дисциплины «Математика» КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

Вариант 0.

Пример 9.

Решить систему уравнений, используя формулы Крамера:

$$\left.\begin{aligned} 2s - t + v &= 1 \\ 3t - 2v &= 2 \\ s + t - v &= 0 \end{aligned}\right\}$$

- Решение:
- Найдем определитель основной матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 2 + 0 - 3 + 4 = -3,$$

$$\Delta \neq 0$$

,

, следовательно, система имеет единственное решение.Найдем его по формулам Крамера:

$$s = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \qquad t = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \qquad v = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3+2+2-2 = -1$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2-3-4 = -9;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -4-2-2 = -8$$

Итак,

$$S = \frac{1}{3} \qquad T = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}; \qquad V = \frac{9}{3} = 3.$$

- **Пример 10.** Исследовать на совместность и решить систему методом Гаусса:

$$\left.\begin{array}{lllll} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & =1 \\ & 3x_2 & & +2x_4 & =0 \\ x_1 & -2x_2 & & +x_4 & =-1 \\ 3x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & =2 \end{array}\right\}$$

Решение.Найдем ранг расширенной матрицы системы, выполнив элементарные преобразования строк:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 7 & -1 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 7 & -1 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -17/3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -32/3 & 8 \end{array}\right)$$

- Очевидно, что *r(A) = r( )=4,* следовательно, система совместна
- Очевидно, что *r(A) = r( )=4*, следовательно, система совместна, причем имеет единственное решение. Запишем систему, соответствующую последней матрице:
- Находим значения неизвестных:

$$\left.\begin{array}{llll} x_1 & -2x_2 & +4x_4 & =-1 \\ & x_2 & +\frac{2}{3}x_4 & =0 \\ & & x_3 \quad -5x_4 & =3 \\ & & -\frac{32}{3}x_4 & =8 \end{array}\right\}$$

- Находим значения неизвестных:

$$x_4 = -\frac{3}{4}; \qquad x_3 = 3 - \frac{15}{4} = -\frac{3}{4}; \qquad x_2 = \frac{1}{2}; \qquad x_1 = \frac{3}{4};$$

- Итак, решение системы:

$$x_4 = -\frac{3}{4}; \qquad x_3 = 3 - \frac{15}{4} = -\frac{3}{4}; \qquad x_2 = \frac{1}{2}; \qquad x_1 = \frac{3}{4};$$

$$x_1 = \frac{3}{4}; \qquad x_2 = \frac{1}{2}; \qquad x_3 = x_4 = -\frac{3}{4};$$

Пример 11. Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 3x_4 = -2, \\ 2x_1 - x_2 - 16x_3 + 4x_4 = 26, \\ -3x_1 + 2x_2 + 27x_3 - 7x_4 = -42 \end{cases}$$

- и в случае совместности решить ее методом Гаусса.
- **Решение**
- При исследовании системы линейных уравнений используем теорему Кронекера–Капелли: система линейных уравнений совместна, тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.

- Составим расширенную матрицу системы

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -16 & 4 & 26 \\ -3 & 2 & 27 & -7 & -42 \end{array}\right)$$

- Чтобы определить ранг матрицы, приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк. Матрицы, получаемые после преобразований, являются эквивалентными. Будем обозначать это знаком .
- Прибавим сначала ко второй строке первую, умноженную на , а затем к третьей – первую, умноженную на 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & -3 & \vline & -2 \\ 2 & -1 & -16 & 4 & \vline & 26 \\ -3 & 2 & 27 & -7 & \vline & -42 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & -3 & \vline & -2 \\ 0 & -5 & -30 & 10 & \vline & 30 \\ -3 & 2 & 27 & -7 & \vline & -42 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & -3 & \vline & -2 \\ 0 & -5 & -30 & 10 & \vline & 30 \\ 0 & 8 & 48 & -16 & \vline & -48 \end{pmatrix}.$$

- Умножим вторую строку матрицы на $-\frac{1}{5}$, третью строку умножим на $\frac{1}{8}$, получим матрицу

- Прибавим к третьей строке вторую, умноженную на -1 , и получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & -3 & \vline & -2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & \vline & -6 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & \vline & -6 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & -3 & \vline & -2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & \vline & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vline & 0 \end{pmatrix}.$$

- Ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы системы и равен 2, следовательно, система имеет решение. Так как ранг матрицы меньше, чем количество переменных в системе, то система имеет бесконечно много решений. Чтобы найти решения, прибавим к первой строке вторую строку, умноженную на -2 :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

- После проведенных преобразований расширенной матрицы система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_3 + x_4 = 10, \\ x_2 + 6x_3 - 2x_4 = -6. \end{cases}$$

- Выбираем в качестве свободных переменные x_3 и x_4. Полагаем $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$,

Тогда $x_1 = 10 + 5c_1 - c_2$, $x_2 = -6 - 6c_1 + 2c_2$.

Итак, система уравнений имеет решения

($10 + 5c_1 - c_2$; $-6 - 6c_1 + 2c_2$; c_1; c_2), где c_1, c_2 – действительные числа.