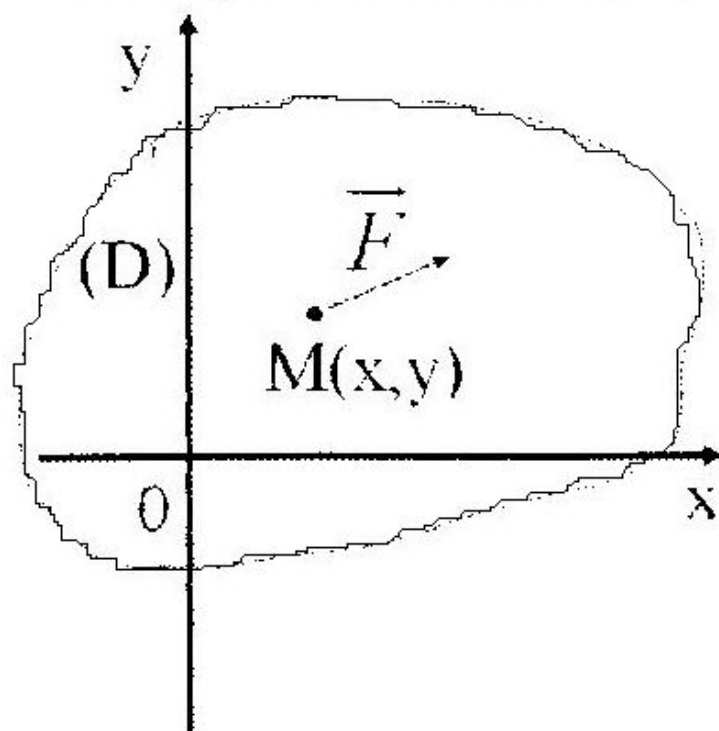


Глава 3. Криволинейные интегралы

3.1. Задача о работе плоского силового поля

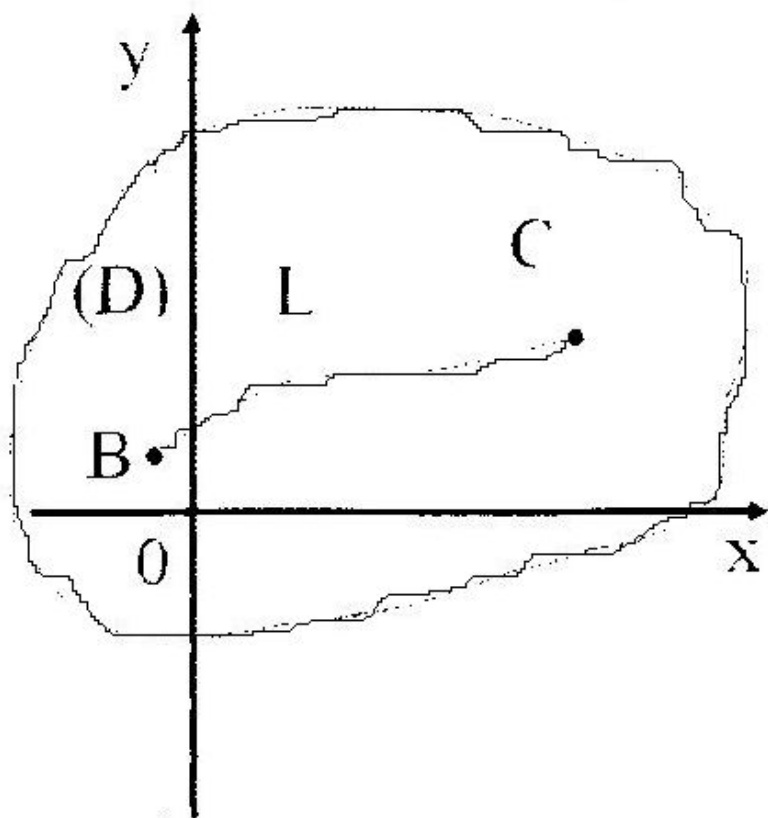
Пусть на координатной плоскости XOY дана некоторая замкнутая область (D) и пусть с каждой точкой $M(x, y)$



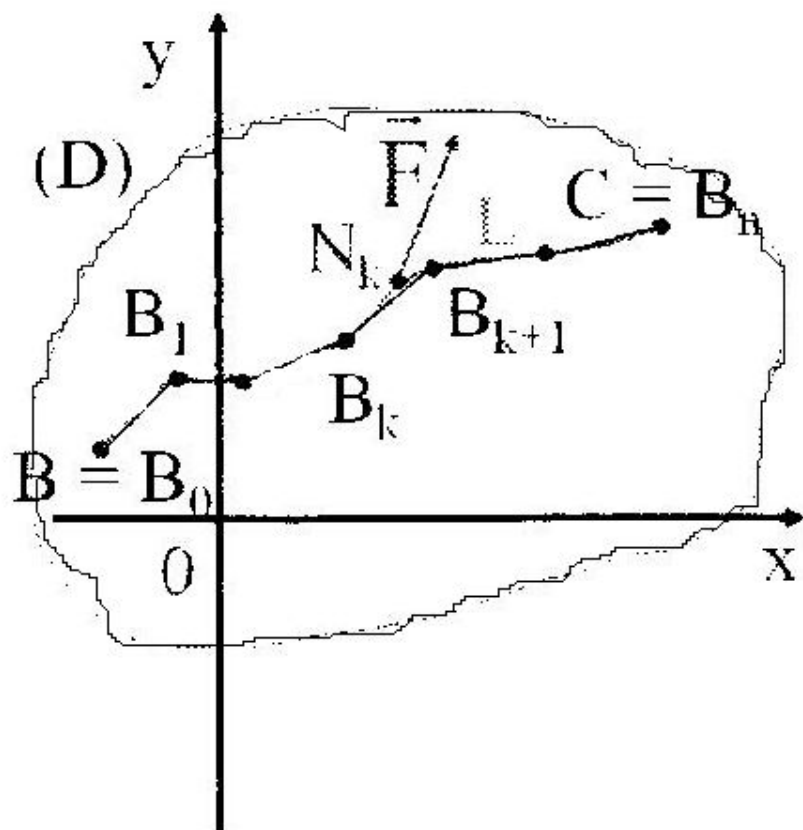
области (D) связан вектор $\vec{F} = \vec{F}(x, y)$, величина и направление которого зависят от координат точки M , представляющий силу, действующую на находящуюся в точке M массу.

В таком случае говорят, что в области D задано плоское силовое поле $\vec{F}(x, y)$.

Пусть далее под действием силы поля материальная



точка движется по некоторой спрямляемой кривой L , расположенной в области (D) . Требуется вычислить работу A данного силового поля при перемещении материальной точки по линии L из точки B в точку C .



На каждой дуге $B_k B_{k+1}$ возьмем произвольную т. $N_k (\xi_k, \eta_k)$.

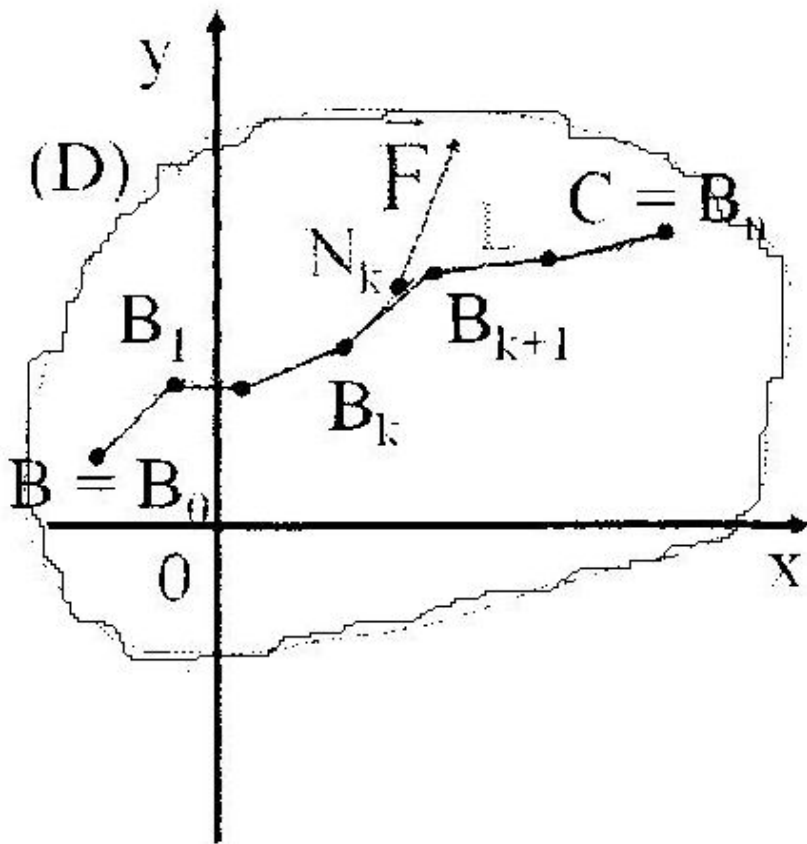
Допустим, что участок пути $B_k B_{k+1}$ прямолинеен (т.е. дугу $B_k B_{k+1}$ заменим хордой

$[B_k B_{k+1}]$) и условимся считать,

что при движении точки по отрезку $[B_k B_{k+1}]$ на нее

действует постоянная сила, равная силе, приложенной

в т. $N_k (\xi_k, \eta_k)$: $\vec{F}_k = \vec{F}(\xi_k, \eta_k)$.



Тогда работа ΔA_k силы

\vec{F}_k на отрезке $[B_k B_{k+1}]$

будет равна

$$(1) \Delta A_k = |\vec{F}_k| \cdot |\overrightarrow{B_k B_{k+1}}| \cdot \cos \varphi,$$

где φ - угол между векторами

\vec{F}_k и $\overrightarrow{B_k B_{k+1}}$, или

$$\Delta A_k = (\vec{F}_k \cdot \overrightarrow{B_k B_{k+1}}).$$

Обозначим проекции силы \vec{F} на координатные оси OX и OY соответственно $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, тогда $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ и, следовательно $\vec{F}(\xi_k, \eta_k) = P(\xi_k, \eta_k)\vec{i} + Q(\xi_k, \eta_k)\vec{j}$.

Проекции вектора $\overline{B_k B_{k+1}}$ соответственно на оси OX и OY равны.....

Так как проекции вектора $\overrightarrow{B_k B_{k+1}}$ на оси OX и OY соответственно равны

$$x_{k+1} - x_k = \Delta x_k, \quad y_{k+1} - y_k = \Delta y_k,$$

$$\text{то } \overrightarrow{B_k B_{k+1}} = \Delta x_k \vec{i} + \Delta y_k \vec{j}.$$

$$\text{Тогда } \Delta A_k = (\vec{F}_k \cdot \overrightarrow{B_k B_{k+1}}) = \dots\dots\dots$$

$$\Delta A_k = (\vec{F}_k \cdot \overrightarrow{B_k B_{k+1}}) = P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k.$$

Для работы A_n силового поля вдоль ломаной

$B_0 B_1 B_2 \dots B_n$ имеем выражение

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta A_k = \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k. \quad (2)$$

Естественно ожидать, что сумма A_n

будет тем точнее выражать работу A

силового поля $\vec{F}(x, y)$, чем меньше

будут длины частичных дуг $B_k B_{k+1}$.

Будем теперь неограниченно увеличивать число n делений дуги BC так, чтобы λ наибольшая из длин частичных дуг $\overrightarrow{B_k B_{k+1}}$ стремилась к нулю.

Если существует $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} (P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k)$

и не зависит от выбранного способа разбиения дуги AB на частичные и от выбора точек $N_k(\xi_k, \eta_k)$ на частичных дугах, то этот предел примем за работу силового поля $\vec{F}(x, y)$ при перемещении материальной точки по дуге от точки B до точки C .

Итак, по определению, полагаем

$$(3) A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} A_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} (P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k)$$

В тех случаях, когда $Q(x, y) = 0$ или $P(x, y) = 0$,
вместо суммы (3) будем иметь суммы

$$(4) \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k \quad \text{или} \quad \sum_{k=0}^{n-1} Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k \quad (5)$$

К вычислению пределов сумм (2), (4), (5) приводит решение большого числа других важных задач теоретического и прикладного характера. Поэтому возникает задача изучить подобные суммы, отвлекаясь от конкретного содержания, и установить удобные способы вычисления пределов этих сумм.

3.2. Понятие криволинейного интеграла (по координатам)

Пусть вдоль спрямляемой кривой AB , лежащей в плоской области, определена функция $P(x, y)$. Разобьем дугу AB на n частичных дуг точками $A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$. Обозначив через x_k, y_k координаты точки A_k и взяв на каждой частичной дуге $A_k A_{k+1}$ произвольно точку $N_k(\xi_k, \eta_k)$, вычислим значение функции P в этой точке $P(\xi_k, \eta_k)$ и умножим на величину проекции дуги $A_k A_{k+1}$ на ось Ox , то есть на $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$.

Найдем сумму всех таких произведений

$$(1) \sigma = \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k.$$

Эта сумма называется интегральной суммой для функции $P(x, y)$ вдоль дуги AB по координате x .

Определение.

Криволинейным интегралом от функции $P(x, y)$ вдоль дуги AB по координате x называется предел, к которому стремится интегральная сумма σ , когда наибольшая из длин λ дуг $A_k A_{k+1}$ стремится к нулю, при условии, что этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения дуги AB на частичные, ни от выбора точек $N_k (\xi_k, \eta_k)$ на этих дугах.

Обозначается криволинейный интеграл
вдоль дуги AB по координате x :

$$\int_{\cup AB} P(x, y) dx.$$

Итак,
$$\int_{\cup AB} P(x, y) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k.$$

Аналогично определяется криволинейный интеграл вдоль кривой AB по координате y :

$$\int_{\cup AB} P(x, y) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k, \text{ где}$$

$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ — проекция дуги AB на ось OY .

Если криволинейный интеграл $\int_{\cup AB} P(x, y) dx$

или $\int_{\cup AB} P(x, y) dy$ существует, то функция P

называется интегрируемой вдоль дуги AB

по координате соответственно x или y .

Пусть вдоль дуги AB определены две функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ и существуют интегралы $\int_{\cup AB} P(x, y) dx$

и $\int_{\cup AB} Q(x, y) dy$. Сумму этих интегралов обозначают

$\int_{\cup AB} P(x, y) dx + \int_{\cup AB} Q(x, y) dy$ и называют полным

криволинейным интегралом (или криволинейным интегралом общего вида) вдоль дуги AB . Итак,

$$\int_{\cup AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\cup AB} P(x, y) dx + \int_{\cup AB} Q(x, y) dy.$$

Замечание 1.

Определение криволинейного интеграла не исключает случая совпадения точек A и B , то есть случая замкнутой кривой. Все предыдущие рассуждения остаются в силе. Только направление обхода замкнутой кривой должно быть каким-либо способом указано. Замкнутую кривую (или замкнутый контур) обычно обозначают какой-либо буквой, например L . Для обозначения криволинейного интеграла по замкнутому контуру употребляют символ

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Замечание 2.

Возвращаясь к задаче о работе силового поля, можно сказать, что в случае существования соответствующего криволинейного интеграла работа A силового поля

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$$

при перемещении материальной точки по дуге BC выражается криволинейным

$$\text{интегралом } A = \int_{\cup BC} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

3.3. *Существование и вычисление криволинейного интеграла*

Пусть спрямляемая кривая AB задана

параметрически $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$, где функции φ, ψ, φ'

непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$, причем значению параметра α соответствует т. A , значению

$$t = \beta - \text{т. } B.$$

При изменении параметра t от α до β переменная точка описывает кривую AB в направлении от т. A до т. B .

Пусть далее вдоль дуги AB определена и непрерывна функция $P(x, y)$.

Докажем, что при сделанных допущениях существует криволинейный интеграл

$$\int_{\cup AB} P(x, y) dx.$$

Составим интегральную сумму для функции $P(x, y)$

вдоль дуги AB по координате x :
$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k.$$

Обозначим через t_k ($k = \overline{0, n-1}$) значения параметра t , которым соответствуют делящие точки $A_k(x_k, y_k)$, а через τ_k ($k = \overline{0, n-1}$) значения параметра t , которыми определяются выбранные на дуге $A_k A_{k+1}$ точки $N_k(\xi_k, \eta_k)$.

Таким образом, $x_k = \varphi(t_k)$, $y_k = \psi(t_k)$, $\xi_k = \varphi(\tau_k)$,

$\eta_k = \psi(\tau_k)$, $\Delta x_k = \varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)$.

Тогда интегральная сумма будет иметь вид?

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) (\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k))$$

Функция φ на каждом из отрезков $[t_k, t_{k+1}]$

удовлетворяет условиям т. Лагранжа | ПОЧЕМУ???

Следовательно, $\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = \dots\dots\dots ???$

$$\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = \varphi'(\theta_k) \Delta t_k, \text{ где } t_k < \theta_k < t_{k+1},$$

$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k.$$

Следовательно, интегральная сумма σ принимает

$$\text{вид } \sigma = \sum_{k=0}^{n-1} P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \cdot \varphi'(\theta_k) \Delta t_k.$$

Эта сумма напоминает интегральную сумму для функции $P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)$ одной переменной на отрезке $[\alpha, \beta]$, однако таковой не является. | ПОЧЕМУ???

В силу того, что в каждом слагаемом этой суммы функции $P(\varphi(t), \psi(t))$ и $\varphi'(t)$ вычислены не в одной и той же точке отрезка $[t_k, t_{k+1}]$, а в различных: τ_k и θ_k (τ_k выбирается произвольно на $[t_k, t_{k+1}]$, а θ_k определяется т. Лагранжа).

Преобразуем сумму σ . Обозначим через

$$\gamma_k = \varphi'(\theta_k) - \varphi'(\tau_k) \quad (k = \overline{0, n-1}).$$

Тогда $\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \varphi'(\tau_k) \Delta t_k +$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \gamma_k \Delta t_k \quad (1)$$

Первая сумма в правой части равенства (1) есть интегральная сумма для функции $P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)$ на $[\alpha; \beta]$. В силу непрерывности $P(x, y)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\varphi'(t)$ функция $P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)$ непрерывна на $[\alpha; \beta]$, следовательно существует предел этой суммы когда λ - наибольшая из длин дуг $A_k A_{k+1}$ стремится к нулю, а значит и $\Delta t_k \rightarrow 0$ и равен

$$\int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) dt.$$

Итак, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \varphi'(\tau_k) \Delta t_k =$

$$= \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \varphi'(\tau_k) \Delta t_k =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Покажем, что вторая сумма в правой части (1) стремится к нулю при $\lambda \rightarrow 0$. Действительно, функция $P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)$ непрерывна на $[\alpha; \beta]$, поэтому ограничена на $[\alpha; \beta]$, то есть существует $k > 0$ такое, что при любом $t \in [\alpha; \beta]$

$$|P(\varphi(t), \psi(t))| < k \quad (2).$$

В силу непрерывности $\varphi'(t)$ на $[\alpha; \beta]$
она равномерно непрерывна на $[\alpha; \beta]$,
следовательно

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \theta, \tau \in [\alpha; \beta]) \\ \left(|\theta - \tau| < \delta \Rightarrow |\varphi'(\theta) - \psi'(\tau)| < \frac{\varepsilon}{k(\beta - \alpha)} \right).$$

Осуществим разбиение дуги AB на части $A_k A_{k+1}$ такие, чтобы все разности Δt_k удовлетворяли условиям $|\Delta t_k| < \delta$, тогда и подалвно $|\theta_k - \tau_k| < \delta$. Следовательно,

$$|\gamma_k| = |\varphi'(\theta_k) - \varphi'(\tau_k)| < \frac{\varepsilon}{k |\beta - \alpha|} \quad (3)$$

В силу неравенств (2) и (3) $\left| \sum_{k=0}^{n-1} P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \gamma_k \Delta t_k \right| \leq$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} |P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k))| |\gamma_k| |\Delta t_k| < k \frac{\varepsilon}{k |\beta - \alpha|} \cdot |\beta - \alpha| = \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \gamma_k \Delta t_k =$

$$= \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \gamma_k \Delta t_k = 0.$$

Итак, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma$ – существует, значит существует

$$\int_{\cup AB} P(x, y) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k. \text{ Но как доказано}$$

последний предел равен $\int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt.$

Следовательно,

$$\int_{\cup AB} P(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (4)$$

Замечание 1.

Можно показать, что найденный предел не зависит от способа параметризации дуги кривой AB , лишь бы выполнялись условия, наложенные на функции φ и ψ .

Замечание 2.

Аналогично доказывается, что если функция $y = \psi(t)$ имеет непрерывную производную на $[\alpha; \beta]$ и функция $Q(x, y)$ непрерывна во всех точках дуги AB , то криволинейный интеграл

$\int_{\cup AB} Q(x, y) dy$ существует и имеет место равенство

$$\int_{\cup AB} Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt. \quad (5)$$

Замечание 3.

Если кривая AB гладкая и, следовательно, обе функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны на $[\alpha; \beta]$ вместе со своими производными $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, то

криволинейный интеграл $\int_{\cup AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

существует и справедливо равенство

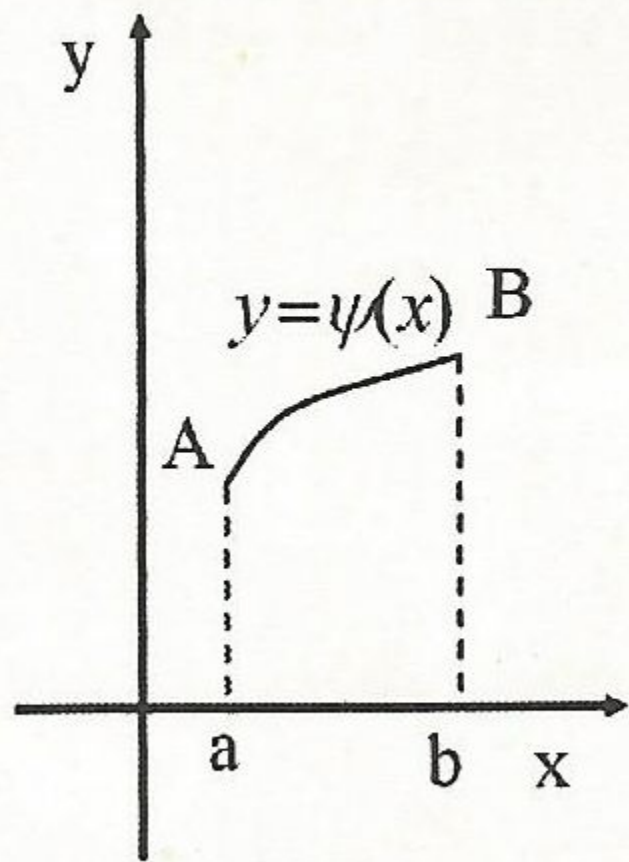
$$\int_{\cup AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$
$$= \int_{\alpha}^{\beta} (P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)) dt \quad (6)$$

Замечание 4.

Формула (6) остается в силе и в случае замкнутого контура интегрирования при условии, что этот контур соответствует монотонному изменению параметра от α до β , такому, при котором каждая точка контура получается только при одном значении параметра t (исключая крайние значения параметра t).

Пусть теперь кривая AB задана явным уравнением $y = \psi(x)$,
причем перемещению по этой кривой из точки A в точку B

соответствует изменение x от a до b .



Пусть функция ψ непрерывна во всех
точках дуги AB . Данную кривую легко
параметризировать.

Принимая за параметр t переменную x ,
то есть полагая $t = x$, получим

следующие параметрические уравнения дуги AB

$$\begin{cases} x = x \\ y = \psi(x) \end{cases} \quad a \leq x \leq b.$$

Заметив, что $dx = x' dx$, применив формулу (4) получим

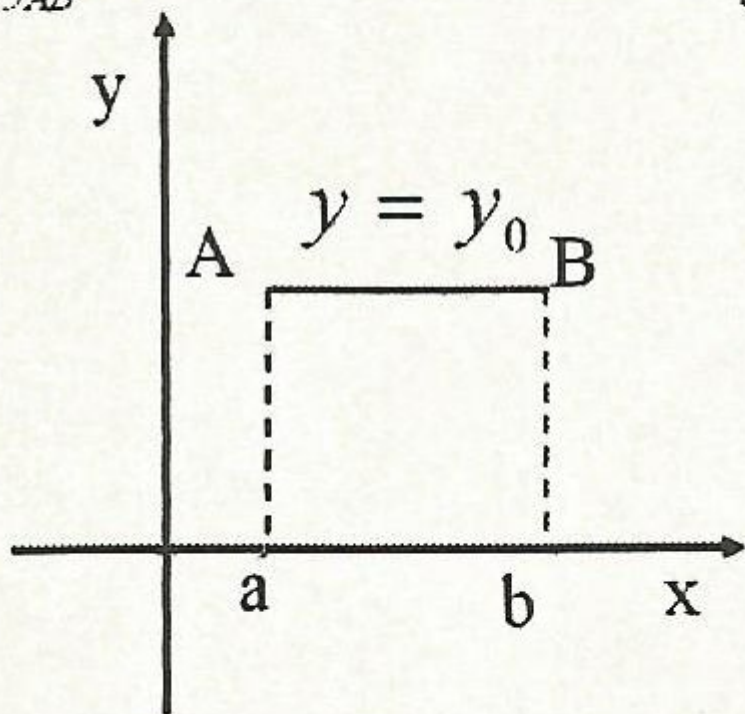
$$\int_{\cup AB} P(x, y) dx = \int_a^b P(x, \psi(x)) dx.$$

Предполагая, что функция ψ имеет на отрезке $[a; b]$ непрерывную производную, а функция $Q(x, y)$ непрерывна вдоль дуги AB , согласно (5) получаем

$$\int_{\cup AB} Q(x, y) dy = \int_a^b Q(x, \psi(x)) \psi'(x) dx.$$

Наконец,

$$\int_{\omega_{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b (P(x, \psi(x)) + Q(x, \psi(x)) \psi'(x)) dx \quad (7)$$



В частности, если кривая AB есть отрезок $y = y_0$, то $dy = 0$ и $\int_{\omega_{AB}} Q(x, y) dy = 0$,

поэтому $\int_{\omega_{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b P(x, y_0) dx$.

Задание.

Получить формулу для вычисления

$$\int_{\cup AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

если интегрирование ведется вдоль дуги,

заданной уравнением $x = \varphi(y)$ ($c \leq y \leq d$),

где φ непрерывно дифференцируема на $[c; d]$.

$$(8) \quad \int_{\cup AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$

$$= \int_c^d (P(\varphi(y), y)\varphi'(y) + Q(\varphi(y), y))dy.$$

Пример.

$$\text{Вычислим } I = \int_L (2 + xy^2)dx - (3 - x^2y)dy$$

вдоль прямой, содержащей точки $A(0; -2)$
и $B(1; 0)$.

$$\text{Уравнение прямой: } \frac{x-0}{1-0} = \frac{y+2}{0+2} \Rightarrow y = 2x - 2.$$

$$I = \int_0^1 (2 + x(2x - 2)^2 - (3 - x^2(2x - 2)) \cdot 2) dx =$$

$$= \int_0^1 (8x^3 - 12x^2 + 4x - 4) dx = -4.$$

3.4. Основные свойства криволинейного интеграла

Отметим основные свойства криволинейного интеграла, непосредственно вытекающие из его определения. Эти свойства рассмотрим для

интеграла $\int_{\cup AB} P(x, y) dx$.

1. Если функция P интегрируема вдоль дуги AB , то функция kP , где $k \in \mathbb{R}$, также интегрируема вдоль дуги AB , причем

$$\int_{\cup AB} kP(x, y)dx = k \int_{\cup AB} P(x, y)dx$$

2. Если функции P_1 и P_2 интегрируемы вдоль дуги AB , то функция $P_1 \pm P_2$ также интегрируема вдоль дуги AB , причем

$$\int_{\cup AB} (P_1 \pm P_2)(x, y) dx = \int_{\cup AB} P_1(x, y) dx \pm \int_{\cup AB} P_2(x, y) dx$$

3. (свойство аддитивности)

Если некоторой точкой C дуга AB разбита на две дуги AC и CB , и функция P интегрируема вдоль каждой из дуг AC и CB , то она интегрируема вдоль дуги AB , причем

$$\int_{\cup AB} P(x, y) dx = \int_{\cup AC} P(x, y) dx + \int_{\cup CB} P(x, y) dx$$

4. Если существует криволинейный интеграл

$\int_{\cup AB} P(x, y) dx$, то существует криволинейный интеграл

$\int_{\cup BA} P(x, y) dx$, причем $\int_{\cup BA} P(x, y) dx = - \int_{\cup AB} P(x, y) dx$,

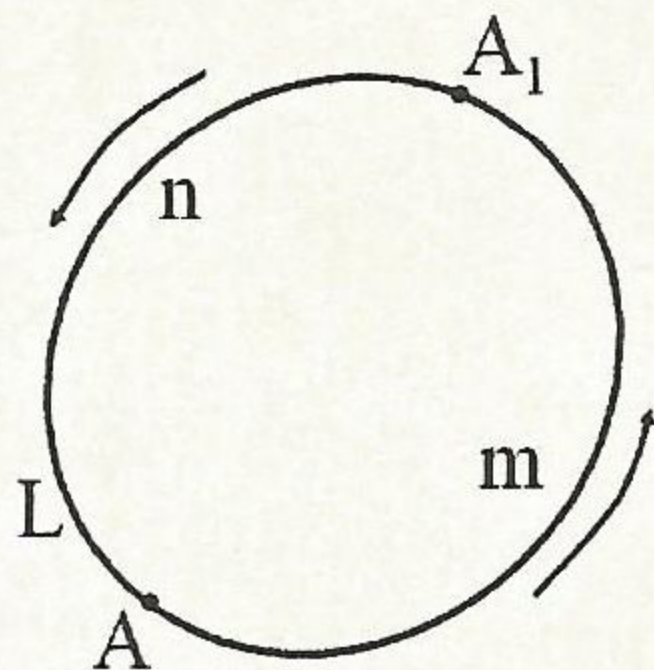
то есть при изменении направления интегрирования на противоположное, криволинейный интеграл изменяет знак на противоположный.

ДОКАЗАТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО.

5. Если функция P интегрируема по замкнутому контуру L , то величина криволинейного интеграла $\int_L P(x, y) dx$ не зависит от того какую точку контура выбрать за начало интегрирования.

Доказательство.

Пусть A и A_1 - любые две несовпадающие точки замкнутого контура.



Тогда, рассматривая точку A как начало, а значит и конец контура L в направлении, указанном стрелкой, можно \oint_L

представить в виде суммы $\int_{AmA_1nA} = \int_{AmA_1} + \int_{A_1nA}$ (1)

На основании чего записано это равенство?

Равенство (1) справедливо в силу свойства аддитивности. Если же рассматривать точку A_1 как начало обхода контура L , то

$$\int_{A_1 n A m A_1} = \int_{A_1 n A} + \int_{A m A_1}. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) находим $\int_{A m A_1 n A} = \int_{A_1 n A m A_2}$.

Замечание.

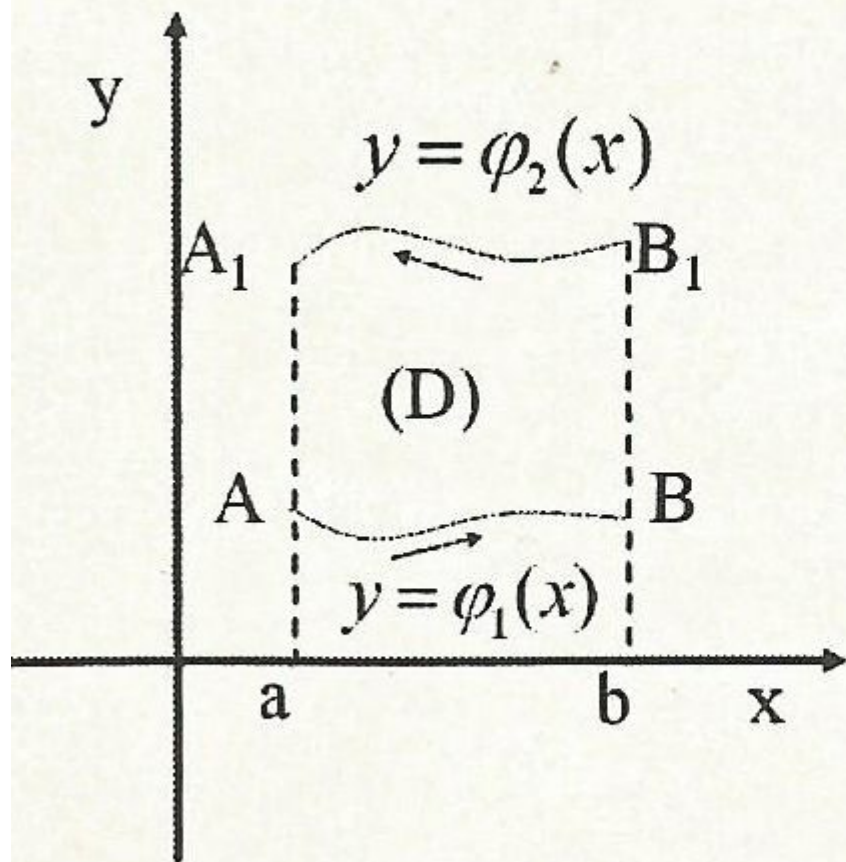
При вычислении криволинейного интеграла вдоль некоторой дуги направление интегрирования указывается порядком написания букв, обозначающих начало и конец этой дуги. Если контур замкнут и не имеет точек самопересечения, указание начальной и совпадающей с ней конечной точки, очевидно, не определяет направления, в котором осуществляется обход контура L .

Условимся называть положительным направление обхода замкнутого контура L то, при котором часть области, ограниченная контуром L , остается слева от наблюдателя. Противоположное этому направление будем называть отрицательным.

3.5. Формула Грина

Между криволинейным интегралом, взятым по замкнутой кривой L , ограничивающей некоторую область (D) и двойным интегралом по этой области существует определенная связь. Выведем формулу устанавливающую эту связь.

Рассмотрим на плоскости XOY замкнутую область (D) , ограниченную контуром L , состоящим из кривых

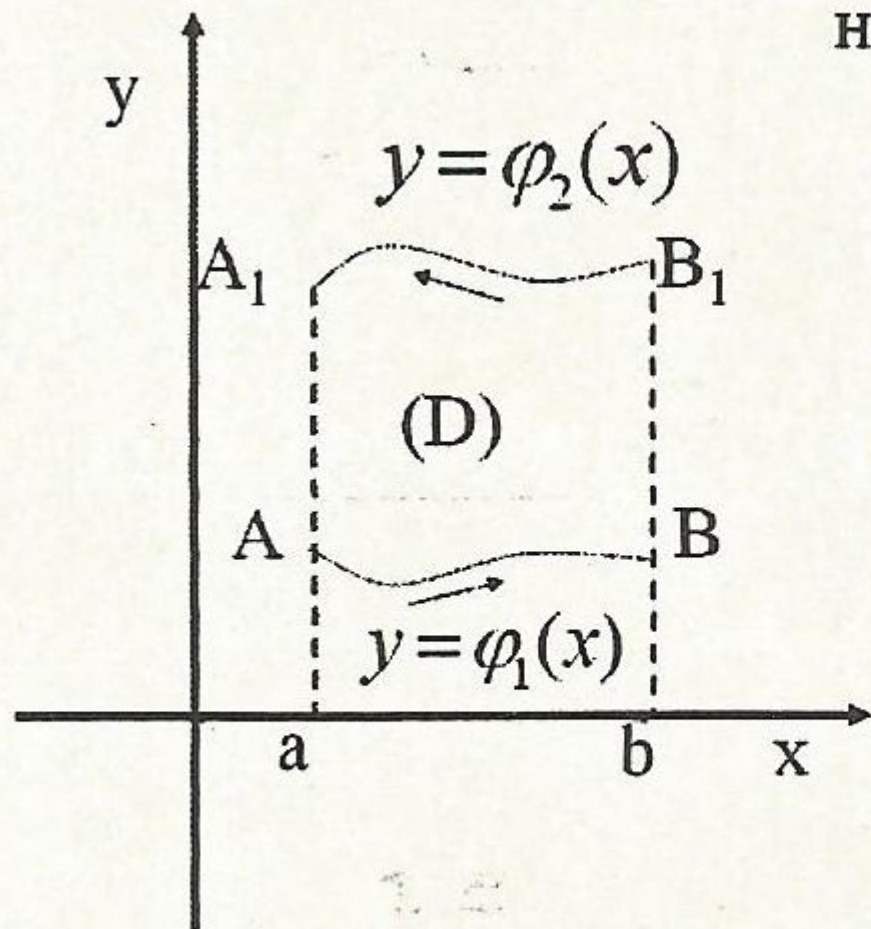


$$(AB): y = \varphi_1(x)$$

$$(A_1B_1): y = \varphi_2(x),$$

где φ_1 и φ_2 непрерывны на $[a, b]$ и прямых $x = a$, $x = b$.

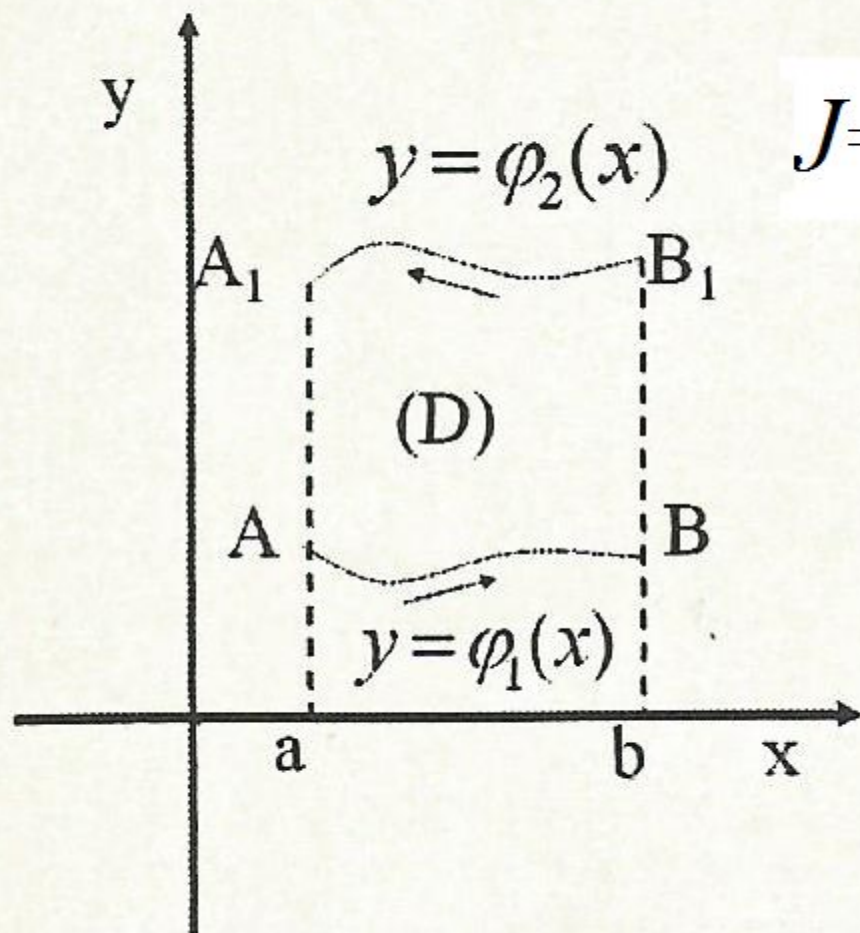
Любая прямая, параллельная оси OY пересекает контур L не более чем в двух точках.



Пусть в области (D) определена и непрерывна вместе со своей частной производной по y функция $P(x; y)$.

Что можно сказать о существовании $\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$?

Двойной интеграл $\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$ существует. Вычислим его.



$$J = \iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy.$$

Внутренний интеграл вычисляется в предположении, что в функции $\frac{\partial P}{\partial y}$ x сохраняет постоянное значение.

При этом условии функция

$P(x, y)$ является первообразной для $\frac{\partial P}{\partial y}$.

$$\begin{aligned}
 \text{Тогда } \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy &= \int_a^b P(x, y) \Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dx = \\
 &= \int_a^b (P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x))) dx = \int_a^b P(x, \varphi_2(x)) dx - \\
 &- \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx = - \int_b^a P(x, \varphi_2(x)) dx - \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx.
 \end{aligned}$$

Каждый из интегралов, стоящих в правой части равенства, может быть заменен криволинейным интегралом.

ПОЧЕМУ?

На основании формулы (4) из 3.3.

Первый - вдоль дуги B_1A_1 , второй - вдоль дуги AB .

Поэтому можем записать

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{\cup B_1A_1} P(x, y) dx - \int_{\cup AB} P(x, y) dx. \quad (1)$$

Заметив, что криволинейные интегралы $\int_{\cup AA_1} P(x, y) dx$

и $\int_{\cup BB_1} P(x, y) dx$ вдоль отрезков BB_1 и AA_1 .

перпендикулярных оси OX равны нулю, равенство (1)

заменяем на $\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{\cup AB} P(x, y) dx - \int_{\cup BB_1} P(x, y) dx -$

$- \int_{\cup B_1A_1} P(x, y) dx - \int_{\cup A_1A} P(x, y) dx = - \left[\int_{\cup AB} P(x, y) dx +$

$+ \int_{\cup BB_1} P(x, y) dx + \int_{\cup B_1A_1} P(x, y) dx + \int_{\cup A_1A} P(x, y) dx \right] =$

$= - \oint_L P(x, y) dx.$

Итак,
$$\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \oint_L P(x, y) dx \quad (2)$$

Полученная формула выражает двойной интеграл по области (D) через криволинейный интеграл по контуру L , ограничивающему область.

Данная формула установлена для случая, когда (D) простейшая область. Нетрудно убедиться, что она остается в силе для области более сложного вида, а именно для любой области, которую можно разбить с помощью нескольких прямых, параллельных оси OY на конечное число областей рассмотренного типа.

Рассмотрим теперь в плоскости XOY простейшую замкнутую область (σ) второго типа, ограниченную замкнутым контуром (L), образованным двумя прямыми $y = c$, $y = d$ и двумя непрерывными на отрезке $[c, d]$ кривыми $x = \psi_1(y)$ и $x = \psi_2(y)$, где для любого $y \in [c, d]$ $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$.

Пусть функция $Q(x, y)$ определена и непрерывна вместе со своей частной производной $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в области (σ) . Тогда аналогично предыдущему

можно доказать, что
$$\iint_{(\sigma)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_L Q(x, y) dy \quad (3)$$

Формула (3) останется верной и для области (σ) , которую можно разбить прямыми, параллельными оси Ox на конечное число областей второго типа.

Вычитая из равенства (3) равенство (2), получаем формулу:

$$\iint_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (4)$$

Эта формула, устанавливающая связь между двойным интегралом по области (D) и полным криволинейным интегралом по ее контуру L называется формулой Грина по имени английского математика и физика Д. Грина (1793-1841 гг.)

Пример. Вычислим с помощью формулы Грина

$$I = \oint_L xy^2 dy - x^2 y dx, \text{ где } L\text{- окружность } x^2 + y^2 = R^2,$$

обходимая против часовой стрелки.

$$Q(x, y) = xy^2, \quad P(x, y) = -x^2 y, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -x^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2.$$

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (y^2 + x^2) dx dy = \iint_D r^3 dr d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr = \frac{R^4}{4} 2\pi = \frac{1}{2} R^4 \pi.$$

3.6. Выражение площади с помощью криволинейного интеграла

Криволинейный интеграл часто удобно использовать при вычислении площади плоской фигуры.

Положим в формуле (2) $\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = -\oint_L P(x, y) dx$

$P(x, y) = y$. Учитывая, что $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$, получим

$\iint_{(D)} dx dy = -\oint_L y dx$. так как интеграл $\iint_{(D)} dx dy$

численно равен площади S плоской области (D) ,

то имеем

$$S = -\int_L y dx. \quad (*)$$

Если положить в формуле (3) $\iint_{(D)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_L Q(x, y) dy$

$Q(x, y) = x$, то получим $S = \oint_L x dy$. (**)

Складывая почленно равенства (*) и (**) и деля обе части полученного равенство на 2, приходим

к формуле $S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx$. (***)

Пример.

Вычислим площадь фигуры, ограниченной эллипсом $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ при обходе эллипса в положительном направлении

$dx = -a \sin t dt$, $dy = b \cos t dt$. Воспользуемся

формулой (***) $S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx$,

получим $S = \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \pi ab$.

3.7. Криволинейные интегралы, зависящие только от начала и конца пути интегрирования

Пусть в некоторой области (D) плоскости XOY определены и непрерывны функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$.

Возьмем в (D) две точки A и B . Будем их соединять различными кусочно-гладкими кривыми L , целиком лежащими в (D) , и вычислять по ним криволинейный интеграл

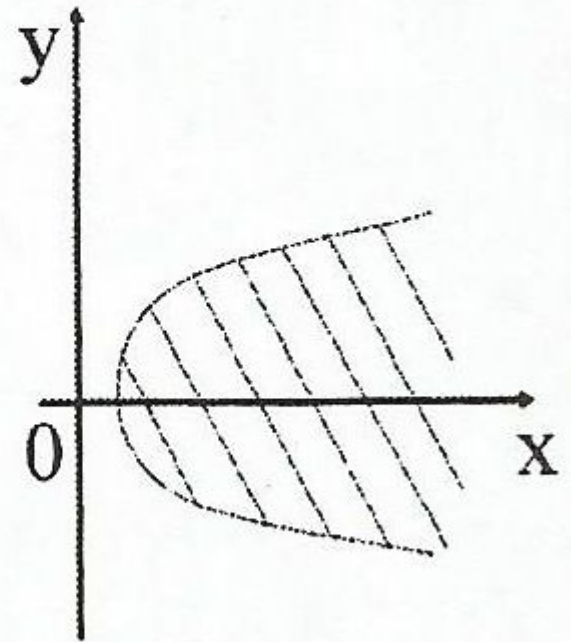
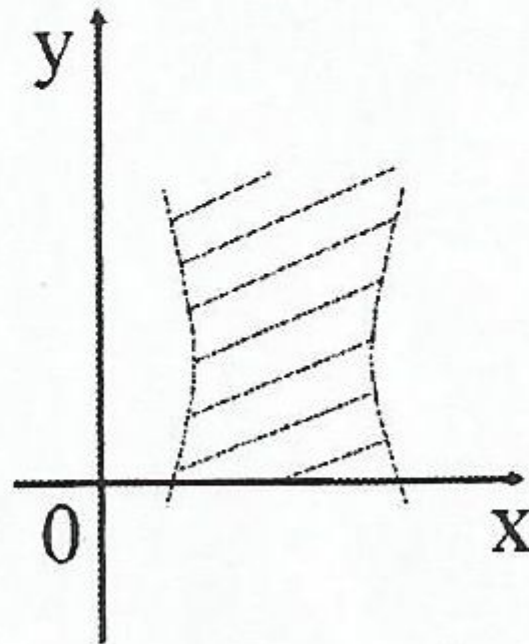
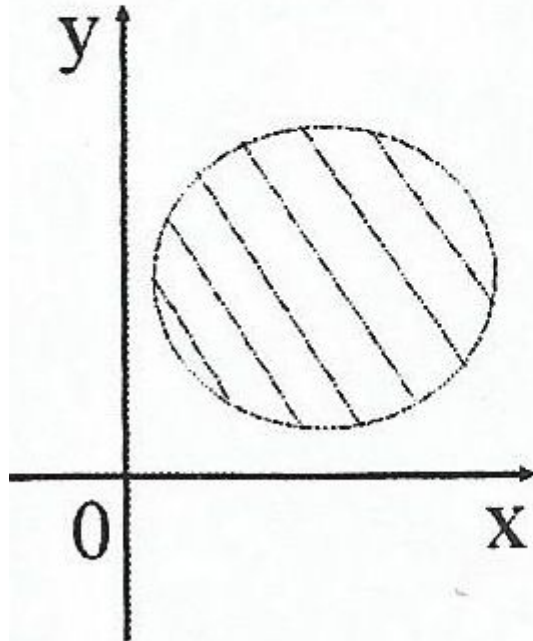
$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (1).$$

Мы получим, вообще говоря, различные значения интеграла (1). Но в некоторых случаях криволинейный интеграл может иметь одинаковые значения вдоль всех кривых, соединяющих т. A и B . Выясним при каких условиях криволинейный интеграл (1) не зависит от пути интегрирования.

Определение.

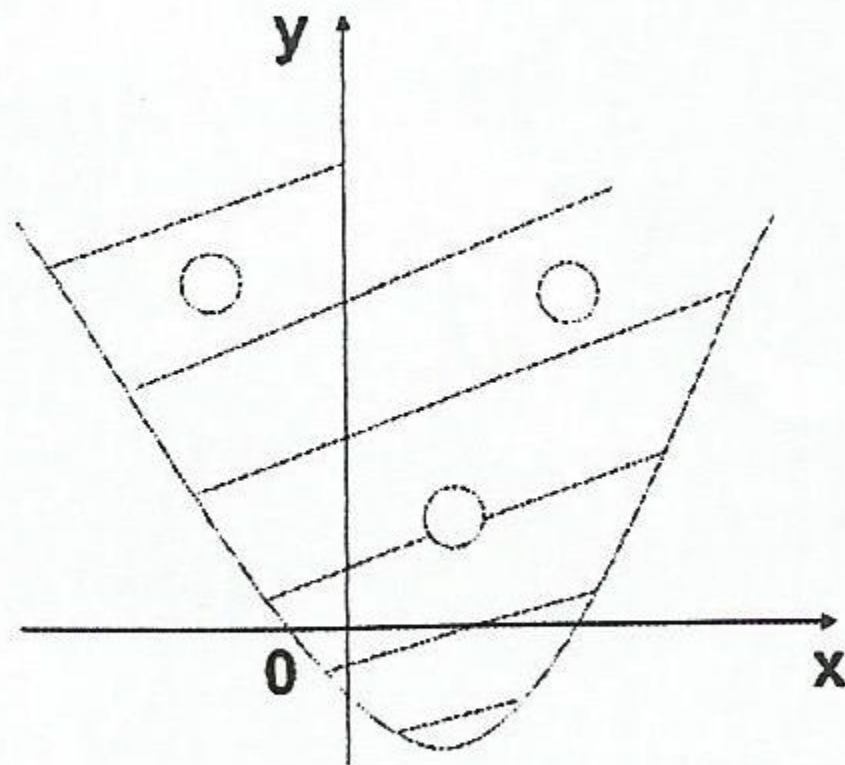
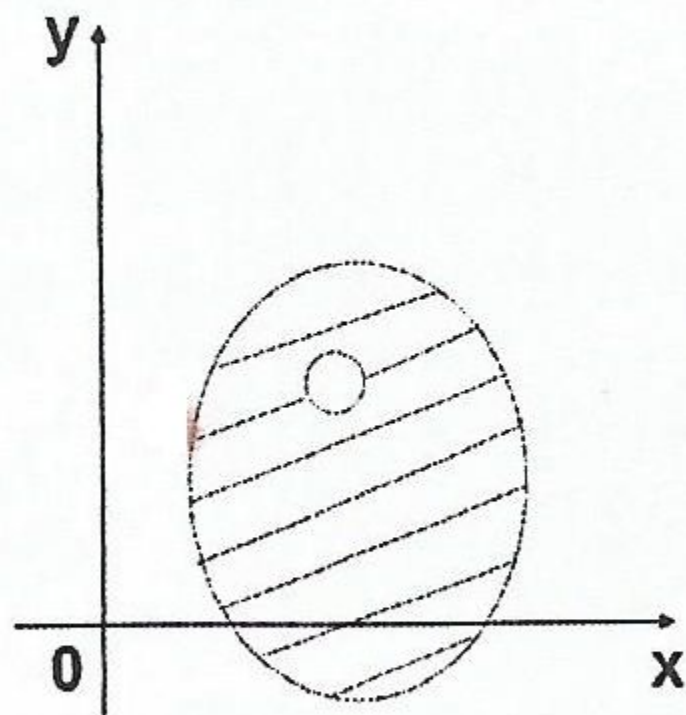
Область (D) называется односвязной, если любой замкнутый контур L , лежащий в (D), принадлежит (D) вместе с областью (σ), ограниченной этим контуром.

ПРИМЕРЫ



Односвязные области

ПРИМЕРЫ



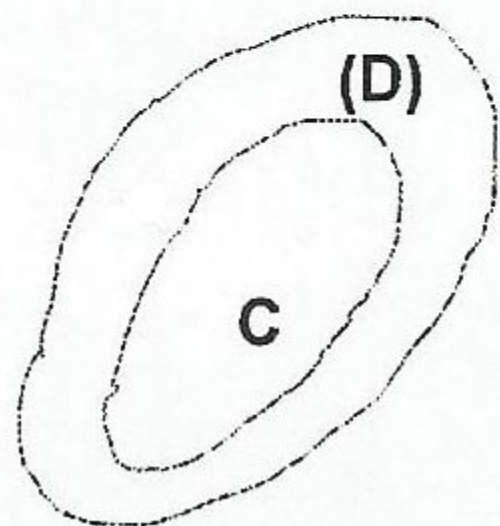
Не односвязные области

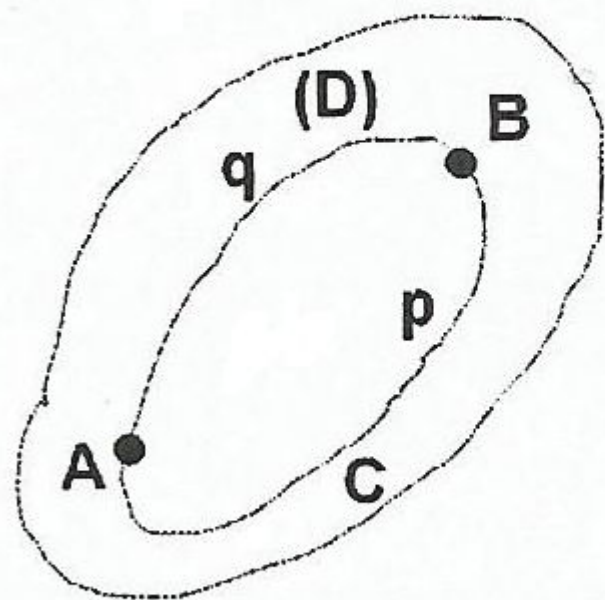
Теорема 1. Для того, чтобы криволинейный интеграл (1) $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ не зависел от формы пути интегрирования в области (D) необходимо и достаточно, чтобы он по всякому замкнутому контуру C, не пересекающему себя и целиком лежащему в (D), равнялся нулю.

Доказательство :

I. Необходимость. Пусть значение интеграла (1) не зависит от формы пути интегрирования в некоторой области (D) .

Пусть C - любой, не пересекающий себя контур, лежащий в (D) .





Возьмем на C две произвольных точки A и B . Они разобьют C на две части AqB и ApB , каждая из которых есть путь, соединяющий т. A с т. B . Согласно допущению

$$\int_{ApB} Pdx + Qdy = \int_{AqB} Pdx + Qdy.$$

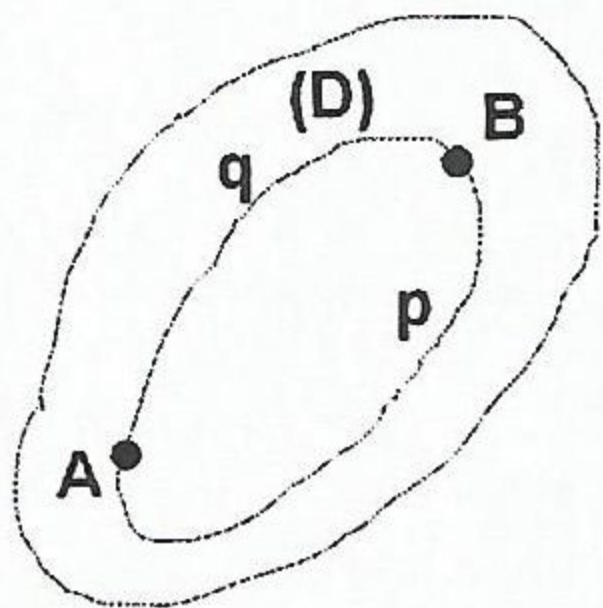
$$\text{Откуда } \int_{ApB} Pdx + Qdy - \int_{AqB} Pdx + Qdy = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{ApB} Pdx + Qdy + \int_{BqA} Pdx + Qdy = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \oint_C Pdx + Qdy = 0.$$

?

II. Достаточность. Пусть интеграл (1) по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в (D) равен нулю. Возьмем в (D) две любые точки A и B . Соединим их двумя различными кривыми,



не имеющими общих точек кроме A и B . Эти кривые образуют в совокупности замкнутый контур $ApBqA$.

Согласно условию

$$\int_{ApBqA} Pdx + Qdy = 0.$$

Тогда $\int_{ApB} Pdx + Qdy + \int_{BqA} Pdx + Qdy = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{ApB} Pdx + Qdy - \int_{AqB} Pdx + Qdy = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{ApB} Pdx + Qdy = \int_{AqB} Pdx + Qdy.$$

Замечание. Мы предположили, что дуги ApV и AqV не имеют общих точек кроме A и B . Теорема остается в силе и для случая, когда кривые ApV и AqV пересекаются.

Доказанная теорема показывает, что поставленный вопрос об условиях независимости интеграла (1) от пути интегрирования эквивалентен вопросу: при каких условиях данный интеграл обращается в нуль по любому замкнутому контуру, лежащему в (D) .

Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 2. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ определены и непрерывны вместе со своими частными

производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой ограниченной

односвязной области (D) . Тогда для того, чтобы криволинейный интеграл по любому замкнутому кусочно гладкому контуру C , целиком лежащему в

(D) , был равен нулю $\oint_C P dx + Q dy = 0$ (2),

необходимо и достаточно, чтобы во всех точках

области (D) выполнялось условие: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ (3).

Доказательство.

Достаточность. Пусть во всех точках области

(D) выполняется условие (3) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, C -

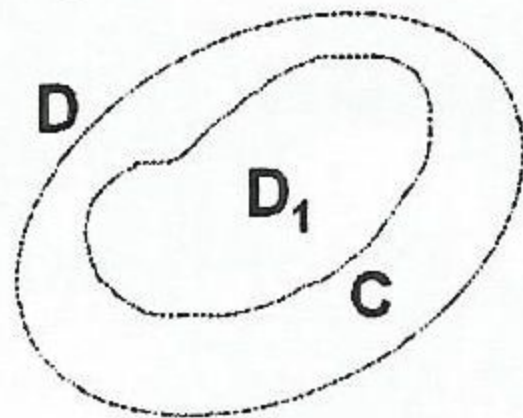
произвольный кусочно гладкий контур,

лежащий в (D). Обозначим через (D₁) - область,

ограниченную контуром C.

Так как по условию D односвязна, то

(D₁) ... (D).| ?



$(D_1) \subset (D)$. Поэтому в (D_1) определены и непрерывны со своими частными производными $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Следовательно в (D_1) можно применить формулу Грина.

ЗАПИШИТЕ ЕЕ!

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_{(D_1)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

В силу условия (3)

$$\iint_{(D_1)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \oint_C P dx + Q dy = 0.$$

Необходимость. Пусть теперь выполняются условия (2). | ?

Доказательство проведем методом от противного. Допустим, что хотя бы в одной точке области (D) условия (3) не выполнены,

т.е.
$$\frac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial x} \neq \frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

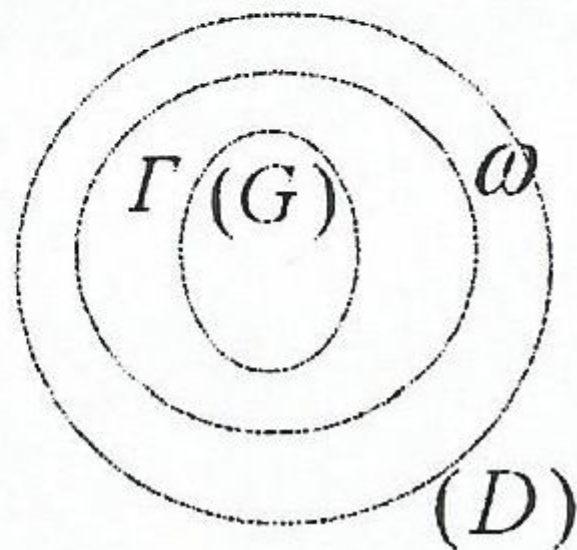
Следовательно в этой точке
$$\left. \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \neq 0.$$

Пусть для определенности
$$\left. \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} > 0.$$

Поскольку $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$, а значит и функция

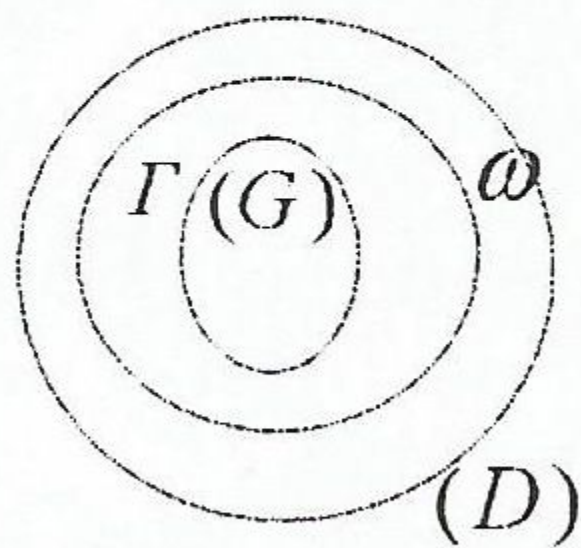
$f(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ непрерывны в (D) , и, в

частности, в т. (x_0, y_0) . Следовательно существует окрестность ω точки (x_0, y_0) , во всех точках которой $f(x, y) > 0$. Возьмем в ω какой-нибудь кусочно-гладкий контур Γ . Область, ограниченную контуром Γ обозначим через (G) .



Тогда по формуле Грина имеем:

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy = \iint_{(G)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (4).$$



К двойному интегралу в правой части применим теорему о среднем значении. | ?

Сформулируйте ее!!!

$$\iint_{(G)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = f(\xi, \eta) \cdot s, \text{ где}$$

$(\xi, \eta) \in G$, а s - площадь (G) .

Так как $f(\xi, \eta)$ и $s > 0$, то $\iint_{(G)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy > 0$.

Но тогда из (4) следует, что для выбранного контура $\int_{\Gamma} P dx + Q dy \neq 0$.

Получили противоречие. Значит наше предположение было не верно.

Замечание. Условие односвязности области (D) существенно. Им пользовались при применении формулы Грина. Для многосвязной области **T.2** не верна.

Следствие. Пусть в замкнутой односвязной области (D) функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные

$\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда для того, чтобы криволинейный

интеграл $\int_L P dx + Q dy$ не зависел от пути

интегрирования, необходимо и достаточно,

чтобы в каждой точке области (D) выполнялось

равенство $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

3.8. Признак полного дифференциала

В криволинейном интеграле (1) $\int_{AB} P dx + Q dy$

подинтегральное выражение напоминает выражение для полного дифференциала некоторой функции $U(x, y)$ двух

переменных $dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$.

Возникает вопрос: служит ли выражение $Pdx + Qdy$ полным дифференциалом некоторой функции двух переменных, т.е. существует ли такая функция $U(x, y)$, полный дифференциал которой равен $dU = Pdx + Qdy$ (2).

Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема : Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$

непрерывны вместе со

своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в

некоторой замкнутой ограниченной односвязной

области (D), то для того, чтобы выражение

$Pdx + Qdy$ было полным дифференциалом некоторой

функции в области (D), необходимо и

достаточно, чтобы $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ (3).

Доказательство.

Необходимость. Предположим, что существует такая функция $U(x, y)$, что

$$\left. \begin{aligned} & (\forall (x, y) \in (D)) \left(dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = \right. \\ & \left. = P dx + Q dy \right). \quad (4) \end{aligned} \right\}$$

Отсюда следует $P = \dots$, $Q = \dots???$

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Продифференцировав обе части первого равенства

по y , а второго по x , получим
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}. \quad (5)$$

Так как по условию $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в (D) , то

$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$ непрерывны в (D) и следовательно

выполняется равенство $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$, но тогда из (5)

следует $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то есть в (D) выполняется равенство (3).

Достаточность.

Пусть для выражения (2) $Pdx + Qdy$ выполнено

условие (3)
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Покажем существование функции $U(x, y)$,

для которой выражение (2) является полным дифференциалом.

Действительно, при выполнении условий (3) криволинейный интеграл (1) не зависит от пути интегрирования и вполне определяется заданием начальной и конечной точки пути интегрирования.

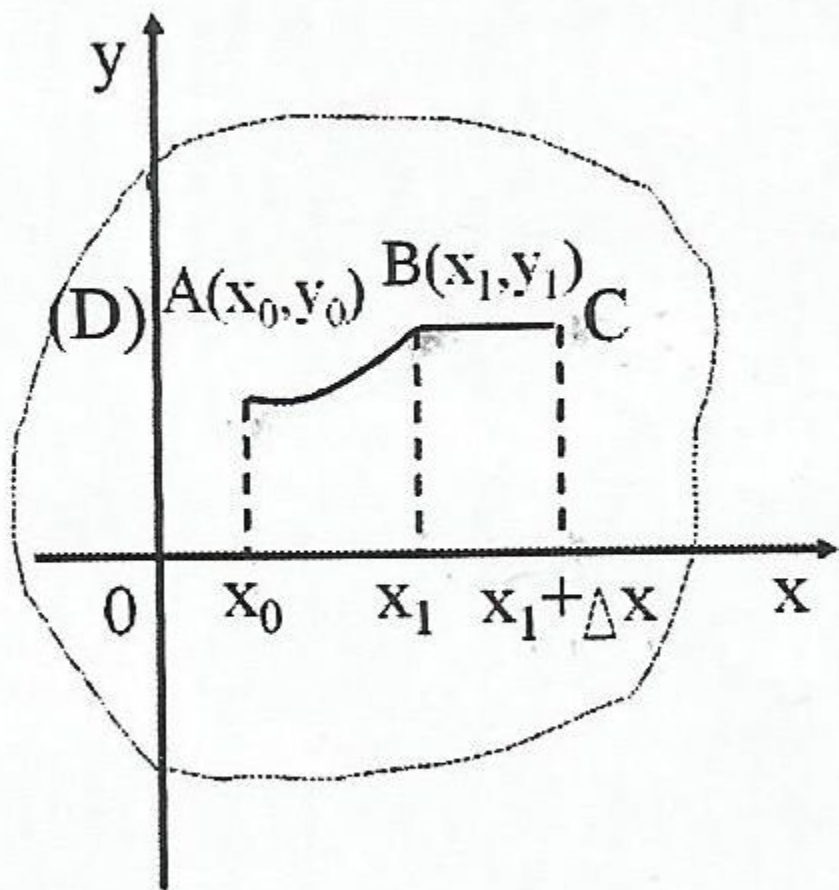
На основании чего сделано такое утверждение?

Зафиксируем начальную точку пути интегрирования $A(x_0, y_0)$, а точку $B(x, y)$ будем считать переменной в области (D) .

Тогда криволинейный интеграл (1) будет некоторой функцией от двух переменных x и y , определенной в области (D) . Обозначим эту функцию

$$U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Покажем, что функция $U(x, y)$ имеет в области (D) полный дифференциал и найдем его.



Пусть $B(x_1, y_1)$ некоторая фиксированная точка из (D) .

Оставляя y_1 без изменения, дадим x_1 приращение Δx

такое, чтобы точка $C(x_1 + \Delta x, y_1) \in (D)$.

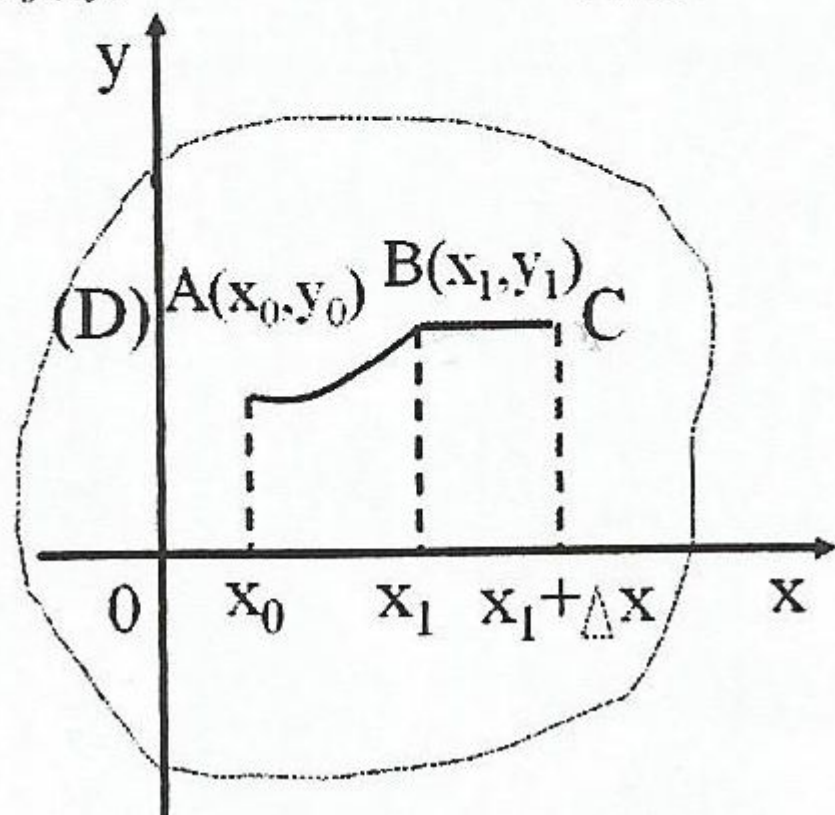
Соответствующее частное приращение функции $U(x, y)$ будет равно

$$\Delta_x U = U(x_1 + \Delta x, y_1) - U(x_1, y_1) =$$

$$= \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1 + \Delta x, y_1)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy - \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

$$\text{При этом } \Delta_x U = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1 + \Delta x, y_1)} P dx + Q dy - \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P dx + Q dy =$$

$$= \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P dx + Q dy + \int_{(x_1, y_1)}^{(x_1 + \Delta x, y_1)} P dx + Q dy - \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P dx + Q dy =$$



$$= \int_{(x_1, y_1)}^{(x_1 + \Delta x, y_1)} P dx + Q dy =$$

$$= \int_{(x_1, y_1)}^{(x_1 + \Delta x, y_1)} P dx + \int_{(x_1, y_1)}^{(x_1 + \Delta x, y_1)} Q dy.$$

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_1 + \Delta x, y_1)} Q dy = 0, \text{ поскольку на отрезке } [BC]$$

значение y постоянно, следовательно $dy = 0$.

Итак,

$$\Delta_x U = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_1 + \Delta x, y_1)} P dx = \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} P(x, y_1) dx,$$

ТАК КАК.....

Уравнение BC : $y = y_1$.

Применяя к полученному определенному интегралу теорему о среднем, получим

$$\Delta_x U = P(x_1 + \theta \Delta x, y_1) \Delta x, \text{ где } 0 < \theta < 1.$$

Откуда
$$\frac{\Delta_x U}{\Delta x} = P(x_1 + \theta \Delta x, y_1).$$

Устремим Δx к нулю. В силу непрерывности функции $P(x, y)$ в (D)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(x_1 + \theta \Delta x, y_1) = P(x_1, y_1).$$

Следовательно, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x U}{\Delta x} = P(x_1, y_1)$ существует,

что означает: функция $U(x, y)$ имеет в т. (x_1, y_1) частную производную по x , равную т. (x_1, y_1) .

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{(x_1, y_1)} = P(x_1, y_1).$$

Поскольку т. (x_1, y_1) в области (D) выбрана произвольно, то это справедливо для любой точки области (D) .

Совершенно аналогично доказывается, что в

любой т. (x, y) из (D) $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y)$.

Так как $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в

(D) , то частные производные $\frac{\partial U}{\partial x}$ и $\frac{\partial U}{\partial y}$

непрерывны в (D) . Что отсюда вытекает???

Отсюда вытекает, что $U(x, y)$
дифференцируема в (D) и ее
полный дифференциал

$$dU = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Замечание. Функцию двух переменных $U(x, y)$, полный дифференциал которой равен подинтегральному выражению $Pdx + Qdy$ (2) называют первообразной для этого выражения. Найденная функция $U(x, y)$ является не единственной первообразной для (2). Такими функциями будут очевидно функции вида $U(x, y) + C$, где C - произвольная постоянная.

Легко убедиться, что $U(x, y) + C$ есть общее выражение, общий вид всех первообразных для выражения $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.

3.9. Восстановление функции по ее полному дифференциалу

Пусть $Pdx + Qdy$ есть полный дифференциал некоторой функции $U(x, y)$ в некоторой замкнутой ограниченной односвязной области.

Из 3.8. следует, что для отыскания $U(x, y)$ достаточно выбрав какую-либо точку

$(x_0, y_0) \in D$, вычислить криволинейный интеграл

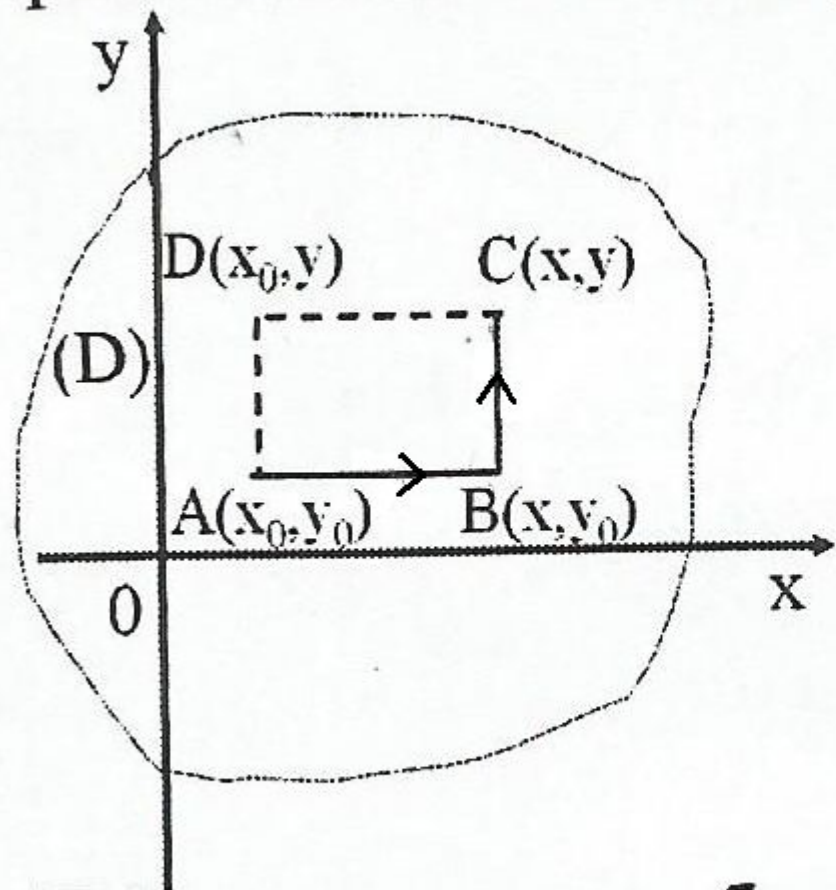
$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy$ по любой линии, соединяющей

точки (x_0, y_0) и (x, y) .

Формула $U(x,y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy + C,$

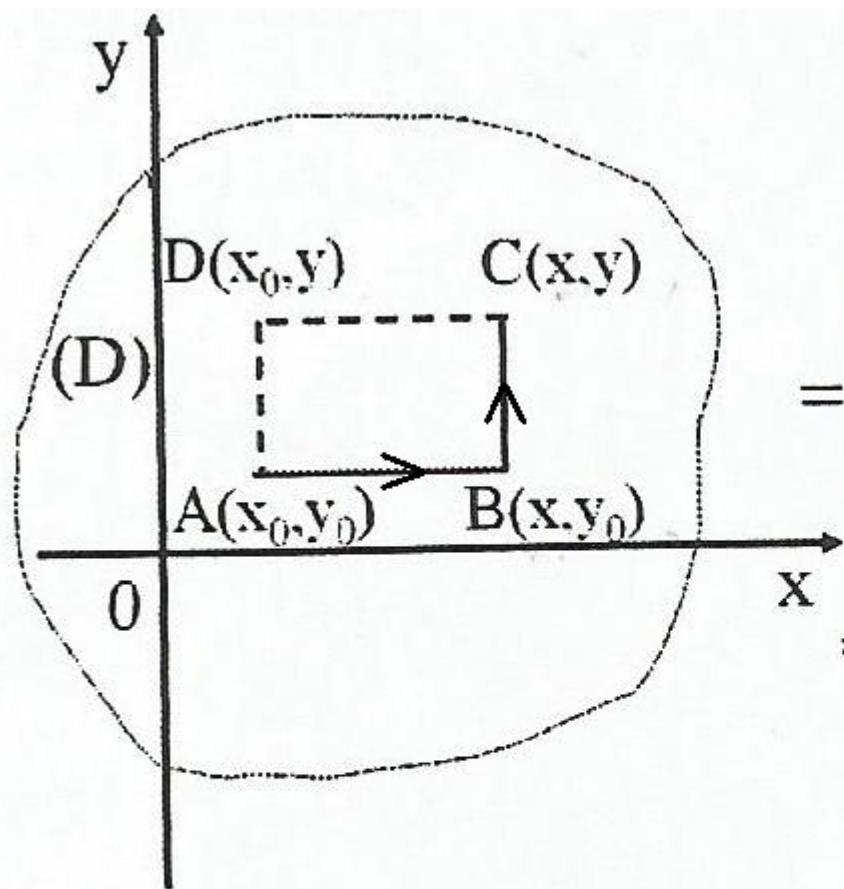
где C -произвольная постоянная, дает возможность определить множество всех функций, имеющих подынтегральное выражение своим полным дифференциалом.

Криволинейный интеграл легко вычислить,



если в качестве пути интегрирования взять ломаную, звенья которой параллельны координатным осям, например, ломаную

ABC , лежащую в области (D) .



$$\text{Тогда } \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy =$$

$$= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y_0)} P dx + Q dy + \int_{(x, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy =$$

$$= \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + C.$$

$$\text{Итак, } U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx +$$

$$+ \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + C.$$

$$[AB]: y = y_0, dy = 0,$$

$$[BC]: x = \text{const}, dx = 0.$$

Замечание. Можно было бы интегрировать по ломаной ADC . В этом случае получим

$$U(x, y) = \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + \int_{x_0}^x P(x, y) dx + C.$$

Пример.

Найти функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу

$$dU(x, y) = (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy.$$

Решение.

В этом случае $P(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$, $Q(x, y) = x^2 - 2xy - y^2$
непрерывны и имеют непрерывные производные

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 2y, \text{ удовлетворяющие условию}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 2y. \text{ Значит } Pdx + Qdy \text{ полный дифференциал.}$$

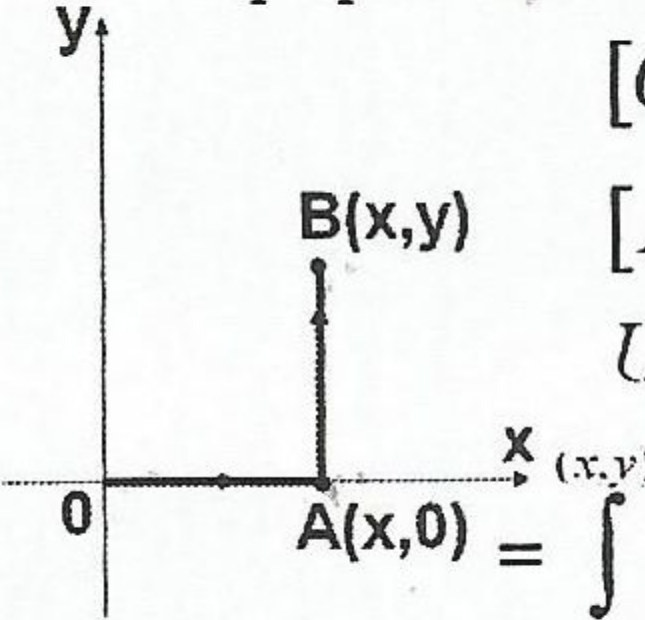
Для нахождения $U(x, y)$ примем за начало интегрирования т. $(0, 0)$, за конечную (x, y) .

Интегрирование будем вести вдоль ломаной OAB .

$$[OA]: y = 0, dy = 0, 0 \leq x \leq x.$$

$$[AB]: x = \text{const}, dx = 0, 0 \leq y \leq y.$$

$$U(x, y) =$$



$$U(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - y^2) dy =$$

$$= \int_0^x x^2 dx + \int_0^y (x^2 - 2xy - y^2) dy + C = \frac{x^3}{3} \Big|_0^x + \left(x^2 y - \frac{2xy^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^y =$$

$$= \frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + C.$$

