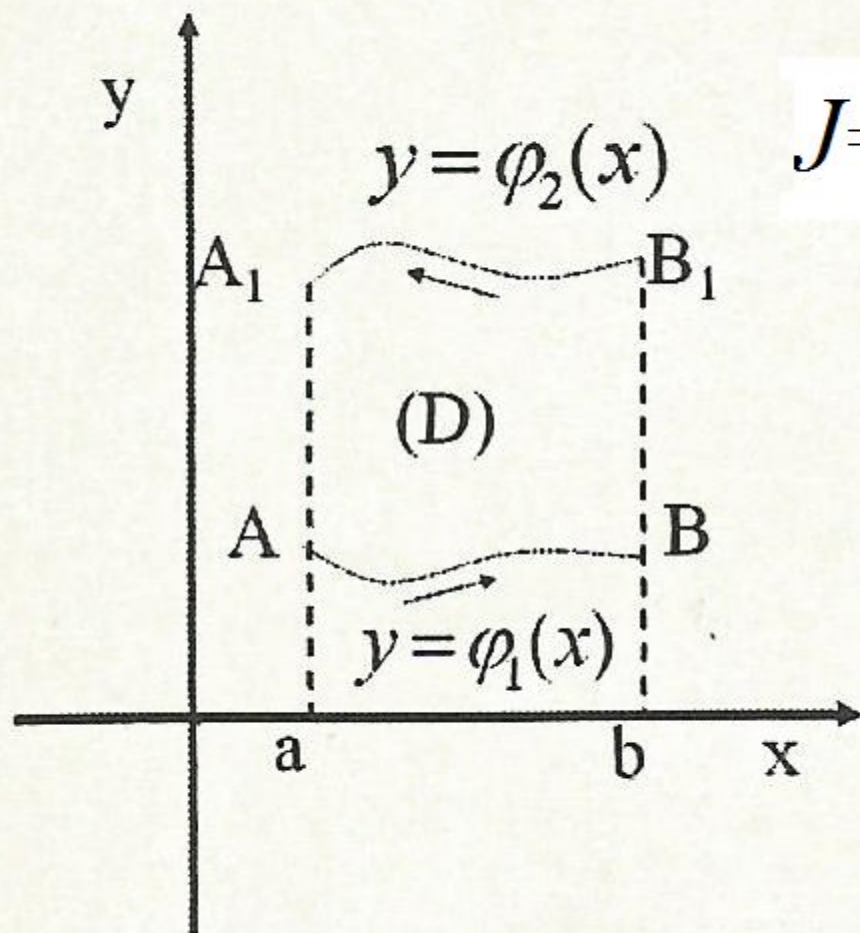
Любая прямая, параллельная оси  $OY$  пересекает контур  $L$  не более чем в двух точках.



Пусть в области  $(D)$  определена и непрерывна вместе со своей частной производной по  $y$  функция  $P(x; y)$ .

Что можно сказать о существовании  $\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$ ?

Двойной интеграл  $\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$  существует. Вычислим его.



$$J = \iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy.$$

Внутренний интеграл вычисляется в предположении, что в функции  $\frac{\partial P}{\partial y}$  x сохраняет постоянное значение.

При этом условии функция

$P(x, y)$  является первообразной для  $\frac{\partial P}{\partial y}$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Тогда } \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy &= \int_a^b P(x, y) \Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dx = \\
 &= \int_a^b (P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x))) dx = \int_a^b P(x, \varphi_2(x)) dx - \\
 &- \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx = - \int_b^a P(x, \varphi_2(x)) dx - \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx.
 \end{aligned}$$

Каждый из интегралов, стоящих в правой части равенства, может быть заменен криволинейным интегралом. ....

ПОЧЕМУ?

На основании формулы (4) из 3.3.

Первый - вдоль дуги  $B_1A_1$ , второй - вдоль дуги  $AB$ .

Поэтому можем записать

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{\cup B_1A_1} P(x, y) dx - \int_{\cup AB} P(x, y) dx. \quad (1)$$

Заметив, что криволинейные интегралы  $\int_{\cup AA_1} P(x, y) dx$

и  $\int_{\cup BB_1} P(x, y) dx$  вдоль отрезков  $BB_1$  и  $AA_1$ .

перпендикулярных оси  $OX$  равны нулю, равенство (1)

заменяем на  $\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{\cup AB} P(x, y) dx - \int_{\cup BB_1} P(x, y) dx -$

$- \int_{\cup B_1A_1} P(x, y) dx - \int_{\cup A_1A} P(x, y) dx = - \left[ \int_{\cup AB} P(x, y) dx +$

$+ \int_{\cup BB_1} P(x, y) dx + \int_{\cup B_1A_1} P(x, y) dx + \int_{\cup A_1A} P(x, y) dx \right] =$

$= - \oint_L P(x, y) dx.$

Итак, 
$$\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \oint_L P(x, y) dx \quad (2)$$

Полученная формула выражает двойной интеграл по области  $(D)$  через криволинейный интеграл по контуру  $L$ , ограничивающему область.

Данная формула установлена для случая, когда  $(D)$  простейшая область. Нетрудно убедиться, что она остается в силе для области более сложного вида, а именно для любой области, которую можно разбить с помощью нескольких прямых, параллельных оси  $OY$  на конечное число областей рассмотренного типа.



Рассмотрим теперь в плоскости  $XOY$  простейшую замкнутую область ( $\sigma$ ) второго типа, ограниченную замкнутым контуром ( $L$ ), образованным двумя прямыми  $y = c$ ,  $y = d$  и двумя непрерывными на отрезке  $[c, d]$  кривыми  $x = \psi_1(y)$  и  $x = \psi_2(y)$ , где для любого  $y \in [c, d]$   $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ .

Пусть функция  $Q(x, y)$  определена и непрерывна вместе со своей частной производной  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  в области  $(\sigma)$ . Тогда аналогично предыдущему

можно доказать, что 
$$\iint_{(\sigma)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_L Q(x, y) dy \quad (3)$$

Формула (3) останется верной и для области  $(\sigma)$ , которую можно разбить прямыми, параллельными оси  $Ox$  на конечное число областей второго типа.

Вычитая из равенства (3) равенство (2), получаем формулу:

$$\iint_{(D)} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (4)$$

Эта формула, устанавливающая связь между двойным интегралом по области  $(D)$  и полным криволинейным интегралом по ее контуру  $L$  называется формулой Грина по имени английского математика и физика Д. Грина (1793-1841 гг.)

Пример. Вычислим с помощью формулы Грина

$$I = \oint_L xy^2 dy - x^2 y dx, \text{ где } L\text{- окружность } x^2 + y^2 = R^2,$$

обходимая против часовой стрелки.

$$Q(x, y) = xy^2, \quad P(x, y) = -x^2 y, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -x^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2.$$

$$I = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (y^2 + x^2) dx dy = \iint_D r^3 dr d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr = \frac{R^4}{4} 2\pi = \frac{1}{2} R^4 \pi.$$

### **3.6. Выражение площади с помощью криволинейного интеграла**

Криволинейный интеграл часто удобно использовать при вычислении площади плоской фигуры.

Положим в формуле (2)  $\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = -\oint_L P(x, y) dx$

$P(x, y) = y$ . Учитывая, что  $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$ , получим

$\iint_{(D)} dx dy = -\oint_L y dx$ . так как интеграл  $\iint_{(D)} dx dy$

численно равен площади  $S$  плоской области  $(D)$ ,

то имеем

$$S = -\int_L y dx. \quad (*)$$

Если положить в формуле (3)  $\iint_{(D)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_L Q(x, y) dy$

$Q(x, y) = x$ , то получим  $S = \oint_L x dy$ . (\*\*)

Складывая почленно равенства (\*) и (\*\*) и деля обе части полученного равенство на 2, приходим

к формуле  $S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx$ . (\*\*\*)

## Пример.

Вычислим площадь фигуры, ограниченной эллипсом  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$  при обходе эллипса в положительном направлении

$dx = -a \sin t dt$ ,  $dy = b \cos t dt$ . Воспользуемся

формулой (\*\*\*)  $S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx$ ,

получим  $S = \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \pi ab$ .



### **3.7. Криволинейные интегралы, зависящие только от начала и конца пути интегрирования**

Пусть в некоторой области  $(D)$  плоскости  $XOY$  определены и непрерывны функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$ .

Возьмем в  $(D)$  две точки  $A$  и  $B$ . Будем их соединять различными кусочно-гладкими кривыми  $L$ , целиком лежащими в  $(D)$ , и вычислять по ним криволинейный интеграл

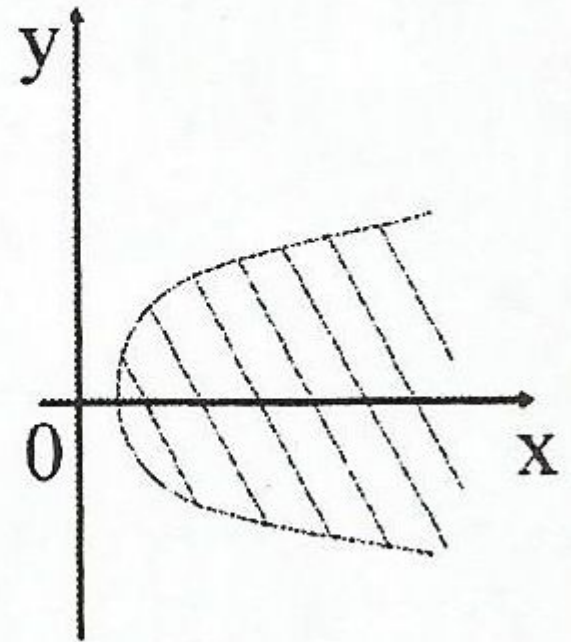
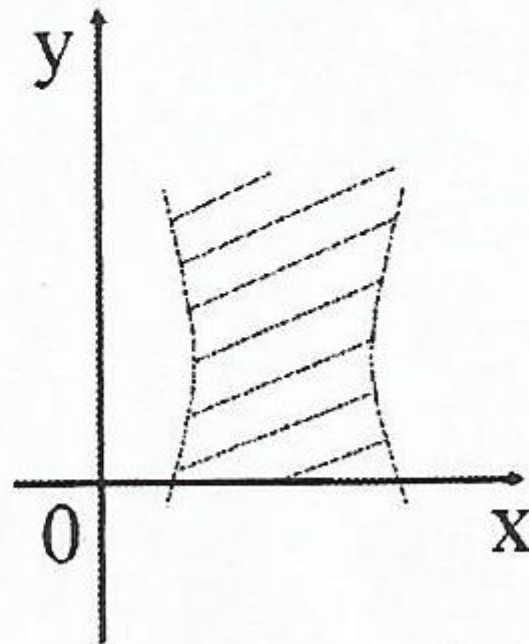
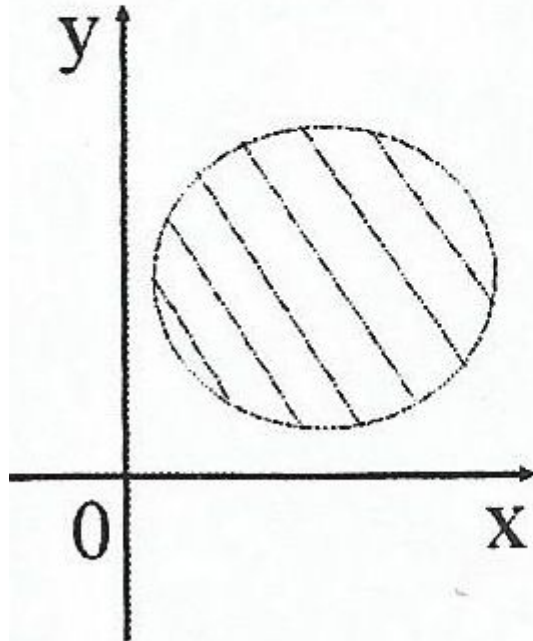
$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (1).$$

Мы получим, вообще говоря, различные значения интеграла (1). Но в некоторых случаях криволинейный интеграл может иметь одинаковые значения вдоль всех кривых, соединяющих т.  $A$  и  $B$ . Выясним при каких условиях криволинейный интеграл (1) не зависит от пути интегрирования.

## Определение.

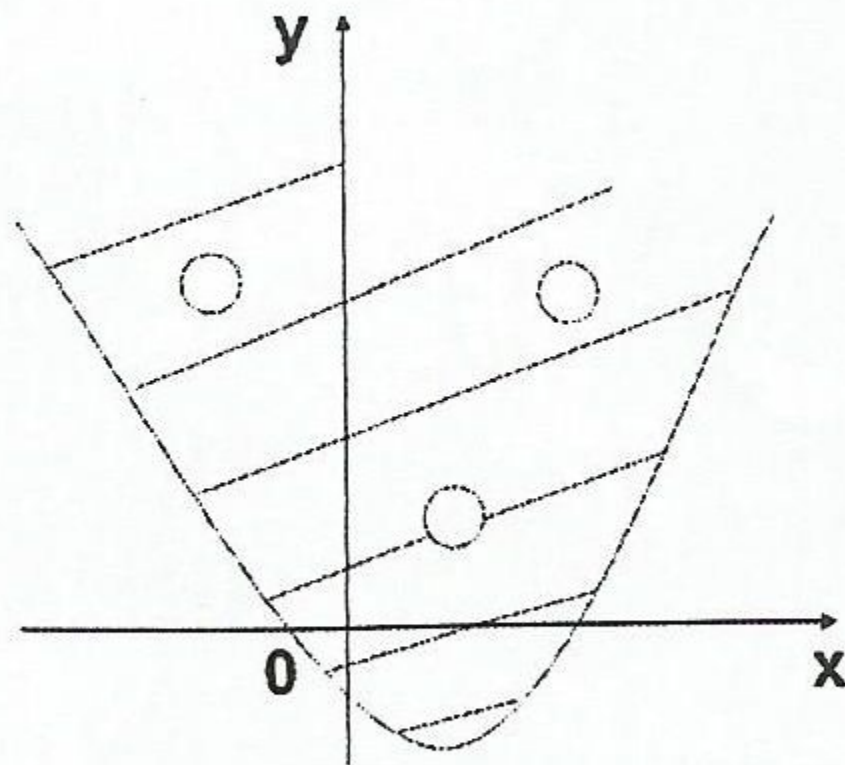
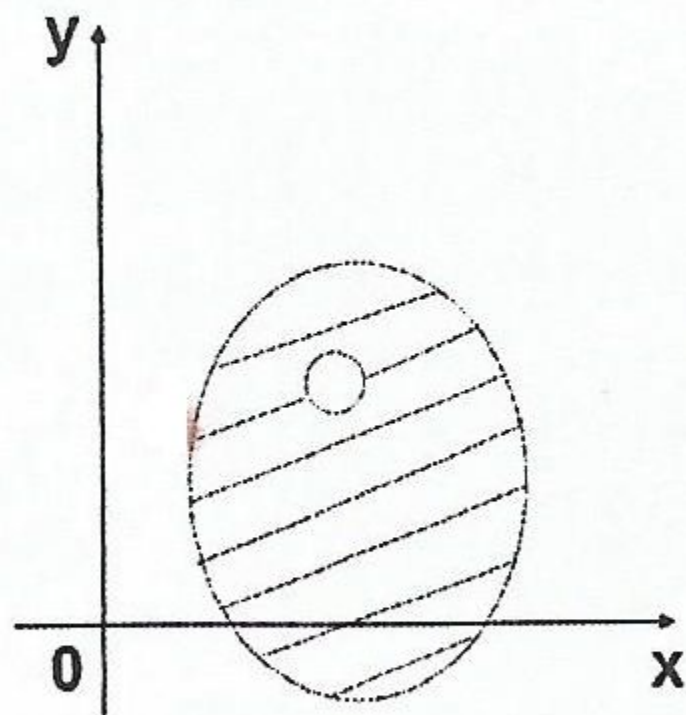
Область ( $D$ ) называется односвязной, если любой замкнутый контур  $L$ , лежащий в ( $D$ ), принадлежит ( $D$ ) вместе с областью ( $\sigma$ ), ограниченной этим контуром.

## ПРИМЕРЫ



**Односвязные области**

# ПРИМЕРЫ



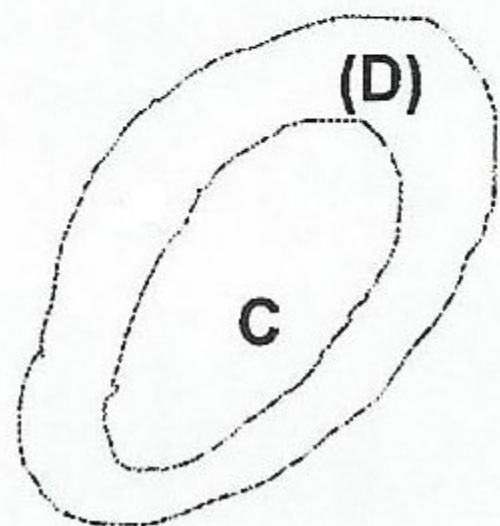
**Не односвязные области**

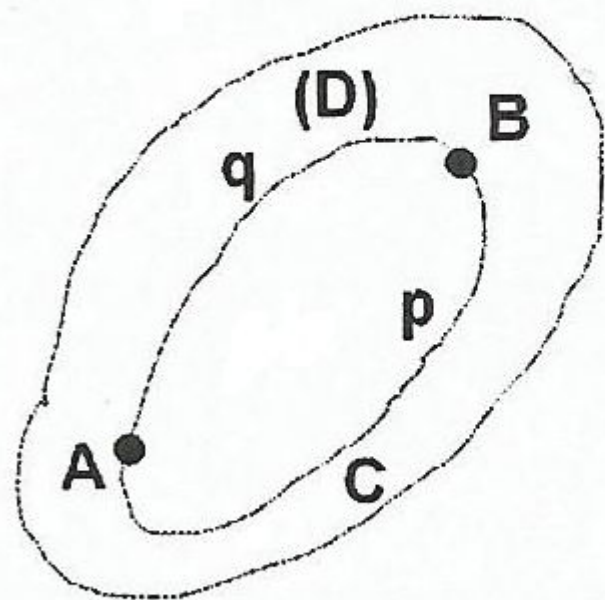
**Теорема 1.** Для того, чтобы криволинейный интеграл (1)  $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  не зависел от формы пути интегрирования в области (D) необходимо и достаточно, чтобы он по всякому замкнутому контуру C, не пересекающему себя и целиком лежащему в (D), равнялся нулю.

**Доказательство :**

*I. Необходимость.* Пусть значение интеграла (1) не зависит от формы пути интегрирования в некоторой области  $(D)$ .

Пусть  $C$  - любой, не пересекающий себя контур, лежащий в  $(D)$ .





Возьмем на  $C$  две произвольных точки  $A$  и  $B$ . Они разобьют  $C$  на две части  $AqB$  и  $ApB$ , каждая из которых есть путь, соединяющий т.  $A$  с т.  $B$ . Согласно допущению

$$\int_{ApB} Pdx + Qdy = \int_{AqB} Pdx + Qdy.$$



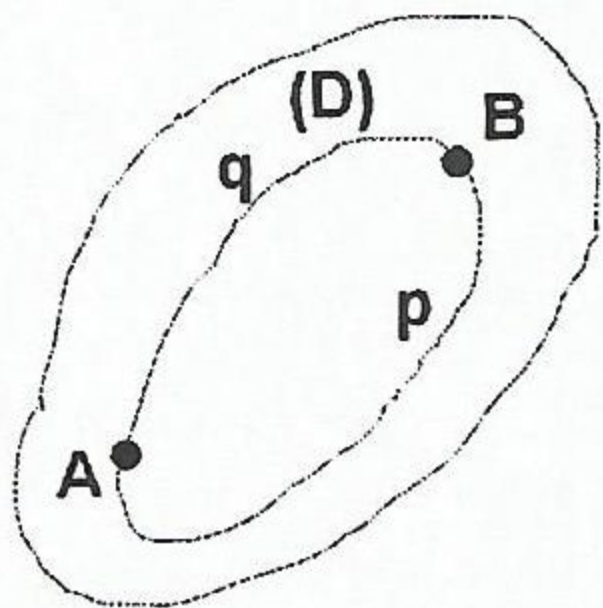
$$\text{Откуда } \int_{ApB} Pdx + Qdy - \int_{AqB} Pdx + Qdy = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{ApB} Pdx + Qdy + \int_{BqA} Pdx + Qdy = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \oint_C Pdx + Qdy = 0.$$

?

**II. Достаточность.** Пусть интеграл (1) по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в  $(D)$  равен нулю. Возьмем в  $(D)$  две любые точки  $A$  и  $B$ . Соединим их двумя различными кривыми,



не имеющими общих точек кроме  $A$  и  $B$ . Эти кривые образуют в совокупности замкнутый контур  $ArBqA$ . Согласно условию

$$\int_{ArBqA} Pdx + Qdy = 0.$$

Тогда  $\int_{ApB} Pdx + Qdy + \int_{BqA} Pdx + Qdy = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{ApB} Pdx + Qdy - \int_{AqB} Pdx + Qdy = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{ApB} Pdx + Qdy = \int_{AqB} Pdx + Qdy.$$

**Замечание.** Мы предположили, что дуги  $ApB$  и  $AqB$  не имеют общих точек кроме  $A$  и  $B$ . Теорема остается в силе и для случая, когда кривые  $ApB$  и  $AqB$  пересекаются.

Доказанная теорема показывает, что поставленный вопрос об условиях независимости интеграла (1) от пути интегрирования эквивалентен вопросу: при каких условиях данный интеграл обращается в нуль по любому замкнутому контуру, лежащему в  $(D)$ .

Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

**Теорема 2.** Пусть функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  определены и непрерывны вместе со своими частными

производными  $\frac{\partial P}{\partial y}$  и  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  в замкнутой ограниченной

односвязной области  $(D)$ . Тогда для того, чтобы криволинейный интеграл по любому замкнутому кусочно гладкому контуру  $C$ , целиком лежащему в

$(D)$ , был равен нулю  $\oint_C P dx + Q dy = 0$  (2),

необходимо и достаточно, чтобы во всех точках

области  $(D)$  выполнялось условие:  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  (3).

**Доказательство.**

**Достаточность.** Пусть во всех точках области

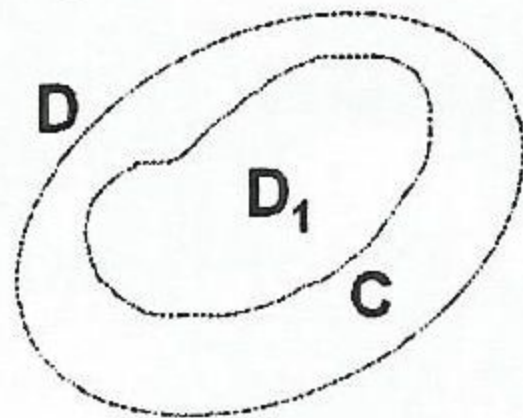
(D) выполняется условие (3)  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , C -

произвольный кусочно гладкий контур,

лежащий в (D). Обозначим через (D<sub>1</sub>) - область, ограниченную контуром C.

Так как по условию D односвязна, то

(D<sub>1</sub>) ... (D).| ?



$(D_1) \subset (D)$ . Поэтому в  $(D_1)$  определены и непрерывны со своими частными производными  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$ . Следовательно в  $(D_1)$  можно применить формулу Грина.

**ЗАПИШИТЕ ЕЕ!**



$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_{(D_1)} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

В силу условия (3)

$$\iint_{(D_1)} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \oint_C P dx + Q dy = 0.$$

**Необходимость.** Пусть теперь выполняются условия (2). | ?

Доказательство проведем методом от противного. Допустим, что хотя бы в одной точке области (D) условия (3) не выполнены,

т.е. 
$$\frac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial x} \neq \frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

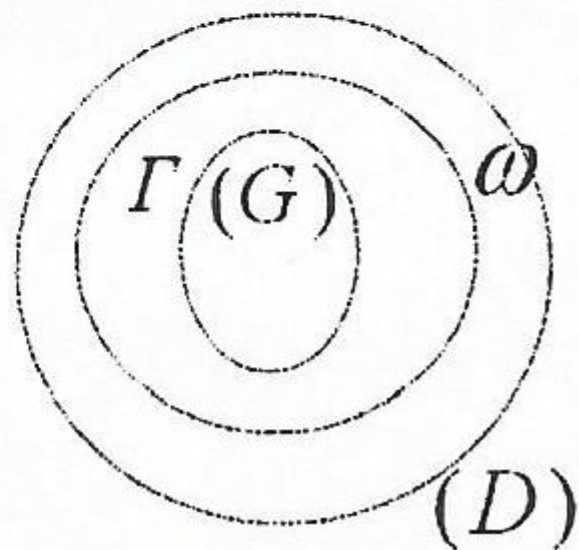
Следовательно в этой точке 
$$\left. \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \neq 0.$$

Пусть для определенности 
$$\left. \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} > 0.$$

Поскольку  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  и  $\frac{\partial P}{\partial y}$ , а значит и функция

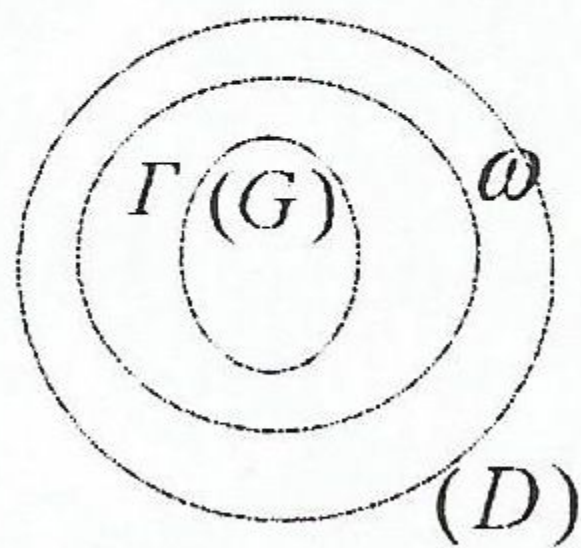
$f(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$  непрерывны в  $(D)$ , и, в

частности, в т.  $(x_0, y_0)$ . Следовательно существует окрестность  $\omega$  точки  $(x_0, y_0)$ , во всех точках которой  $f(x, y) > 0$ . Возьмем в  $\omega$  какой-нибудь кусочно-гладкий контур  $\Gamma$ . Область, ограниченную контуром  $\Gamma$  обозначим через  $(G)$ .



Тогда по формуле Грина имеем:

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy = \iint_{(G)} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (4).$$



К двойному интегралу в правой части применим теорему о среднем значении. | ?

Сформулируйте ее!!!

$$\iint_{(G)} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = f(\xi, \eta) \cdot s, \text{ где}$$

$(\xi, \eta) \in G$ , а  $s$  - площадь  $(G)$ .

Так как  $f(\xi, \eta)$  и  $s > 0$ , то  $\iint_{(G)} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy > 0$ .

Но тогда из (4) следует, что для выбранного контура  $\int_{\Gamma} P dx + Q dy \neq 0$ .

Получили противоречие. Значит наше предположение было не верно.

**Замечание.** Условие односвязности области  $(D)$  существенно. Им пользовались при применении формулы Грина. Для многосвязной области **T.2** не верна.

**Следствие.** Пусть в замкнутой односвязной области (D) функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  непрерывны и имеют непрерывные частные производные

$\frac{\partial P}{\partial y}$  и  $\frac{\partial Q}{\partial x}$ . Тогда для того, чтобы криволинейный

интеграл  $\int_L P dx + Q dy$  не зависел от пути

интегрирования, необходимо и достаточно,

чтобы в каждой точке области (D) выполнялось

равенство  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ .

### 3.8. Признак полного дифференциала

В криволинейном интеграле (1)  $\int_{AB} P dx + Q dy$

подинтегральное выражение напоминает выражение для полного дифференциала некоторой функции  $U(x, y)$  двух

переменных  $dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$ .



Возникает вопрос: служит ли выражение  $Pdx + Qdy$  полным дифференциалом некоторой функции двух переменных, т.е. существует ли такая функция  $U(x, y)$ , полный дифференциал которой равен  $dU = Pdx + Qdy$  (2).

Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

**Теорема :** Если функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$

непрерывны вместе со

своими частными производными  $\frac{\partial P}{\partial y}$  и  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  в

некоторой замкнутой ограниченной односвязной

области (D), то для того, чтобы выражение

$Pdx + Qdy$  было полным дифференциалом некоторой

функции в области (D), необходимо и

достаточно, чтобы  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  (3).

**Доказательство.**

**Необходимость.** Предположим, что существует такая функция  $U(x, y)$ , что

$$\left. \begin{aligned} (\forall (x, y) \in (D)) \left( dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = \right. \\ \left. = P dx + Q dy \right) \end{aligned} \right\}. (4)$$

Отсюда следует  $P = \dots$ ,  $Q = \dots ???$

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Продифференцировав обе части первого равенства

по  $y$ , а второго по  $x$ , получим 
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}. \quad (5)$$

Так как по условию  $\frac{\partial P}{\partial y}$  и  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  непрерывны в  $(D)$ , то

$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$  и  $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$  непрерывны в  $(D)$  и следовательно

выполняется равенство  $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$ , но тогда из (5)

следует  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , то есть в  $(D)$  выполняется равенство (3).

## Достаточность.

Пусть для выражения (2)  $Pdx + Qdy$  выполнено

условие (3) 
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Покажем существование функции  $U(x, y)$ ,

для которой выражение (2) является полным дифференциалом.

Действительно, при выполнении условий (3) криволинейный интеграл (1) не зависит от пути интегрирования и вполне определяется заданием начальной и конечной точки пути интегрирования.

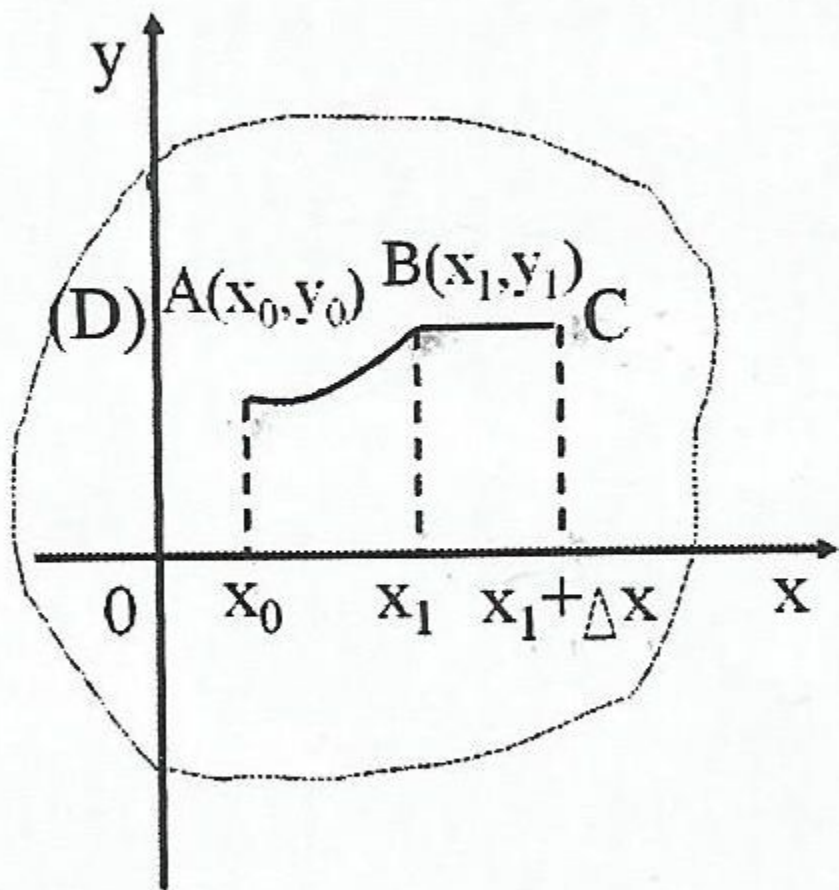
На основании чего сделано такое утверждение?

Зафиксируем начальную точку пути интегрирования  $A(x_0, y_0)$ , а точку  $B(x, y)$  будем считать переменной в области  $(D)$ .

Тогда криволинейный интеграл (1) будет некоторой функцией от двух переменных  $x$  и  $y$ , определенной в области  $(D)$ . Обозначим эту функцию

$$U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Покажем, что функция  $U(x, y)$  имеет в области  $(D)$  полный дифференциал и найдем его.



Пусть  $B(x_1, y_1)$  некоторая фиксированная точка из  $(D)$ .

Оставляя  $y_1$  без изменения, дадим  $x_1$  приращение  $\Delta x$

такое, чтобы точка  $C(x_1 + \Delta x, y_1) \in (D)$ .



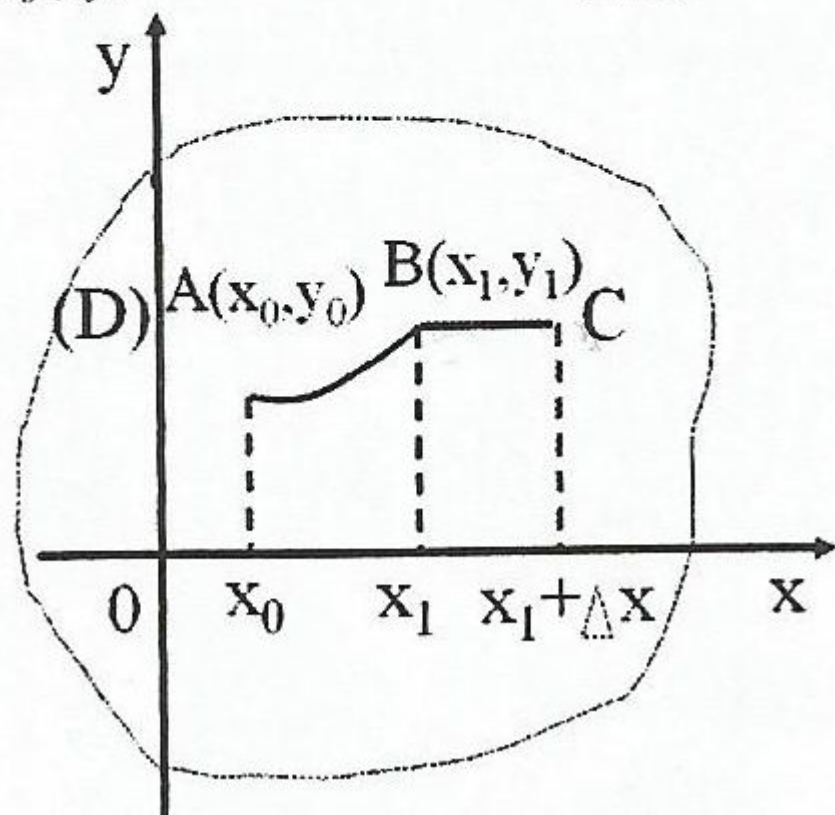
Соответствующее частное приращение функции  $U(x, y)$  будет равно

$$\Delta_x U = U(x_1 + \Delta x, y_1) - U(x_1, y_1) =$$

$$= \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1 + \Delta x, y_1)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy - \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

$$\text{При этом } \Delta_x U = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1 + \Delta x, y_1)} P dx + Q dy - \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P dx + Q dy =$$

$$= \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P dx + Q dy + \int_{(x_1, y_1)}^{(x_1 + \Delta x, y_1)} P dx + Q dy - \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P dx + Q dy =$$



$$= \int_{(x_1, y_1)}^{(x_1 + \Delta x, y_1)} P dx + Q dy =$$

$$= \int_{(x_1, y_1)}^{(x_1 + \Delta x, y_1)} P dx + \int_{(x_1, y_1)}^{(x_1 + \Delta x, y_1)} Q dy.$$

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_1 + \Delta x, y_1)} Q dy = 0, \text{ поскольку на отрезке } [BC]$$

значение  $y$  постоянно, следовательно  $dy = 0$ .

Итак,

$$\Delta_x U = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_1 + \Delta x, y_1)} P dx = \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} P(x, y_1) dx,$$

ТАК КАК.....

Уравнение  $BC$  :  $y = y_1$ .

Применяя к полученному определенному интегралу теорему о среднем, получим

$$\Delta_x U = P(x_1 + \theta \Delta x, y_1) \Delta x, \text{ где } 0 < \theta < 1.$$

Откуда 
$$\frac{\Delta_x U}{\Delta x} = P(x_1 + \theta \Delta x, y_1).$$

Устремим  $\Delta x$  к нулю. В силу непрерывности функции  $P(x, y)$  в  $(D)$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(x_1 + \theta \Delta x, y_1) = P(x_1, y_1).$$

Следовательно,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x U}{\Delta x} = P(x_1, y_1)$  существует,

что означает: функция  $U(x, y)$  имеет в т.  $(x_1, y_1)$  частную производную по  $x$ , равную т.  $(x_1, y_1)$ .

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{(x_1, y_1)} = P(x_1, y_1).$$

Поскольку т.  $(x_1, y_1)$  в области  $(D)$  выбрана произвольно, то это справедливо для любой точки области  $(D)$ .

Совершенно аналогично доказывается, что в

любой т.  $(x, y)$  из  $(D)$   $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y)$ .

Так как  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  непрерывны в

$(D)$ , то частные производные  $\frac{\partial U}{\partial x}$  и  $\frac{\partial U}{\partial y}$

непрерывны в  $(D)$ . Что отсюда вытекает???

Отсюда вытекает, что  $U(x, y)$   
дифференцируема в  $(D)$  и ее  
полный дифференциал

$$dU = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

**Замечание.** Функцию двух переменных  $U(x, y)$ , полный дифференциал которой равен подинтегральному выражению  $Pdx + Qdy$  (2) называют первообразной для этого выражения. Найденная функция  $U(x, y)$  является не единственной первообразной для (2). Такими функциями будут очевидно функции вида  $U(x, y) + C$ , где  $C$  - произвольная постоянная.

Легко убедиться, что  $U(x, y) + C$  есть общее выражение, общий вид всех первообразных для выражения  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ .



### 3.9. Восстановление функции по ее полному дифференциалу

Пусть  $Pdx + Qdy$  есть полный дифференциал некоторой функции  $U(x, y)$  в некоторой замкнутой ограниченной односвязной области.

Из 3.8. следует, что для отыскания  $U(x, y)$  достаточно выбрав какую-либо точку

$(x_0, y_0) \in D$ , вычислить криволинейный интеграл

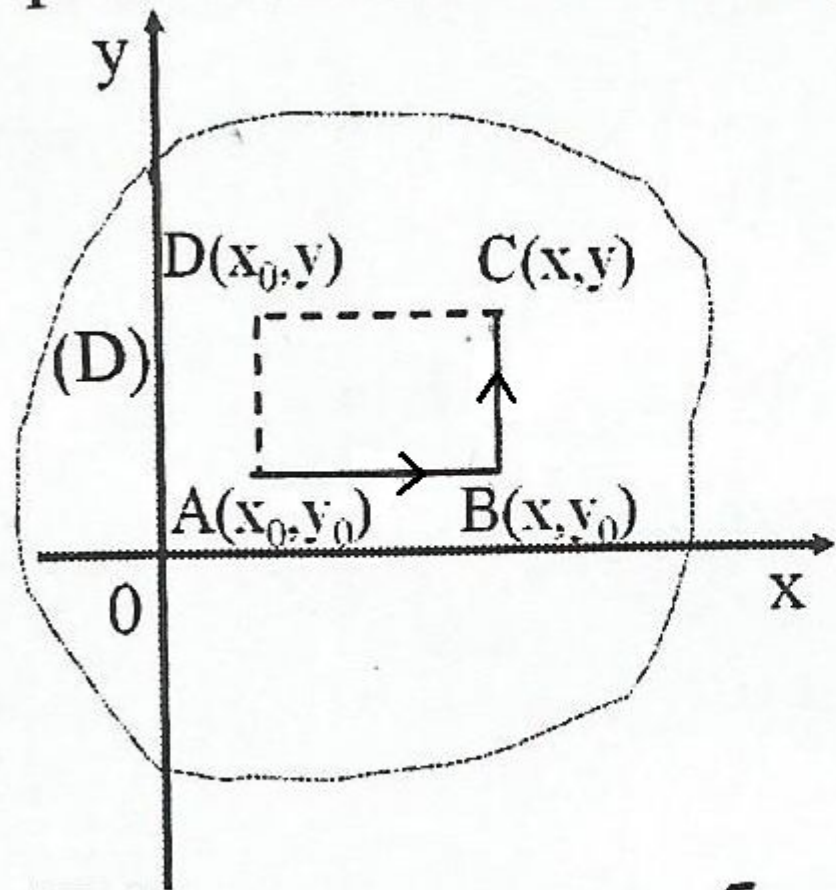
$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy$  по любой линии, соединяющей

точки  $(x_0, y_0)$  и  $(x, y)$ .

Формула  $U(x,y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy + C,$

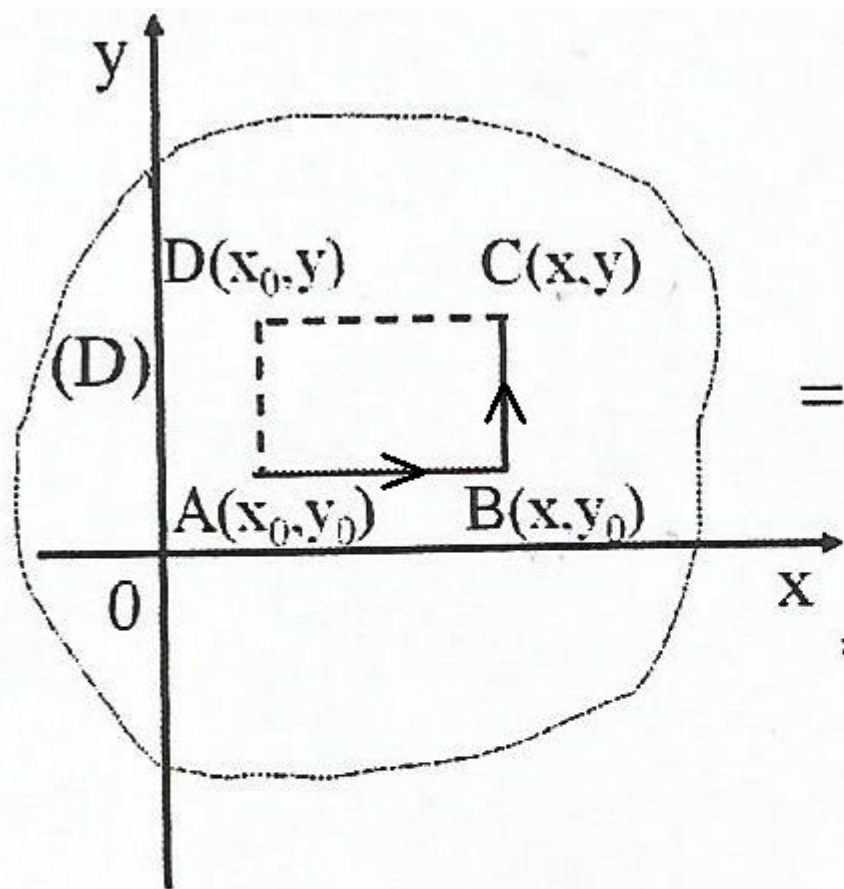
где  $C$ -произвольная постоянная, дает возможность определить множество всех функций, имеющих подынтегральное выражение своим полным дифференциалом.

Криволинейный интеграл легко вычислить,



если в качестве пути интегрирования взять ломаную, звенья которой параллельны координатным осям, например, ломаную

$ABC$ , лежащую в области  $(D)$ .



$$\text{Тогда } \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy =$$

$$= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y_0)} Pdx + Qdy + \int_{(x, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy =$$

$$= \int_{x_0}^x P(x, y)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy + C.$$

$$\text{Итак, } U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y)dx +$$

$$+ \int_{y_0}^y Q(x, y)dy + C.$$

$$[AB]: y = y_0, dy = 0,$$

$$[BC]: x = \text{const}, dx = 0.$$

Замечание. Можно было бы интегрировать по ломаной  $ADC$ . В этом случае получим

$$U(x, y) = \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + \int_{x_0}^x P(x, y) dx + C.$$

### Пример.

Найти функцию  $U(x, y)$  по ее полному дифференциалу

$$dU(x, y) = (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy.$$

### Решение.

В этом случае  $P(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$ ,  $Q(x, y) = x^2 - 2xy - y^2$   
непрерывны и имеют непрерывные производные

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 2y, \text{ удовлетворяющие условию}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 2y. \text{ Значит } Pdx + Qdy \text{ полный дифференциал.}$$

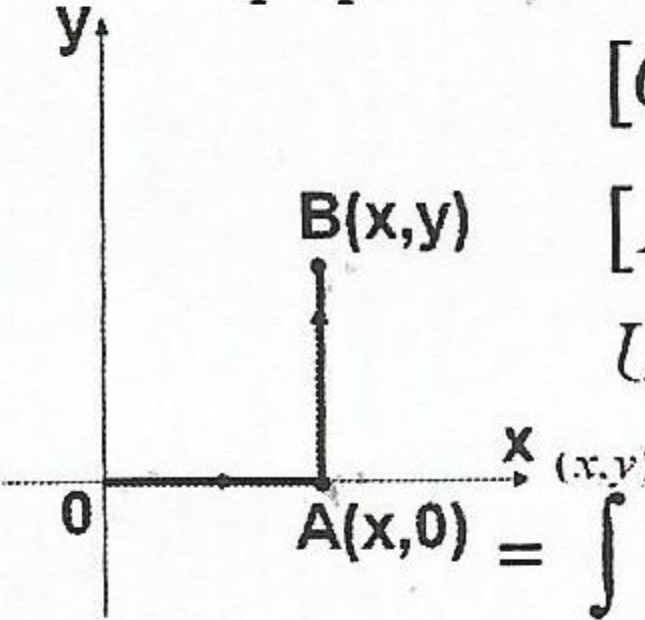
Для нахождения  $U(x, y)$  примем за начало интегрирования т.  $(0, 0)$ , за конечную  $(x, y)$ .

Интегрирование будем вести вдоль ломаной  $OAB$ .

$$[OA]: y = 0, dy = 0, 0 \leq x \leq x.$$

$$[AB]: x = \text{const}, dx = 0, 0 \leq y \leq y.$$

$$U(x, y) =$$



$$U(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - y^2) dy =$$

$$= \int_0^x x^2 dx + \int_0^y (x^2 - 2xy - y^2) dy + C = \frac{x^3}{3} \Big|_0^x + \left( x^2 y - \frac{2xy^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^y =$$

$$= \frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + C.$$

